新竹市第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學

組　　別：國小

作品名稱：翻轉圈圈魔法—莫比烏斯環的分割排列變化

關 鍵 詞：旋轉、等分分割、排列分割

編　號：115PB-M003

摘要

老師常常說:「凡事都有一體兩面。」五年級的校外教學，我們看到了一個很特別的環，叫莫比烏斯環，因此我們想深入研究它。

我們設定三個研究目的，紙條旋轉 180°、360°、540°、720°和 900°黏合等分剪開探討紙條的形變，分割不同等分莫比烏斯環切開後的形變，不同個數的莫比烏斯環和普通環依序排列，垂直相接，等分剪開後的形變。

旋轉 180°的奇數倍紙環會形成一個環，長度變 2 倍。旋轉 180°的偶數倍的紙環會形成兩個環， 2 個環長度不變。分割為偶數等分時，形成 $\frac{n}{2}$ 個旋轉 720°長為 2L 的普通環；分割為奇數等分時，形成$\frac{n-1}{2}$+1 個環，其中有 $\frac{n-1}{2}$個旋轉 720°長度為 2L 的普通環，再加上一個未形變的莫比烏斯環。連接兩個環連接時，若為一個大環，則可以履平成一個四邊幾乎等長的正方形。三個環連接時若為一個環，則履平後可形成兩個交疊的長方形，分開的兩個環，則兩個環皆為長方形。連接四個環時，若形變為一大環，履平後會形成四個交疊的四邊形，若分開為兩個環，則兩個環皆為「凹」字形。連接數個環時，則接點連接方式要順著指環旋轉與否相對或相鄰連接，即可形成分開的兩環。

壹、 前言

一、 研究動機

老師常常說:「凡事都有一體兩面。」五年級的校外教學，我們去科教館，看到了一個很特別的環，顛覆了我們既有的認知，不是所有東西都是一體兩面耶!經過講師的講解，我們才知道這叫莫比烏斯環，這種環只有一個面，就是從環上的一個點開始畫線，可以將整個環繞完，並沒有正反面之分。因此我們對莫比烏斯環很好奇，所以決定把莫比烏斯環當成我們科展的主題，做進一步的研究。

