新竹市第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國小組

作品名稱：數字拉花──翻轉花樣隨手變

關 鍵 詞：數字翻筋斗、數字轉轉彎、位移向量

編　　號：

摘要

本研究主要是利用 GeoGeBra 作圖，將一個 3 數或 4 數的數列，轉換成圖形，探究圖形的變化。研究成果有：

1. 數列的數字大小組合會影響形成圖形類別。3 數的數列，可由最大數是否＞、＝或＜較小兩數的和，來判斷圖形類型。4 數的數列，則由比較第 1、3 數的大小，以及比較第 2 和第 4 數的大小，來決定基本形偏移方向。
2. 以第一次數列所產生的圖形為模板物件，起點到終點的位移向量作變化值的基準，旋轉、平移便可產生下一循環的圖形。
3. 改變與下一循環間的旋轉角度，會影響圖形可否回到原點、回原點的循環次數，以及圖形重複花樣的離散或縮合程度。
4. 改變數列間旋轉角度後，找出回到原點的循環次數計算公式，並討論回不到原點的條件。

壹、 前言

一、 研究動機

在數學社團中，老師教我們玩了許多數學小遊戲，其中，令我印象深刻的遊戲是一個叫「數字旋轉畫」（又名：「數字翻筋斗」或「數字轉轉彎」數字）的遊戲。這是個讓一串數列轉換成圖形的遊戲，玩法是：先決定一組數列，並在紙上依序畫出數列中數字的長度，每畫完一個數字，就要逆時針旋轉 90 度在繼續畫下一數字長度的線段。如果將數列的數字都畫完，還沒有剛好回到最初的起始位置的話，則要再畫一次完整的數列。以畫完一次完整數列的規則，重複畫到剛好回到開始的地方就結束。不同的數列，就會形成不同的圖案。我們對這個遊戲充滿好奇：

1. 為什麼有些數列畫出來的圖形可以回到原來的起點，有些卻不行？是由數列的哪一個性質，來會決定圖形是否可以回到原點？
2. 改變數列中數字大小和順序，畫出來的圖形會有什麼變化？
3. 能否只要看到數字，就可以知道會形成怎樣的圖形？

4. 數列和圖形之間，隱含著哪些數學關係？

於是我們便決定要深入研究這個主題，希望能瞭解數列和圖形之間的關係，並找出背後潛藏的數學原理。

二、 文獻探討

我們透過科展群傑廳的歷屆優勝作品查詢，發現有 2 篇主題和「數字旋轉畫」有關的科展研究，整理比較研究內容見下頁表 1。

(表 1)數字旋轉畫相關研究內容比較表(自行製表)

全國中小學科展屆數（組別）	作品名稱	研究內容概述
61（國小組）	數字翻筋斗圖形花樣大解碼	1. 本作品研究了數列中數字個數不同時，何時會回到原點、數字順序顛倒時會形成線對稱圖形、對稱圖形的中心座標、兩次循環之間的位移向量…等等。 2. 針對 3 個數、且其中兩數相同的數列，找出最大數與最小數×2 之間的關係，會影響形成的圖形。但並沒有深入研究 3 個相異數字，會如何影響形成的圖形。 3. 針對 4 個數、5 個數的數列，只研究了形成的圖形是否會重疊、為何會重疊，並分析了以最小數為邊長所組成之長方形或正方形（基本形），對整體圖形的影響。並未深入探討整個數列所形成的基本單位圖形，對整體圖形的影響，以及會產生哪些不同類型的圖形。
63（國中組）	數字轉轉彎	1. 本作品的作者以 scratch 程式來輔助畫出圖形，並研究數列在多少次循環後會回到原點，進而推導出計算循環次數的公式。 2. 還研究了每個數字間旋轉角度不是 90 度所形成的圖形，證明推導出的計算循環次數公式，也可適用於旋轉角度不是 90 度。

