

國立竹科實中國小部 114 學年度校內科展 作品說明書

科 別:數學科

組 別:國小組

作品名稱:「騎」幻之旅-騎士巡遊變形

關 鍵 詞: 封閉路線、棋盤遊戲

編號:115PB-M001

摘要

在尋找能把六邊形棋盤填滿的路線時，由於最外圍的點能走到的地方較少，因此可以先運用邊和角落來分類出迴圈，再適當加入點來擴大，最後，以特定的接法來連接，組成出一組可行的路線。而我們認為一個棋盤可能不只一種走法，以上步驟應該也能使用在其他不同棋盤上。在過程中，還可以利用圖像化和座標化來輔助操作，判斷一個路線的後續走法

壹、前言

一、研究動機：

我們看了電視節目在介紹關於騎士巡遊的內容，感到很有興趣，接著查騎士巡遊的資料時，發現幾乎所有人做的騎士巡遊，都是方形的，沒有其他形狀，棋子走的方法也都是「西洋棋中的騎士」的走法，於是開始嘗試改變棋盤和走法的形狀。

二、研究目的

(一)找出六邊形棋盤各點能走到的點且能走完整個圖形

(二)找出六邊形棋盤的封閉迴圈

(三)找出六邊形棋盤的封閉迴圈的規律

三、名詞解釋

1.封閉迴圈：由幾個點連成的路線，且從任何點當起點都可以走完整個路線。

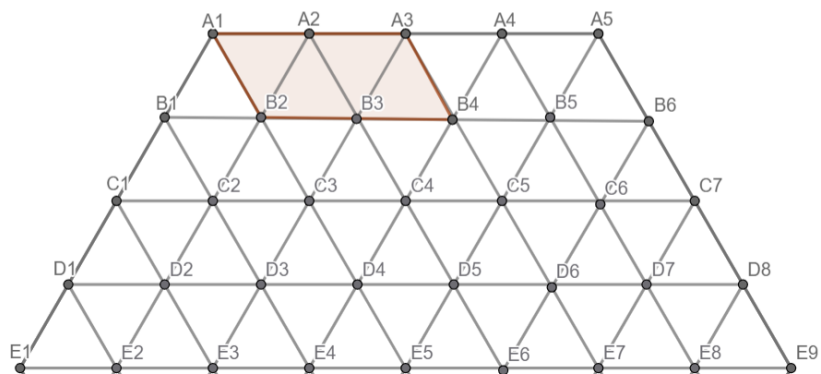
貳、研究設備及器材

六角形棋盤、棋子、平板、GGB

參、研究過程或方法

一、研究方法: 我們先試著找出能把棋盤走完的方法，再比較不同的路線來找出規律。

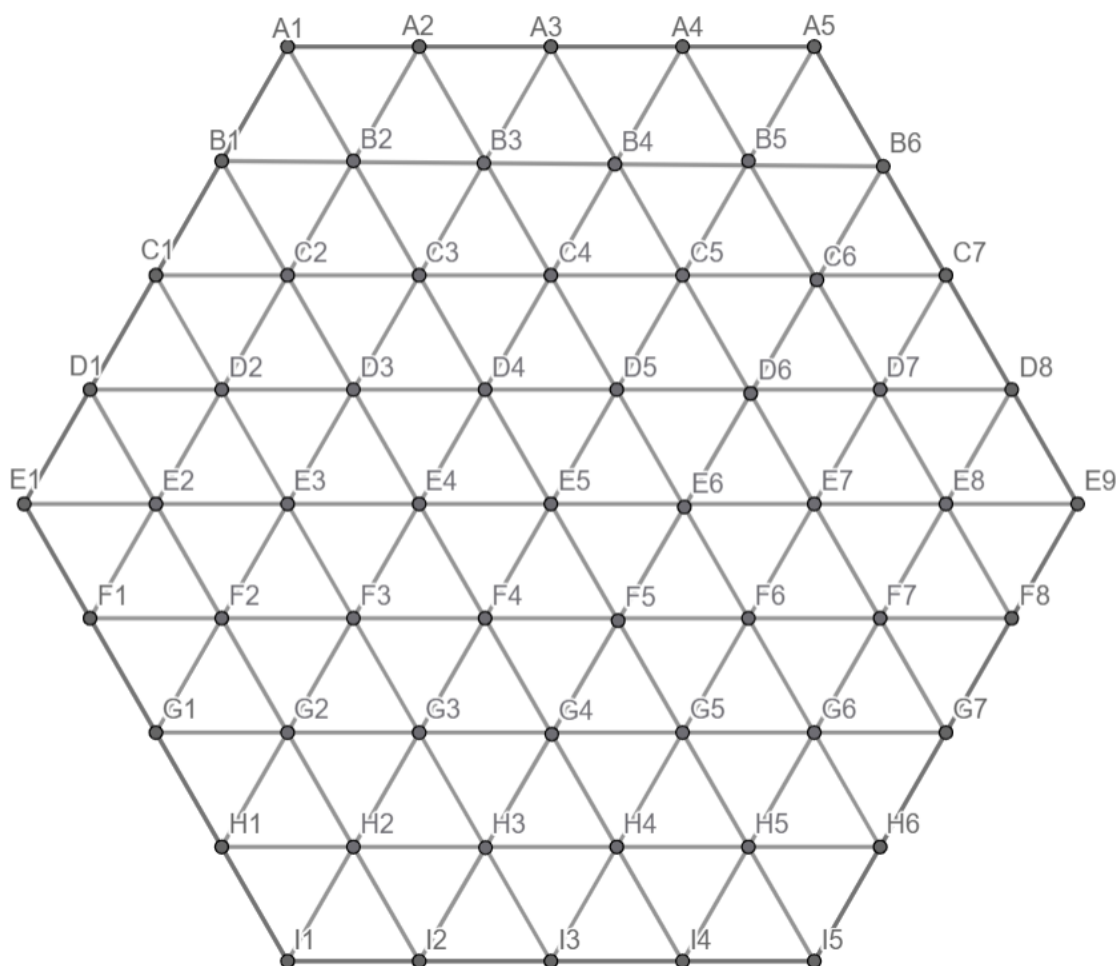
二、移動的規則:從一個點開始，走一個平行四邊形的路徑:從平行四邊形的頂點走到對角的頂點。棋子只能在線交叉的點之間移動，且已走過的點不能再走。例:A1 走到 B4(如圖)