二、 目的

（一） 旋轉 180°、360°、540°、720°和 900°莫比烏斯環的形變探討。

（二） 莫比烏斯環分割不同等分的形變探討。

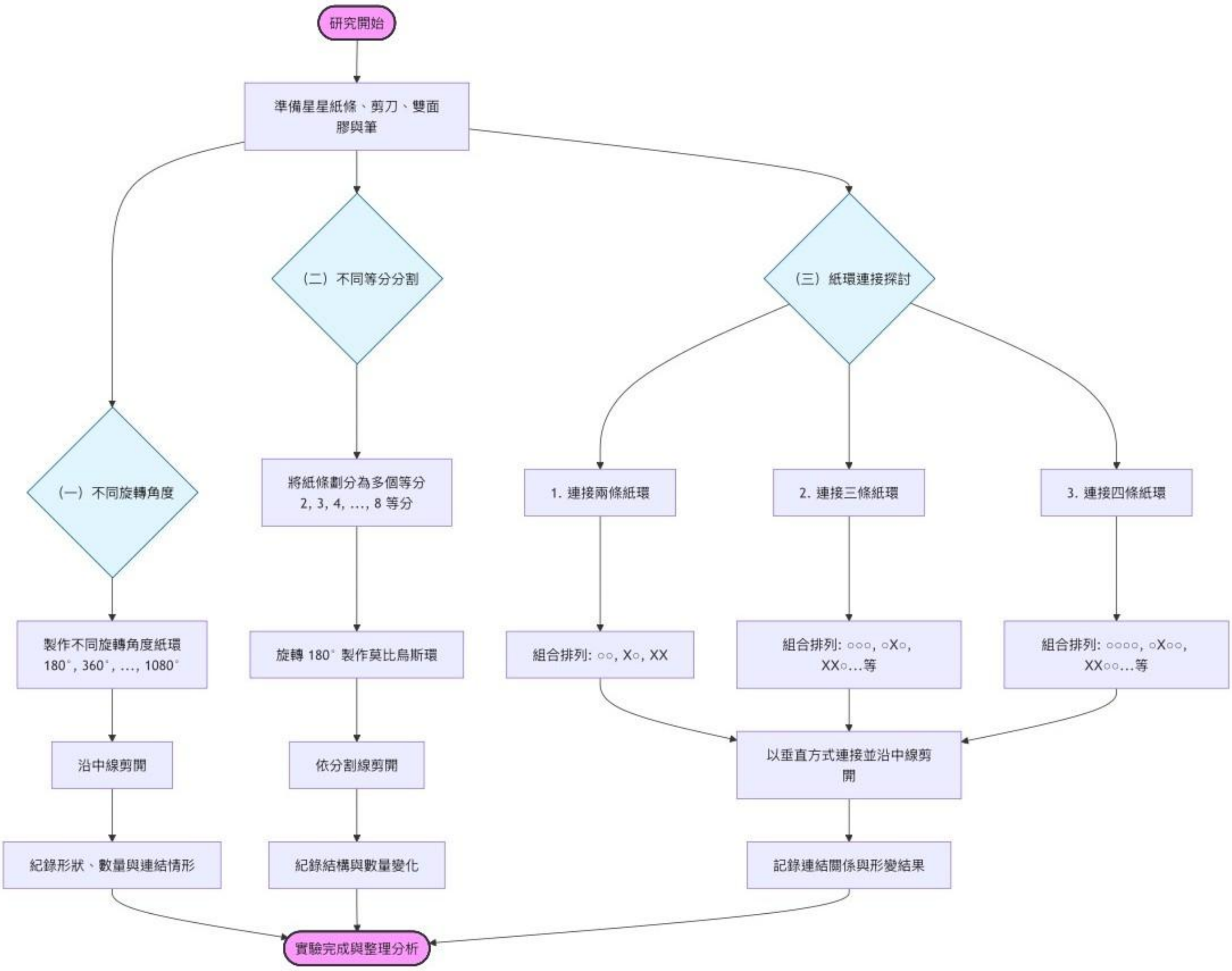
（三） 連接莫比烏斯環與普通紙環不同個數及排列方式的形變探討。

貳、研究器材及設備

星星紙條、剪刀、雙面膠、筆

參、研究流程與方法

一、 研究流程



二、 研究方法

1. 旋轉 180°、360°、540°、720°和 900°莫比烏斯環的形變探討。

(1) 拿出一條寬 1 公分，長 26 公分的星星紙紙條。

(2) 分別將紙條旋轉 180°、360°、540°、720°和 900°，再將兩端用雙面膠固定，形成一個環。

(3) 用剪刀將紙環從中間剪開，觀察並紀錄結果。

2. 莫比烏斯環分割不同等分的形變探討。

(1) 取一張紙條，用筆分別將紙條劃分成 2、3、4、5、6、7 和 8 等分。

(2) 將紙條旋轉 180°形成一個莫比烏斯環。

(3) 沿著劃分好的線剪開，觀察並紀錄結果。

3. 連接莫比烏斯環與普通紙環不同個數及排列方式的形變探討。

(〇:莫比烏斯環；X：普通環)

3-1 連接兩條紙環

(1) 拿出兩條寬 1 公分，長 13 公分的紙條。

(2) 分別將紙條做出〇〇、X〇和XX的排列，並垂直相連。

(3) 用剪刀將紙環從中間剪開，觀察並紀錄結果。

3-2 連接三條紙環

(1) 拿出三條寬 1 公分，長 13 公分的紙條。

(2) 分別將紙條做出〇〇〇、〇X〇、XX〇、X〇X、XXX和〇〇X的排列，並垂直相連。

(3) 用剪刀將紙環從中間剪開，觀察並紀錄結果。

3-3 連接四條紙環

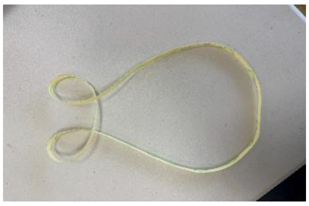
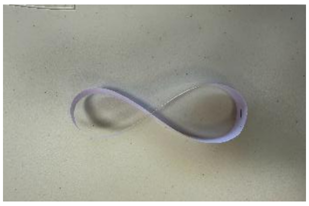
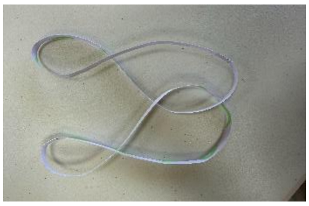
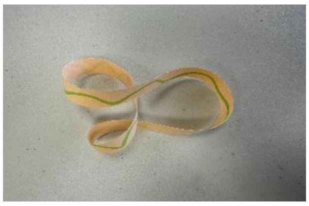
(1) 拿出四條寬 1 公分，長 13 公分的紙條。