綜合前人的研究，還有下面的問題沒有得到解答，需要我們自己來進行研究：

1. 3 個數的數列，不管數字是否相同，數字是如何決定圖形的基本樣式？而基本樣式又是如何影響到整體的圖形？
2. 4 個數（含）以上的數列，數字又是如何決定圖形的基本樣式？而基本樣式又是如何影響到整體的圖形？
3. 如果只改變一次循環和下一次循環之間的旋轉角度，但不改變數列內數字間的旋轉角度，圖形又會有什麼變化。

三、 研究目的

一、 瞭解改變數列排列順序，對圖形花樣會產生什麼影響。

二、 瞭解 3 個數的數列，形成圖形類型與基本圖樣，和數字組合之間的關係。

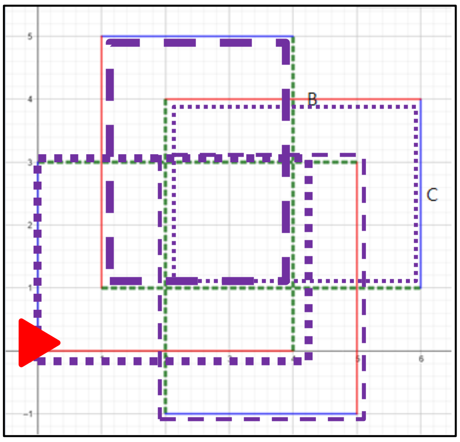
三、 瞭解 4 個數以上的數列，形成圖形類型與基本圖樣，和數字組合之間的關係。

四、 瞭解改變每次循環間的旋轉角度，對圖形會產生什麼影響。

五、 瞭解是由數列的哪些性質來決定圖形能否回到原點，及回到原點的循環次數。

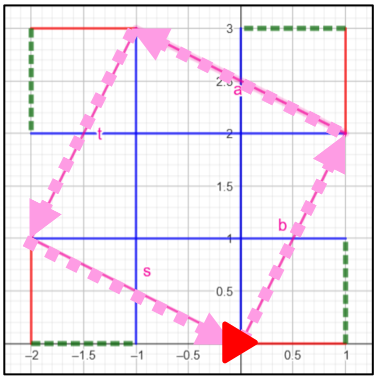
四、 名詞解釋

1. 基本形：以數列中的數字作為邊長的矩形。以 3 數的數列 NS.4-5-3 為例，畫出的圖形如圖 1 所示。紫色線所框起來的矩形，就是最小數 3 和倒數第二小的數 4 所畫的兩條線段圍出來的矩形，稱為基本形。幾次循環就會圍出幾個（或少 1 個）基本形。



(圖 1)基本形示意圖（自行製圖）

2. 封閉圖形：結束循環時剛好會回到原點、起點和終點重合，就稱為封閉圖形。如圖 1 畫 4 次循環結束時剛好接回起點（紅色箭頭處），所以可以形成封閉圖形。
3. 位移向量：是指一個循環的起點到第二循環的起點，起點位置的座標變化，就是位移向量。如圖 2 中的粉紅色虛線箭頭，就是每一次循環的位移向量。



(圖 2)位移向量示意圖（自行製圖）

貳、 研究設備及器材

白紙、方格紙、描圖紙、筆、直尺、電腦、Word、GeoGebra 網站。

參、研究過程與方法

我們一開始是使用白紙或方格紙，用尺、筆來畫圖，觀察不同數字和排列順序的圖形變化。後來利用 GeoGoBra 線上作圖工具的滑桿功能來設定數列，調整滑桿的數值、變化數字組合，方便觀察數字和所形成圖形之間的關係。