三、研究過程:

(一)找出六邊形棋盤各點能走到的點且能走完整個圖形

用跳棋的六角形棋盤後，為了方便研究，在棋盤上標示了編號，從頂部那一排到最後一排依序為:A、B、C……到I，且從左到右為1、2、3……。如圖。



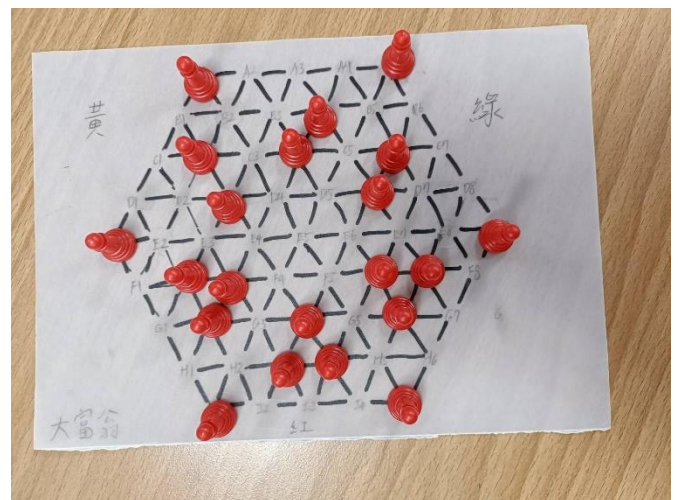
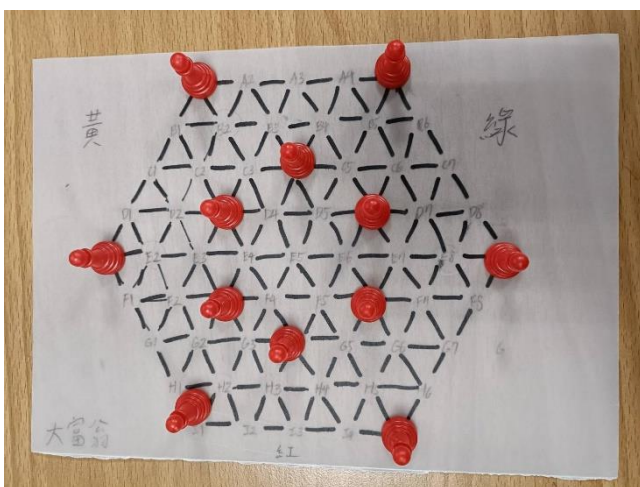
每一個點能走到的地方列出來並做成表格

起點	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A1	X	B4	C4	D2 D3	X	X	X	X	X
A2	X	B5	C1 C5	D3 D4	X	X	X	X	X
A3	X	B1 B6	C2 C6	D4 D5	X	X	X	X	X
A4	X	B2	C3 C7	D5 D6	X	X	X	X	X
A5	X	B3	C4	D6 D7	X	X	X	X	X
B1	A3	X	C4	D4	E2 E3	X	X	X	X
B2	A4	X	C5	D1 D5	E3 E4	X	X	X	X
B3	A5	X	C1 C6	D2 D6	E4 E5	X	X	X	X
B4	A1	X	C2 C7	D3 D7	E5 E6	X	X	X	X
B5	A2	X	C3	D4 D8	E6 E7	X	X	X	X
B6	A3	X	C4	D5	E7 E8	X	X	X	X
C1	A2	B3	X	D4	E4	F1 F2	X	X	X
C2	A3	B4	X	D5	E1 E5	F2 F3	X	X	X
C3	A4	B5	X	D1 D6	E2 E6	F3 F4	X	X	X
C4	A1 A5	B1 B6	X	D2 D7	E3 E7	F4 F5	X	X	X
C5	A2	B2	X	D3 D8	E4 E8	F5 F6	X	X	X
C6	A3	B3	X	D4	E5 E9	F6 F7	X	X	X
C7	A4	B4	X	D5	E6	F7 F8	X	X	X
D1	X	B2	C3	X	E4	F3	G1	X	X
D2	A1	B3	C4	X	E5	F4	G1 G2	X	X
D3	A1 A2	B4	C5	X	E1 E6	F1 F5	G2 G3	X	X
D4	A2 A3	B1 B5	C1 C6	X	E2 E7	F2 F6	G3 G4	X	X
D5	A3 A4	B2 B6	C2 C7	X	E3 E8	F3 F7	G4 G5	X	X