(2) 分別將紙條做出〇〇〇〇、〇X〇〇、XX〇〇、〇X〇X、XX〇X、〇〇〇X、〇XXX、〇XX〇和X〇〇X的排列，並垂直相連。

(3) 用剪刀將紙環從中間剪開，觀察並紀錄結果。

肆、研究結果與討論

一、 旋轉 180°、360°、540°、720°和 900°莫比烏斯環的形變探討。

<table>
<tr><th>旋轉角度</th><th>原型</th><th>形變</th></tr>
<tr><td rowspan="2">180°</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">將紙條旋轉 180°後頭尾相接，2 等分剪開，在桌上履平後，形成 1 個轉了 720°的普通環，環自身無交點，等分剪開前長度為 L，剪開後長度為 2L。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">360°</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">將紙條旋轉 360°後頭尾相接，2 等分剪開，在桌上履平後，形成 2 個各轉 360°的普通環，2 環之間有 1 個交點，等分剪開前長度為 L，剪開後各環長度為 L。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">540°</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">將紙條旋轉 540°後頭尾相接，2 等分剪開，在桌上履平後，形成 1 個轉 1440°的普通環，環自身纏繞後產生 2 交點，等分剪開前長度為 L，剪開後長度為 2L。</td></tr>
<tr><td>720°</td><td></td><td></td></tr>
</table>

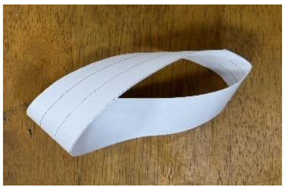
<table>
<tr><td></td><td colspan="2">將紙條旋轉 720°後頭尾相接，2 等分剪開，在桌上履平後，形成 2 個各轉 720°的普通環，2 環之間有 3 個交點，等分剪開前長度為 L，剪開後各環長度為 L。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">900°</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">將紙條旋轉 900°後頭尾相接，2 等分剪開，在桌上履平後，形成 1 個轉 2160°的普通環，環自身纏繞後產生 4 交點，等分剪開前長度為 L，剪開後長度為 2L。</td></tr>
</table>

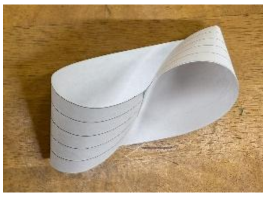
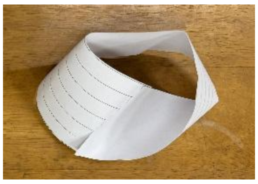
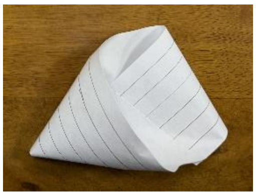
旋轉度數	分割後 紙環個數	分割後 紙環長度	形變紙環 旋轉角度	交點個數
180°	1	2L	720°=180°*2+360°	0
360°	2	L	360°	2
540°	1	2L	1440°=540°*2+360°	3
720°	2	L	720°	4
900°	1	2L	2160°=900°*2+360°	5

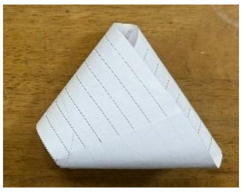
歸納上述的實驗結果，我們發現，當紙環旋轉 180°的奇數倍，等分剪開時，會形成一個環，長度會是原本環的 2 倍，形變後的紙環旋轉角度會是原本旋轉角度的兩倍再多 360°；旋轉 180°的偶數倍時會形成兩個環，2 個環都會是和原本的一樣長，形變後的紙環旋轉角度會和原本旋轉角度一樣。紙環旋轉 180°、360°、540°、720°、900°等分剪開時，交點數量分別是 0、2、3、4、5。由此推論，當角度多旋轉 180°時，分割後的紙環就再會多一個交點。

二、 莫比烏斯環分割不同等分的形變探討。

先分別裁切 2、3、4、5、6、7、8 公分不同寬度的紙條共 8 條，每 1 公分為 1 等分，用筆畫線作為裁切的記號，將作記號的紙條每 1 等分由右而左依序編號(1, 2, 3…)，將紙條一端旋轉 180°，頭尾黏合形成一個總長為 L 的莫比烏斯環，每一個環沿記號線剪開，記錄形變結果如下。