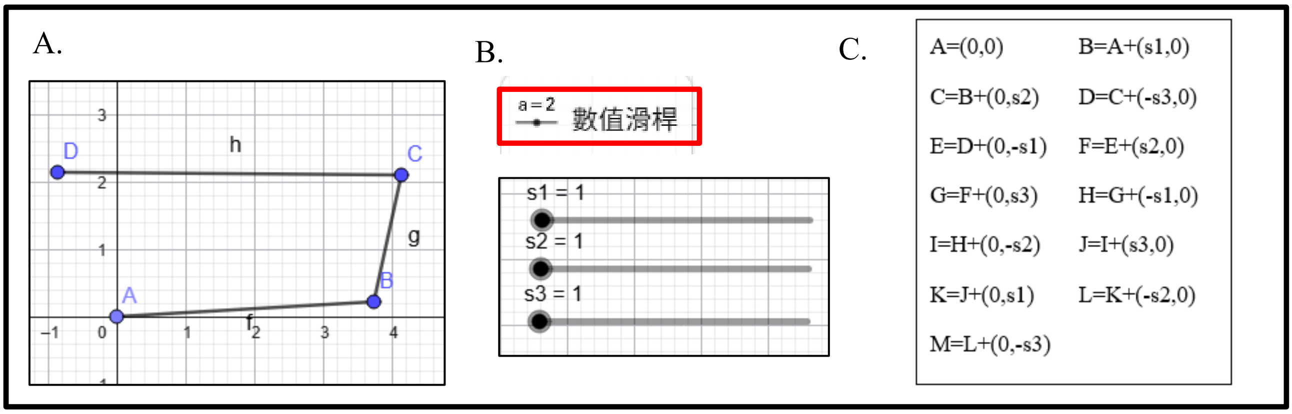
在研究變換循環間的旋轉角度時，則是先用兩張描圖紙各畫一次循環的圖形，疊合之後再旋轉描圖紙，觀察如何推算旋轉角度。再利用 GeoGoBra 線上作圖工具的程式功能，將第一次循環的圖形群組起來，進行旋轉、平移，畫出的 2～8 次循環的圖形。再用滑桿來設定每次循環間的旋轉角度，觀察變化旋轉角度、數字大小，圖形又會有什麼變化。

肆、研究結果與討論（所有圖表都是自製）

研究一：探討利用 GeoGeBra 輔助畫圖的方法

一、方法一：一次畫一個數

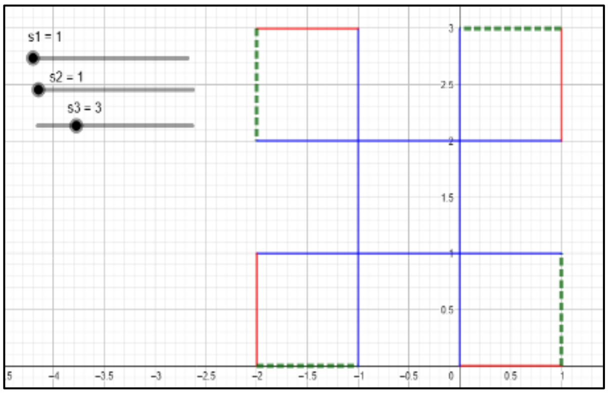
1. 先隨便畫幾條線段，幾個數的數列，就畫幾條線段（參見圖 3A）。



(圖 3)GeoGeBra 畫線段及建立數值拉桿方法（自行製圖）

2. 建立整數的數值滑桿，幾個數的數列，就建幾個滑桿。（參見圖 3B，紅色方框是功能選單的選項）
3. 修改線段兩端的座標位置，計算出用滑桿名稱來表示的座標位置。圖 3C 是 3 數數列、4 次循環後回到原點 (0, 0)時，可畫出完整圖形的各點位置座標。

4. 由 3 條線段形成一組循環，第一組循環 3 個線段是：f=Segment(A,B)、g=Segment(B,C)、h=Segment(C,V1)。4 組循環剛好可回到原點。可以修改線段的顏色、線條等格式（如圖 4 所示），以便觀察比較改變數列中某一個數字大小變化所產生的影響，或是找出各次循環在整體圖形的位置。