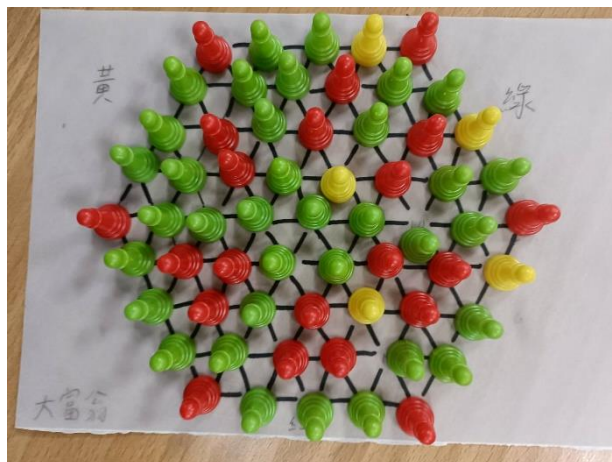
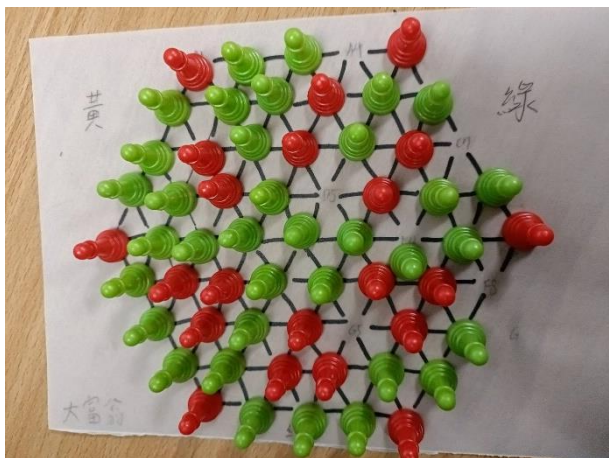
D6	A4 A5	B3	C3	X	E4 E9	F4 F8	G5 G6	X	X
D7	A5	B4	C4	X	E5	F5	G6 G7	X	X
D8	X	B5	C5	X	E6	F6	G7	X	X
E1	X	X	C2	D3	X	F3	G2	X	X
E2	X	B1	C3	D4	X	F4	G3	H1	X
E3	X	B1 B2	C4	D5	X	F5	G4	H1 H2	X
E4	X	B2 B3	C1 C5	D1 D6	X	F1 F6	G1 G5	H2 H3	X
E5	X	B3 B4	C2 C6	D2 D7	X	F2 F7	G2 G6	H3 H4	X
E6	X	B4 B5	C3 C7	D3 D8	X	F3 F8	G3 G7	H4 H5	X
E7	X	B6 B5	C4	D4	X	F4	G4	H5 H6	X
E8	X	B6	C5	D5	X	F5	G5	H6	X
E9	X	X	C6	D6	X	F6	G6	X	X
F1	X	X	C1	D3	E4	X	G3	H2	X
F2	X	X	C1 C2	D4	E5	X	G4	H3	I1
F3	X	X	C2 C3	D1 D5	E1 E6	X	G5	H4	I1 I2
F4	X	X	C3 C4	D2 D6	E2 E7	X	G1 G6	H1 H5	I2 I3
F5	X	X	C4 C5	D3 D7	E3 E8	X	G2 G7	H2 H6	I3 I4
F6	X	X	C5 C6	D4 D8	E4 E9	X	G3	H3	I4 I5
F7	X	X	C6 C7	D5	E5	X	G4	H4	I5
F8	X	X	C7	D6	E6	X	G5	H5	X
G1	X	X	X	D1 D2	E4	F4	X	H3	I2
G2	X	X	X	D2 D3	E1 E5	F5	X	H4	I3
G3	X	X	X	D3 D4	E2 E6	F1 F6	X	H5	I4
G4	X	X	X	D4 D5	E3 E7	F2 F7	X	H1 H6	I1 I5
G5	X	X	X	D5 D6	E4 E8	F3 F8	X	H2	I2