<table>
<tr><th>分割等分</th><th>原型</th><th>形變</th></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">紙條分割成 2 等分時，編號 1 會連接編號 2 變成 1 個轉了 720° 的普通環，紙環長度為 2L，紙環之間沒有個交點。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">紙條分割成 3 等分時，編號 1 連接編號 3 成為一個旋轉 720°的大環，長度為 2L；編號 2 沒有跟其他等分連接，為一個長度 L 旋轉 180°的莫比烏斯環，紙環間有 2 個交點。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">紙條分割成 4 等分時，編號 1 連接編號 4，編號 2 連接編號 3，形變成 2 個轉了 720°的大環，長度皆為 2L，紙環間有 4 個交點。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">紙條分割成 5 等分時，會變成 3 個環，2 個大環 1 個小環，編號 1 連接編號 5，編號 2 連接編號 4，為長度 2L 且旋轉 720°的大環，編號 3 沒有跟其他等分連接，為一個長度 L 旋轉 180°的莫比烏斯小環。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">紙條分割成 6 等分時，編號 1 連接編號 6，編號 2 連接編號 5，編號 3 連接編號 4，形變成 3 個轉了 720°的大環，長度皆為 2L。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">7</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">紙條分割成 7 等分時，會變成 4 個環，3 個大環 1 個小環，編號 1 連接編號 7，編號 2 連接編號 6，編號 3 連接編號 5，皆為長度 2L 且旋轉 720°的大環，編號 4 沒有跟其他等分連接，為一個長度 L 旋轉 180°的莫比烏斯小環。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>8</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">紙條分割成 8 等分時，編號 1 連接編號 8，編號 2 連接編號 7，編號 3 連接編號 6，編號 4 連接編號 5，形變成 4 個轉了 720˚的大環，長度皆為 2L。</td></tr>
</table>

分割等分	分割後紙環個數	分割後紙環長度	形變紙環 旋轉角度
2	1	2L	720˚
3	2(1 大 1 小)	2L、1L	720˚*2 180˚*1
4	2	2L、2L	720˚*2
5	3(2 大 1 小)	2L、2L、1L	720˚*2 180˚*1
6	3	2L、2L、2L	720˚*3
7	4(3 大 1 小)	2L、2L、2L、1L	720˚*3 180˚*1
8	4	2L、2L、2L、2L	720˚*4

經過觀察，我們發現當莫比烏斯環分割成不同等分時會有不同的形變產生，將長為 L 的莫比烏斯環分割為偶數等分時，會形成 $\frac{n}{2}$ 個旋轉 720˚且長度為 2L 的

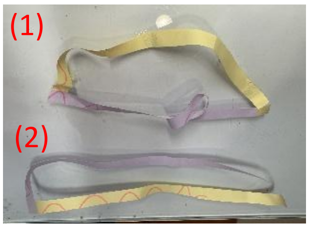
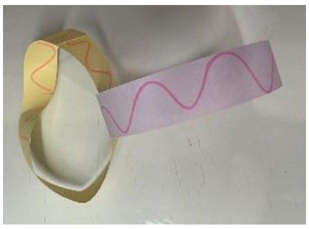
普通環；分割為奇數等分時，會形成$\frac{n-1}{2}$+1 個環，其中會有 $\frac{n-1}{2}$ 個旋轉 720°且長度為 2L 的普通環，再加上一個長度為 L 且旋轉 180°的莫比烏斯環。等分剪開時最外 2 側的等分會互相連接形成一個環，再依序往內倆倆成對形成環，若為奇數等分，因最中間的等分沒有可以成對的等分，因此不會產生形變。

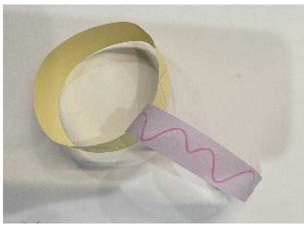
三、 連接莫比烏斯環與普通紙環不同個數及排列方式的形變探討。

定義「○」為旋轉 180°莫比烏斯環，「X」為未旋轉的普通環，第一個環使用黃色，第二個環使用紫色，將兩個紙環垂直黏貼後 2 等分剪開，將剪開的環在桌上展平，從第一個紙環連接處開始紀錄