(圖 4) 3 個滑桿畫的圖（自行製圖）

二、方法二：一次循環的圖案群組作旋轉平移

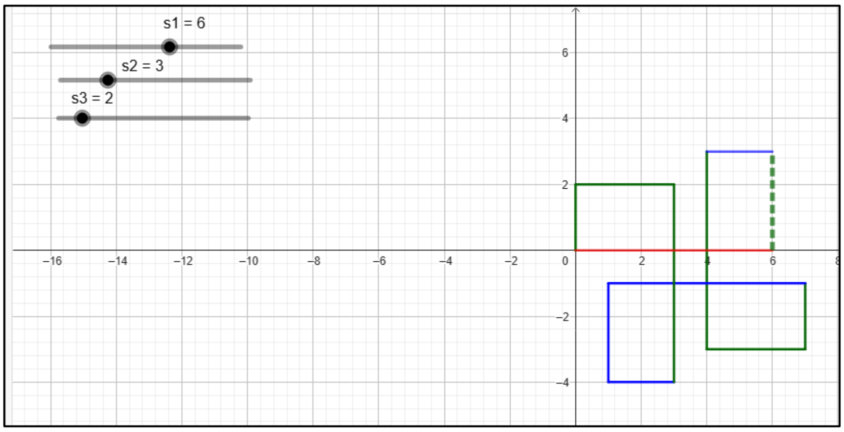
1. 以方法一做一組循環。建立 4 個點：A、B、C、D，以及 3 個線段：f=Segment(A,B)、g=Segment(B,C)、h=Segment(C,V1)。
2. 利用方法一已經計算出的座標位置，建立第 3 次循環起點 G，和第 4 次循環起點 J。
3. 將 3 個線段{f,g,h}群組起來，做旋轉、平移，來產生第 2 次、第 3 次、和第 4 次的循環線段。在程式欄裡直接輸入每組循環的定義：

   L1=Translate(Rotate({f,g,h},270°,A),D)

   L2=Translate(Rotate({f,g,h},180°,A),G)

   L3=Translate(Rotate({f,g,h},90°,A),J)。

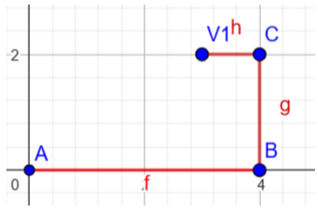
就可以利用第一次的循環，直接變化出後面幾次循環的圖形了（如圖 5 所示）。



(圖 5) 用第 1 次循環來旋轉平移畫完圖形（自行製圖）

三、方法三：改變不同次循環間的旋轉角度（以 3 數的數列為例）

示例將循環間的旋轉角度改為 45 度：



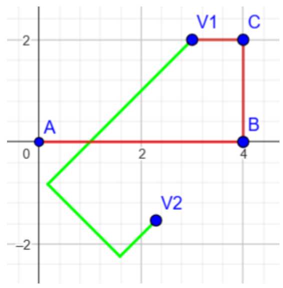
1. 定義出三個數值滑桿 s1、s2 和 s3。
2. 畫出第一組循環的圖形：新增點 A、B、C、V1，線段 f、g、h。
3. 利用「數字翻筋斗圖形花樣大解碼」科展報告中所提到的「位移向量」：兩次循環之間終點位置的座標差異值，我們可以從第一次循環的終點位置，加上旋轉後的位移向量，來找出第二次循環的終點位置。
4. 新增第二次循環的終點 V2，定義：V2=Translate(Rotate(V1,225°,A),V1)

   平移：Translate(物件,向量)；旋轉：Rotate(物件,角度,旋轉中心)

   複製第一次循環的「位移向量」(V1)，以 A 為旋轉中心，逆時針旋轉∠B° + ∠C° + ∠V1° =225°（不同次循環之間旋轉的角度），再將平移的向量設為 V1，第二次循環的起點就會變成 V1 了。
5. 新增第二次循環的群組圖形 L1，定義：L1=Translate(Rotate({f,g,h},225°,A),V1)

   定義和第二次循環的終點 V2 很像，只是旋轉的物件改為{f,g,h}，皆是逆時針旋轉∠B° + ∠C° + ∠V1° =225°，同樣平移到第一次循環的終點 V1。
6. 畫第三次的循環：重複 4.、5.的動作，新增 V3、L2，定義內容的平移向量皆改為 V2，旋轉角度是 V2（L1）再旋轉 225°，因此旋轉角度是 225° ×2（循環次數−1），其餘程式不變。
7. 畫第四次的循環：重複 4.、5.的動作，新增 V4、L3，定義內容的平移向量皆改為 V3，旋轉角度是 V3（L2）再旋轉 225°，因此旋轉角度是 225° ×3，其餘程式不變。