G6	X	X	X	D6 D7	E5 E9	F4	X	H3	I3
G7	X	X	X	D7 D8	E6	F5	X	H4	I4
H1	X	X	X	X	E2 E3	F4	G4	X	I3
H2	X	X	X	X	E3 E4	F1 F5	G5	X	I4
H3	X	X	X	X	E4 E5	F2 F6	G1 G6	X	I5
H4	X	X	X	X	E5 E6	F3 F7	G2 G7	X	I1
H5	X	X	X	X	E6 E7	F4 F8	G3	X	I2
H6	X	X	X	X	E7 E8	F5	G4	X	I3
I1	X	X	X	X	X	F2 F3	G4	H4	X
I2	X	X	X	X	X	F3 F4	G1 G5	H5	X
I3	X	X	X	X	X	F4 F5	G2 G6	H1 H6	X
I4	X	X	X	X	X	F5 F6	G3 G7	H2	X
I5	X	X	X	X	X	F6	G4	H3	X

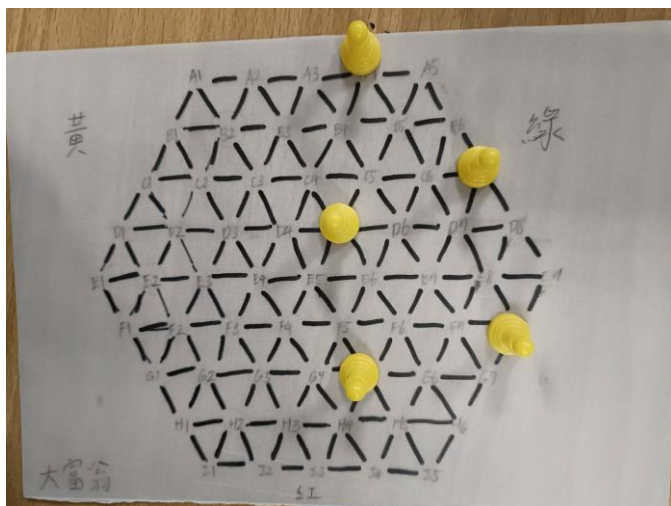
開始試著做出能把 A1~I5 的點全部走完的走法。從角落開始因為角落的點能走到其他點的最少，也就是 (A1、E1、I1、I5、E9、A5) 這六個先串起，得到 A1→D3→E1→F3→I1→G4→I5→F6→E9→D6→A5→C4(如下左圖)，再從這條路線繼續延伸能走的路線(如下右圖)。



最後把剩下的路線連起(如下左圖)，發現有 5 個點沒有辦法走到，但發現這 5 個點可以形成封閉迴路，也就是可以從原始路線加上這 5 個點的路線即可(如下右圖)。



最後路線得到： $A1 \rightarrow B4 \rightarrow D3 \rightarrow G2 \rightarrow E1 \rightarrow C2 \rightarrow (D5 \rightarrow A4 \rightarrow C7 \rightarrow F8 \rightarrow G5) \rightarrow F3 \rightarrow H4 \rightarrow I1 \rightarrow F2 \rightarrow G4 \rightarrow F7 \rightarrow I5 \rightarrow H3 \rightarrow F6 \rightarrow C6 \rightarrow E9 \rightarrow G6 \rightarrow D6 \rightarrow A5 \rightarrow C4 \rightarrow B1 \rightarrow E3 \rightarrow H1 \rightarrow I3 \rightarrow H6 \rightarrow E8 \rightarrow B6 \rightarrow A3 \rightarrow D4 \rightarrow C1 \rightarrow F1 \rightarrow E4 \rightarrow H2 \rightarrow F5 \rightarrow I4 \rightarrow G7 \rightarrow E6 \rightarrow D7 \rightarrow E6 \rightarrow D8 \rightarrow B5 \rightarrow A2 \rightarrow C5 \rightarrow B2 \rightarrow D1 \rightarrow C3 \rightarrow E2 \rightarrow G3 \rightarrow H5 \rightarrow E7 \rightarrow F4 \rightarrow I2 \rightarrow G1 \rightarrow D2 \rightarrow B3 \rightarrow E5 \rightarrow D7$ (無封閉)



根據這五個點所形成的封閉迴圈，我們可以先找出封閉迴圈路線，再組合出大的封閉迴圈，把棋盤填滿。

(二)找出六邊形棋盤的封閉迴圈

為了找出規律，將棋盤先縮小一圈（B2~H5），並整理出迴圈。依照角落與邊，總共有三條路線，分別是：紅、黃、綠。

紅(無封閉)： $C4 \rightarrow D2 \rightarrow G2 \rightarrow D3 \rightarrow B4 \rightarrow D7 \rightarrow G6 \rightarrow D6 \rightarrow B3 \rightarrow C6 \rightarrow F7 \rightarrow G4 \rightarrow F2 \rightarrow C2 \rightarrow F3 \rightarrow H4 \rightarrow E5 \rightarrow H3 \rightarrow F6$