，紙環正面朝上紀錄為「A」，反面朝上紀錄為「a」，紙環自身連接處為「＊」，兩紙環接點處若黃色在上紫色在下則紀錄為「Yp」，最後歸納紙環連接方式，及旋轉度數。

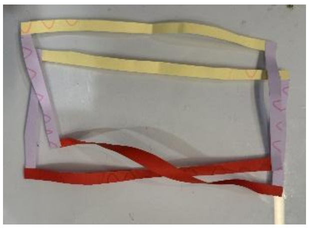
1. 連接 2 個環

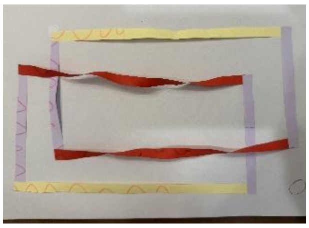
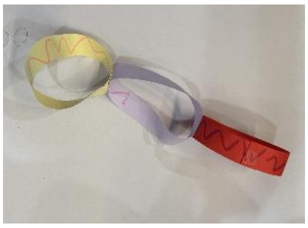
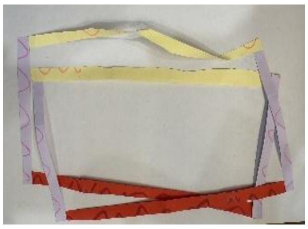
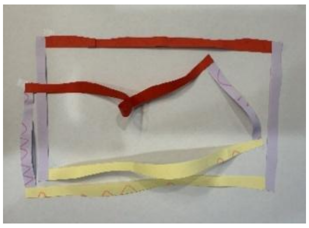
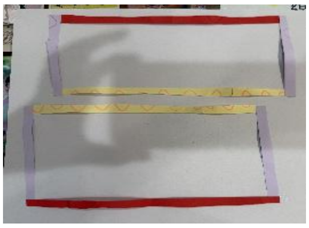
連接方式	原型	形變
○○		
	(1)aYpa＊APyA (2)aYpa＊ApyA 當兩個莫比烏斯環垂直連接等分剪開，會形變成 2 分開的環，環(1)旋轉了 720°，環(2)沒有旋轉	
○X		

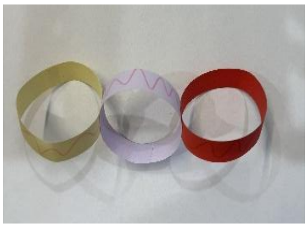
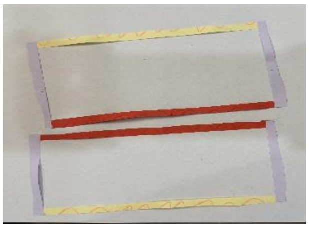
<table>
<tr><td></td><td colspan="2">aYpAYpa＊ApyaPyA
當一個莫比烏斯環和一個普通環連接等分剪開時，會形變成一個四邊形，其中三個邊為正面，一個邊為反面。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ＸＸ</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">aYpAYpa＊aYpAYpa
兩個普通環連接等分剪開時，會形變成一個四邊形，其中相對應兩個邊為正面，另兩個邊為反面。</td></tr>
</table>

2. 連接 3 個環

定義「○」為旋轉 180°莫比烏斯環，「Ｘ」為未旋轉的普通環，第一個環使用黃色，第二個環使用紫色，第三個環使用紅色，將紙環兩兩垂直黏貼後 2 等分剪開，剪開的環在桌上履平，從第一個紙環連接處開始紀錄，紙環正面朝上紀錄為「A」，反面朝上紀錄為「a」，紙環自身連接處為「＊」，兩紙環接點處若黃色在上紫色在下則紀錄為「Yp」，最後歸納紙環連接方式，及旋轉度數。

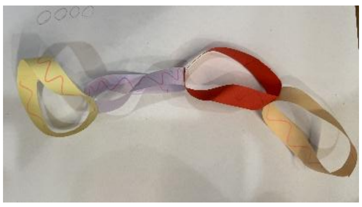
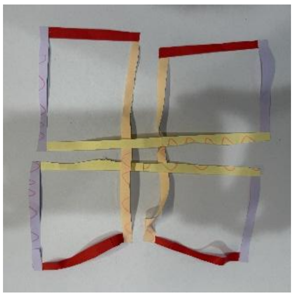
<table>
<tr><td>連接方式</td><td>原型</td><td>形變</td></tr>
<tr><td rowspan="2">○○○</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">aPyaRpa＊APrA＊aPya＊AYpAPrA＊aRpa＊AYpA
三個莫比烏斯環連接等分剪開，形變成一個旋轉 360°的大環，將其履平在桌上，可拼出兩個交疊的四邊形。</td></tr>
</table>