黃(有封閉) : E4→H2→G5→E8→D5→B2→E3→F5→C5

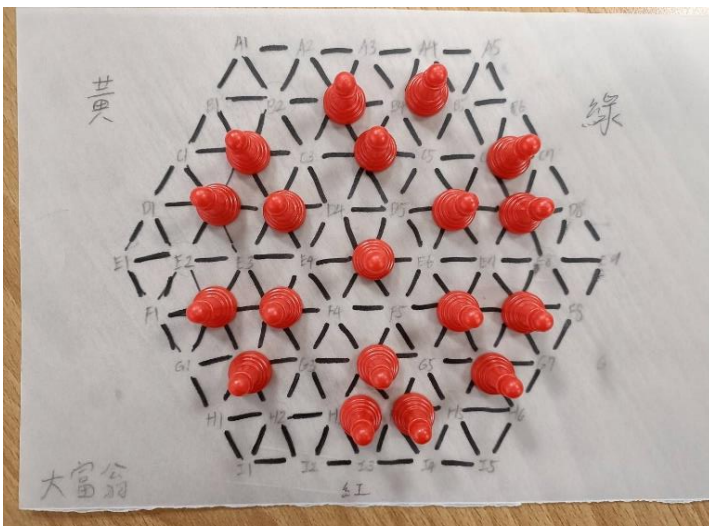
綠(無封閉) : F4→H5→E7→B5→C3→E6→G3→E2→D4

由於以上的路線順序是可以反過來的，因此我們就透過改變順序，直接把三條路線接起來

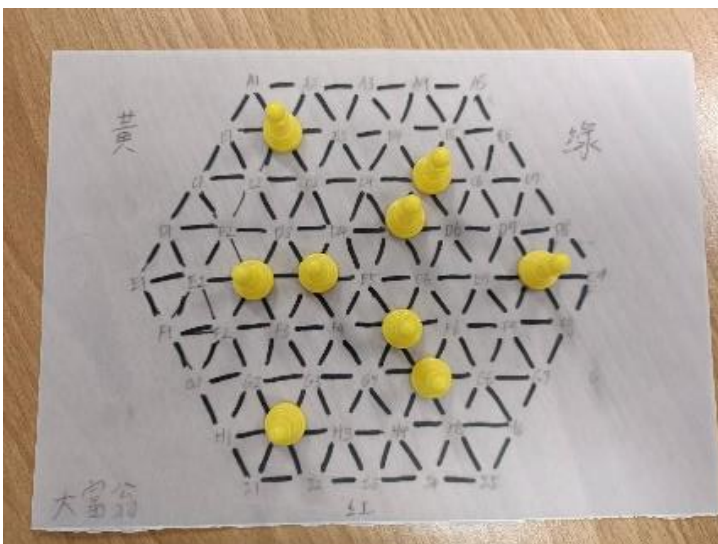
黃 (C5→F5→E3→B2→D5→E8→G5→H2→E4)→紅 (F6→H3→E5→H4→F3→C2→F2→G4→F7→C6→B3→D6→G6→D7→B4→D3→G2→C4)→綠 (F4→H5→E7→B5→C3→E6→G3→E2→D4)無封閉

不過，希望可以做出封閉的路徑，因此我們重新將紅、綠的路線走一次，做成封閉迴圈。

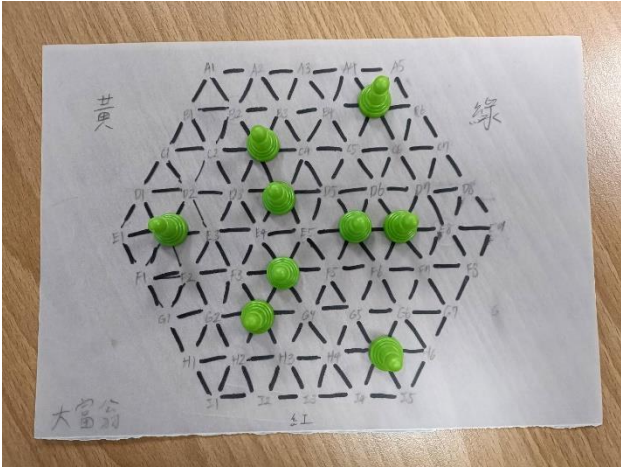
紅(有封閉) : H3→F2→G4→F7→H4→F3→C2→B4→D3→G2→D2→C4→D7→G6→D6→B3→E5→C6→F6



黃(有封閉) : E4→H2→G5→E8→D5→B2→E3→F5→C5



綠(有封閉) : E6、B5、C3、E2、F4、H5、E7、D4、G3



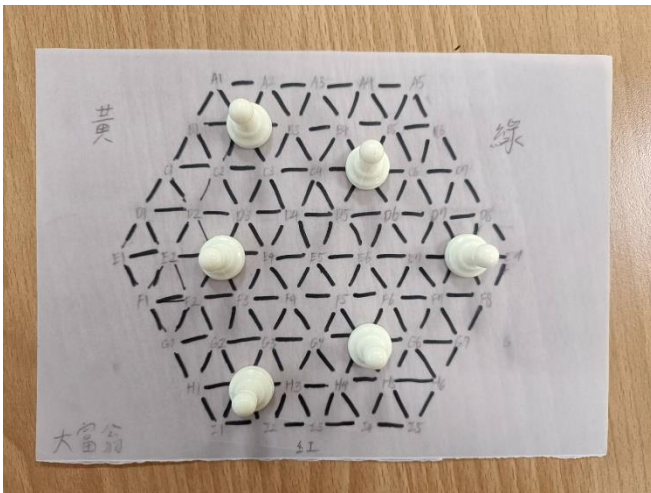
在接的時候，發現不能用上面的方法，因此試著用在迴圈中的兩個點之間，插入另一個迴圈的方法來接。研究出的路徑是：

D4→C6→E5→B3→D6→G6→D7→F5→C5→E4→H2→G5→E8→D5→B2→E3→C4→D2→G2→
 D3→B4→C2→F3→H4→F7→G4→F2→H3→F6→G3→E6→B5→C3→E2→F4→H5→E7

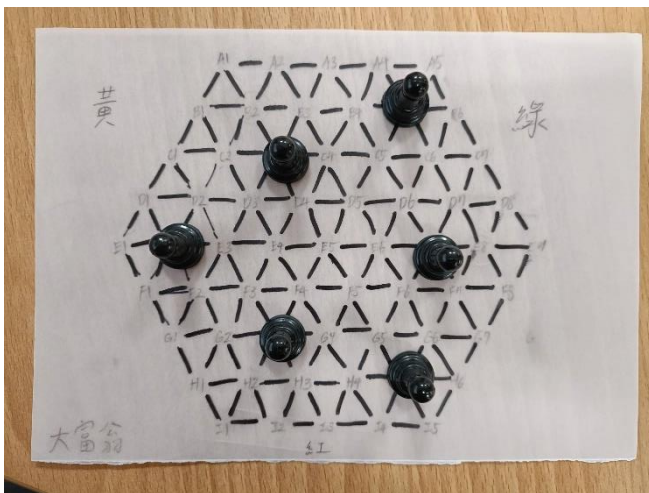
(從任何一點開始都封閉)