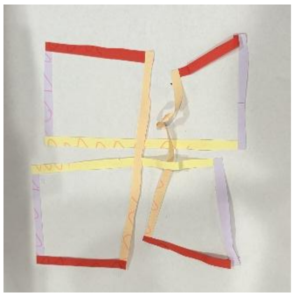
<table>
<tr><td rowspan="2">○Ｘ○</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">aPya＊aPra＊ARpAYpA
aPya＊aPra＊ARpAYpA
莫比烏斯環與普通環以○Ｘ○連接等分剪開，形變成二個旋轉360°的環，將其履平在桌上，可拼出兩個相扣的四邊形。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">○○Ｘ</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">aPyAPrAPrAPya＊AYpAPrA＊APrAYpA
莫比烏斯環與普通環以○○Ｘ連接等分剪開，形變成一個旋轉360°的環，將其履平在桌上，可拼出兩個交疊的四邊形。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">○ＸＸ</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">aPraPrA＊APraPya＊AYpARpaRpAYpA
莫比烏斯環與普通環以○ＸＸ連接等分剪開，形變成一個旋轉360°的環，將其履平在桌上，可拼出兩個交疊的四邊形。</td></tr>
<tr><td>Ｘ○Ｘ</td><td></td><td></td></tr>
</table>

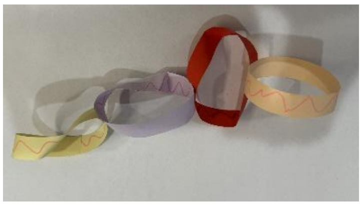
<table>
<tr><td></td><td colspan="2">APya＊APrA＊APrA＊aPyA
APyaRpaRpaPyA
莫比烏斯環與普通環以Ｘ〇Ｘ連接等分剪開，形變成 2 個分開且無旋轉的環。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ＸＸＸ</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">APyaPrA＊APraPyA
APya＊aPrA＊APra＊aPyA
莫比烏斯環與普通環以ＸＸＸ連接等分剪開，形變成 2 個分開且無旋轉的環。</td></tr>
</table>

3. 連接 4 個環

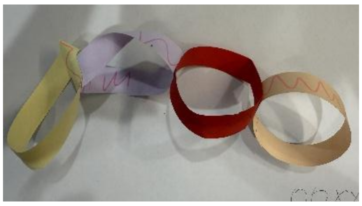
定義「〇」為旋轉 180°莫比烏斯環，「Ｘ」為未旋轉的普通環，第一個環使用黃色，第二個環使用紫色，第三個環使用紅色，第四個環使用橘色，將紙環兩兩垂直黏貼後 2 等分剪開，剪開的環在桌上履平，從第一個紙環連接處開始紀錄，紙環正面朝上紀錄為「A」，反面朝上紀錄為「a」，紙環自身連接處為「＊」，兩紙環接點處若黃色在上紫色在下則紀錄為「Yp」，最後歸納紙環連接方式，及旋轉度數。

<table>
<tr><th>連接方式</th><th>原型</th><th>形變</th></tr>
<tr><td rowspan="2">〇〇〇〇</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">aPyAPraRoa＊AOra＊aPra＊APya＊AYpaPra＊AOA＊aRoaPraYpA</td></tr>
</table>

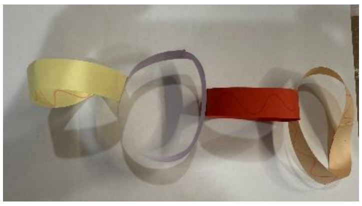
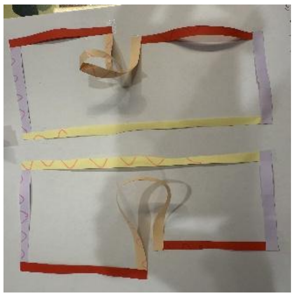
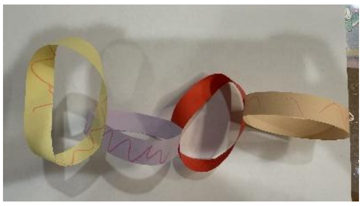
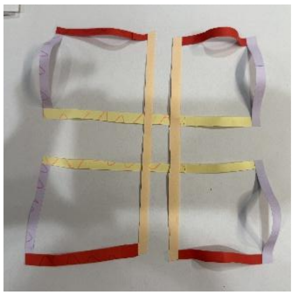
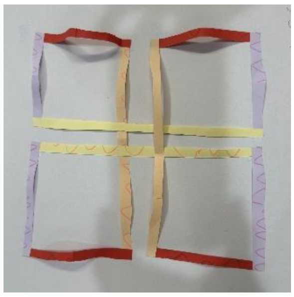
<table>
<tr><td></td><td colspan="2">莫比烏斯環與普通環以〇〇〇〇連接等分剪開，形變成一個旋轉 360°的環，將其履平在桌上，可拼出 4 個交疊的四邊形。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">〇X〇〇</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">aPya＊aPra＊A0ra＊ARA＊aPraPya＊AYpARpARoA＊apra＊ARpAYpA