再來，把棋盤放大為原始大小，同樣依照邊角，整理出迴圈，把剩下的空格拆成兩個迴圈，最後總共有四個迴圈，分別是：白、黑、黃、紅，且全部都是封閉迴圈。

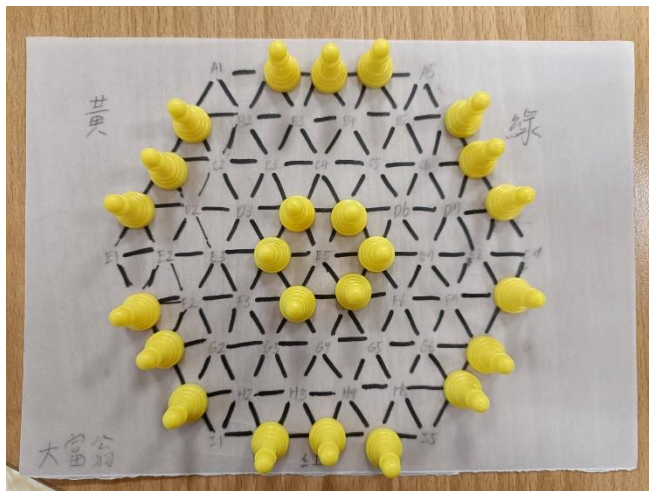
白: B2→E3→H2→G5→E8→C5



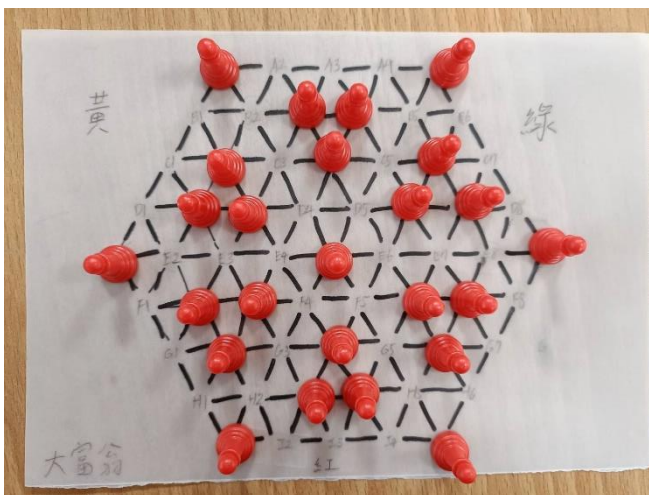
黑:C3→E2→G3→H5→E7→B5



黃:A2→D4→B1→A3→B6→D5→A4→C7→F8→E6→D8→G7→I4→F5→H6→I3→H1→F4→I2
→G1→D1→E4→F1→C1



紅:A1→B4→D3→G2→E1→C2→F3→H4→I1→F2→G4→F7→I5→H3→F6→C6→E9→G6→D6
→B3→A5→D7→E5→D2→C4



先試著把黃色(邊)跟黑、白(中間)合併，因為發現黑白都無法連到紅色，所以透過黃色來連接，組成了：

D1→B2→C5→E4→F1→C1→A2→D4→B1→A3→B6→E8→G5→D5→A4→C7→F8→H5→E7→
B5→C3→E2→G3→E6→D8→G7→I4→H2→E3→F5→H6→I3→H1→F4→I2→G1

最後再與紅色連接，用先前插入迴圈的方法，得出路徑：

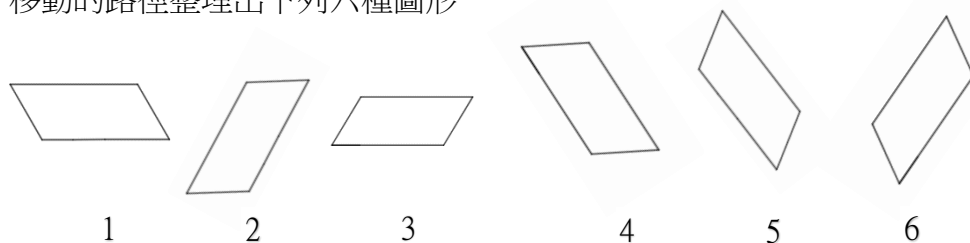
D1→B2→C5→E4→F1→C1→A2→D4→B1→A3→B6→E8→G5→D5→A4→C7→F8→H5→E7→
B5→C3→E2→G3→D3→G2→E1→C2→F3→H4→I1→F2→G4→F7→I5→H3→F6→C6→E9→G6
→D6→B3→A5→D7→E5→D2→C4→A1→B4→E6→D8→G7→I4→H2→E3→F5→H6→I3→H1
→F4→I2→G1(有封閉)

接完後是封閉路線，代表從任何一點開始都能走完整個六邊形的棋盤。路線的產生，先分類出不同的迴圈路線，依照與角落的不同和剩餘其他點，路線規劃從角落跟邊做延伸。

(三)找出六邊形棋盤的封閉迴圈的規律

1.將移動的路徑圖像化，找出規律

移動的路徑整理出下列六種圖形



縮小棋盤：

D4→C6→E5→B3→D6→G6→D7→F5→C5→E4→H2→G5→E8→D5→B2→E3→C4→D2→G2→D3→
B4→C2→F3→H4→F7→G4→F2→H3→F6→G3→E6→B5→C3→E2→F4→H5→E7

換成平行四邊形(以下用代號表示)：

1→2→5→4→5→6→2→6→5→6→1→2→3→4→6→2→1→5→6→2→1→5→4→2→1→3→4
→2→1→2→6→2→1→3→4→6

原本大小：

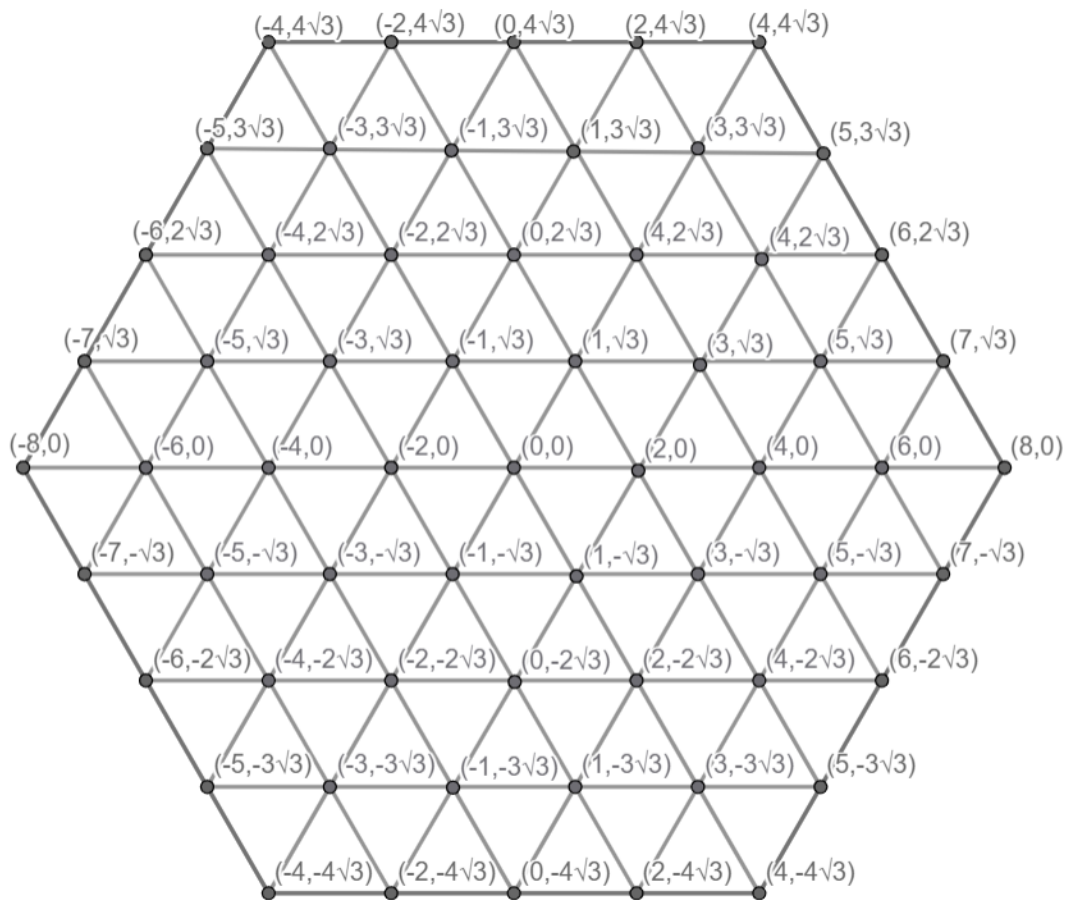
D1→B2→C5→E4→F1→C1→A2→D4→B1→A3→B6→E8→G5→D5→A4→C7→F8→H5
→E7→B5→C3→E2→G3→D3→G2→E1→C2→F3→H4→I1→F2→G4→F7→I5→H3→F6
→C6→E9→G6→D6→B3→A5→D7→E5→D2→C4→A1→B4→E6→D8→G7→I4→H2→E
3→F5→H6→I3→H1→F4→I2→G1

換成平行四邊形(以下用代號表示):

2→1→2→3→6→2→5→4→3→1→5→2→5→6→4→5→2→6→5→3→2→4→5→6→4→2→5→
 →4→3→5→1→2→6→1→2→6→4→2→5→4→3→5→3→1→3→4→1→5→3→6→2→1→5→
 1→4→2→1→2→6→4

根據小棋盤大棋盤移動路徑圖像化後，沒有特別明顯的規律。但可能有幾種路徑組合是比較常見的。

2.將棋盤座標化，觀察座標化後移動規律



括號內代表從點到點 X 軸 Y 軸移動: D4(5, $\sqrt{3}$) C6 代表 D4 的點移動到 C6，要往右走 5 單位

往上走 $\sqrt{3}$ 單位

縮小一圈:

D4(5, $\sqrt{3}$)C6(-4, $-2\sqrt{3}$)E5(-1, $3\sqrt{3}$)B3(4, $-2\sqrt{3}$)D6(1, $-3\sqrt{3}$)G6(1, $3\sqrt{3}$)D7(-4, $-2\sqrt{3}$)F5(1, $3\sqrt{3}$)C5(-4, $-2\sqrt{3}$)E4(-1, $-3\sqrt{3}$)H2(5, $\sqrt{3}$)G5(4, $2\sqrt{3}$)E8(-5, $\sqrt{3}$)D5(-4, $2\sqrt{3}$)B2(-1, $-3\sqrt{3}$)E3(4, $2\sqrt{3}$)C4(-5, $-\sqrt{3}$)D2(1, $-3\sqrt{3}$)G2(1, $3\sqrt{3}$)D3(4, $2\sqrt{3}$)B4(-5, $-\sqrt{3}$)C2(1, $-3\sqrt{3}$)F2(4, $-2\sqrt{3}$)H3(4, $2\sqrt{3}$)F6(-5, $-\sqrt{3}$)G3(2, $2\sqrt{3}$)E6(1, $3\sqrt{3}$)B5(-5, $-\sqrt{3}$)C3(-4, $-2\sqrt{3}$)E2(5, $-3\sqrt{3}$)F4(4, $-2\sqrt{3}$)H5(1, $3\sqrt{3}$)E7

X 軸總和:5

Y 軸總和: $-\sqrt{3}$

因為 E7 走回 D4 剛好是(-5, $\sqrt{3}$)，才會讓 X、Y 總和會是 0。

由於括號內的數值就是走平行四邊形移動的量，走完封閉路線後，X 軸 Y 軸總和要是 0，移動棋子時，可以觀察自己的位移量正數和負數能否平衡。來判斷要走哪種平行四邊形。

肆、研究結果

一、各點能走到的點，發現角落最少，越往中心越多。

二、在路線的設計中，可以先從角落或邊開始慢慢增加，當已完成封閉路線後，可適當加入點來擴充路線上的點。

三、在連接封閉路線時，連接方法有兩條路線直接相連，或是其中一條路線中找出兩點加入另一個路線的方式，如縮小一圈的狀況。

四、六邊形棋盤和縮小一圈都有能夠走完且封閉的路徑，因此從任何一點開始都能走完每個點。

五、在走的時候可以利用計算座標和路徑圖形，來輔助自己判斷要走哪種路線(平行四邊形)

伍、討論

一.同一個棋盤&走法，是否能找出不只一種的封閉迴圈走法?

二.將棋盤放大後，能否用一樣的策略找出封閉迴圈?

三.如果要把棋盤改成立體的，那迴圈的規則是否會不同?要怎麼做才能封閉呢?

四.如何利用路徑圖像化和座標找出另一種封閉迴圈?

陸、結論

在找棋盤的路徑時，發現運用座標和圖形可能有一定的規律，能輔助運用在其他棋盤。但不太明顯，推測是因為組合太多種，需要程式設計來完成。在封閉迴圈設計中，也可以考慮從中心向往外擴張。已經能找出封閉與沒有封閉的走法，希望有機會發現更多種路線，或是改良目前找出的兩種路線，讓走法更加簡單快速。

柒、參考資料

<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/29/pdf/29m/129.pdf>