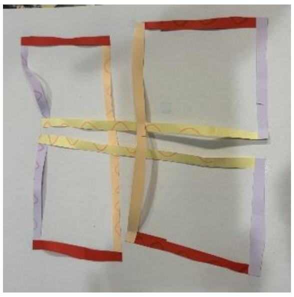
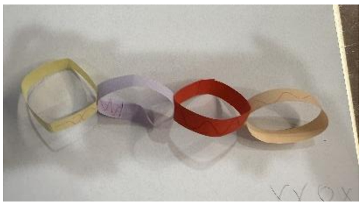
莫比烏斯環與普通環以〇X〇〇連接等分剪開，形變成一個旋轉 360°的環，將其履平在桌上，可拼出 4 個交疊的四邊形。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">〇〇〇X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">(1)aPyA＊aRpA＊a0ra＊a0ra＊ARpaYpA

(2)aPyAPra0ra＊a0raPrA＊aYpA

莫比烏斯環與普通環以〇〇〇X連接等分剪開，形變成 2 個分開的環，其中一個環旋轉 360°而另一個環無旋轉的。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">〇〇XX</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">(1)aPyA＊aPrA＊A0ra＊a0rA＊APraYpA

(2)aPyA＊aPrA0a＊a0rAPraYpA(540)</td></tr>
</table>

	莫比烏斯環與普通環以〇〇ＸＸ連接等分剪開，形變成 2 個分開的環，其中一個環旋轉 360°而另一個環無旋轉的。	
〇ＸＸ〇		
	(1)aPya＊aPrAOra＊ARoa＊aRpAYpA (2)aPya＊aPrA＊AOra＊ARoaRpAYpA 莫比烏斯環與普通環以〇ＸＸ〇連接等分剪開，形變成 2 個分開的環，其中一個環旋轉 360°而另一個環無旋轉的。	
〇Ｘ〇Ｘ		
	aPyaPraOra＊aOraPra＊aPya＊AYpARpA＊aOa＊aOra＊ARpA＊AYpA 莫比烏斯環與普通環以〇Ｘ〇Ｘ連接等分剪開，形變成一個沒有旋轉的環，將其履平在桌上，可拼出 4 個交疊的四邊形。	
Ｘ〇〇Ｘ		
	aYpa＊APrAOra＊aOrAPrAPyA＊APyAPrA＊aRA＊ARoa＊APrA＊aYpa	

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">莫比烏斯環與普通環以Ｘ○○Ｘ連接等分剪開，形變成一個沒有旋轉的環，將其履平在桌上，可拼出 4 個交疊的四邊形。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">○ＸＸＸ</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">aPya＊aPrA＊A0ra＊a0rA＊APraPya＊AYpA＊ARpaRoA＊ARoaRpAYpA
莫比烏斯環與普通環以○ＸＸＸ連接等分剪開，形變成一個沒有旋轉的環，將其履平在桌上，可拼出 4 個交疊的四邊形。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ｘ○ＸＸ</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">aYpa＊APrA0a＊a0rAPrAPyA＊APyAPrA＊A0ra＊a0rA＊APrA＊aYpa
莫比烏斯環與普通環以Ｘ○ＸＸ連接等分剪開，形變成一個沒有旋轉的環，將其履平在桌上，可拼出 4 個交疊的四邊形。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ＸＸＸＸ</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">APya＊aPrA0ra＊a0rAPraPyA＊APyaPrA＊A0ra＊a0rA＊APra＊aPyA</td></tr>
</table>

	四個普通環以ＸＸＸＸ連接等分剪開，形變成一個沒有旋轉的環，將其履平在桌上，可拼出 4 個交疊的四邊形。

經過觀察，我們發現兩個環連接時，若形成一個大環，則可以履平成一個四邊幾乎等長的正方形。三個環連接時若形變成一個環，則履平後可形成兩個交疊的長方形，若為分開的兩個環，則兩個環皆為長方形。連接四個環時，若形變為一大環，履平後會形成四個交疊的四邊形，若分開為兩個環，則兩個環皆為「凹」字形。

我們對於有些排列等分剪開後會形成分開的兩個環感到好奇，一開始我們想藉由接點與正反面的排列來尋找規律性，但過程中並沒有發現。再次觀察形變後的紙條，我們試著將紙環恢復原本的排列，試圖找出其中的規律性。首先將分開的兩環其中一個做上記號，再把紙環還原成未剪開的樣子，找出兩環各自的路徑。在 2 環的接點處連接方式若為我們定義他為「相對」，若為我們定義為「相鄰」。則等分剪開後形變成 2 個環的組合如下：

1. ◯(相對)◯
2. ◯(相對)Ｘ(相對)◯
3. Ｘ(相鄰)◯(相對)Ｘ
4. Ｘ(相鄰)Ｘ(相鄰)Ｘ
5. ◯(相對)◯(相鄰)◯(相對)Ｘ
6. ◯(相對)◯(相鄰)Ｘ(相鄰)Ｘ
7. ◯(相對)Ｘ(相對)Ｘ(相對)◯

在這些組合的規律中，我們推論，若要讓排列的紙環等分剪開後形成兩個環，則接點連接方式要順著指環旋轉與否，例如：三個環(Ｘ◯Ｘ)的情況下，第一個環是普通環(無旋轉)則第一個接點為相鄰點，第二個環為莫比烏斯環(有旋轉)，則第二個接點為相對點。四個環(◯◯ＸＸ)的情況下，第一個環為莫比烏斯環(有旋轉)則第一個接點為相對點，第二個環為莫比烏斯環(有旋轉) ，則第二個接點為相鄰點。第三個環是普通環(無旋轉)則第三個接點為相鄰點。

伍、結論與建議

一、 旋轉 180°、360°、540°、720°、900°和莫比烏斯環的形變探討。

1. 旋轉 180°的奇數倍紙環會形成一個環，旋轉 180°的偶數倍的紙環會形成兩個環。
2. 形成一個環，它的長度會是原本的環的 2 倍，形成 2 個環則 2 個長度都會是和原本的一樣長。
3. 旋轉 180°、360°、540°、720°、900°莫比烏斯環焦點數量分別是 0、2、3、4、5。由此可知，當角度多旋轉 180°時，分割後的紙環就會多一個交點。

二、 莫比烏斯環分割不同等分的形變探討。

1. 長為 L 的莫比烏斯環分割為偶數等分時，會形成 $\frac{n}{2}$ 個旋轉 720°且長度為 2L 的普通環
2. 分割為奇數等分時，會形成$\frac{n-1}{2}$+1 個環，其中會有 $\frac{n-1}{2}$ 個旋轉 720°且長度為 2L 的普通環，再加上一個長度為 L 且旋轉 180°的莫比烏斯環。
3. 等分剪開時最外 2 側的等分會互相連接形成一個環，再依序往內倆倆成對形成環。
4. 若為奇數等分，因最中間的等分沒有可以成對的等分，因此不會產生形變。

三、 連接莫比烏斯環與普通紙環不同個數及排列方式的形變探討。

1. 兩個環連接時，若形成一個大環，則可以履平成一個四邊幾乎等長的正方形。
2. 三個環連接時若形變成一個環，則履平後可形成兩個交疊的長方形。
3. 若為分開的兩個環，則兩個環皆為為旋轉的長方形。
4. 連接四個環時，若形變為一大環，履平後會形成四個交疊的四邊形。
5. 若分開為兩個環，則兩個環皆為「凹」字形。
6. 連接數個環時，則接點連接方式要順著指環旋轉與否相對或相鄰連接，即可形成分開的兩環。

陸、參考文獻

安娜・克雷邦（2022）。STEM 91 個神奇的數學酷魔術(聞翊均譯)。和平國際。

波伊特許帕赫博士、馬庫斯・華格納合著（2009)。如何穿過一張明信片：德國小學生愛上數學的祕密(姬健梅譯)。究竟出版社。

蕾貝卡・瑞波波特/ J. A. 優德著（2017)。歡迎來到小朋友的數學實驗室: 9 大原理 37 個實驗，一生受用的數學原理（魏嘉儀譯)。小麥田出版社。