   以此類推後面幾次的循環畫法，只是修改要平移向量，以及旋轉角度×（循環次數−1）。



四、方法四：可隨意調整不同循環間的旋轉角度

1. 新增角度滑桿，θ就是不同循環間的旋轉角度。最小 0°、最大 225°、增量 225°。
2. 每次循環的旋轉角度：如果是 3 數的數列，旋轉角度為 180° + θ，當θ =45°時，旋轉角度是 225°。要讓程式變成可以任意改變旋轉角度，因此要將 V2~V8、L1~L7 程式

中的旋轉角度 225°都改為 $180° + \theta$。這樣就可以任意改變旋轉角度了。如果是 4 數的數列，旋轉角度就是 $270° + \theta$。

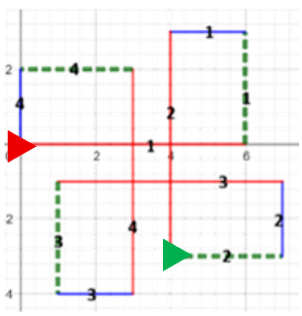
研究二：改變數字排列順序對圖形的影響

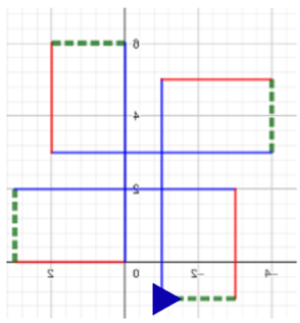
在「數字翻筋斗圖形花樣大解碼」的科展報告已經有發現：如果數列只有一個數，那麼畫出來的圖形只會是正方形。如果數列有兩個數，畫出來的圖形不是正方形，就是長方形。經過測試，發現也是如此，沒有必要再繼續研究。因此，我們便從 3 個數的數列開始研究。

1. 改變 3 個數的數字順序

在「數字翻筋斗圖形花樣大解碼」的科展報告有發現：3 個數的數列，改變數字的排列順序並不影響圖形的形狀。我們自己嘗試改變數字的排列順序，觀察圖形有何變化。

(1)NS.6-3-2（▶起點）和 NS.3-2-6（▶起點） (2)NS.2-3-6（▶起點）





發現：

(1) 數字的前後關係相同：在不同次循環相接時，截取相連的 3 個數字，例如：NS.6-3-2 和 NS.3-2-6，會畫出相同的圖形，只是起點位置及圖形延展的方向不同而已。

(2) 數字前後關係相反（顛倒）會形成線對稱圖形。例如：上面 NS.6-3-2 和 NS.2-3-6 的圖就是互為線對稱，只是起點不同而已。

(3) 不管數字排列順序如何變化，畫出的圖形都可以變換成相同圖形，不影響圖形類型。所以我們後面研究 3 個數的數列，不同數字與圖形之間的關係時，就只研究數字固定由大到小的排列順序。

2. 改變 4 個數的數字順序

因為 4 個數的排列組合變化較多，所以 4 數的數列數字排列順序變化，我們在研究 4 數的圖形時，在一起思考改變數字排列順序對圖形的影響。

研究三：探討改變數字大小對圖形的影響

研究三-1：3 個數的數列

將數列設為：Ns. A-B-C，其中 A ≥ B ≥ C，A、B、C 均 ∈ N。

試著將 A、B、C 代入不同的數字，觀察所形成的圖形屬於哪一種類型，並比較 A、C 和 B、C 的關係。因為在「數字翻筋斗圖形花樣大解碼」的科展報告中，指出由 2 個不同數字所組成的 3 個數的數列，產生的圖形，都會有一個以數列中最小數字為其中一邊邊長的基本形（正方形或長方形），因此我們要探討圖形形成的原因，便鎖定去觀察比較最小數 C 和其他兩數 A、B 之間的關係。

(一)比較 A、B 和 2C 以及 B 和 C 的大小

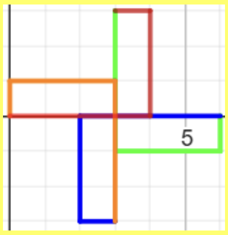
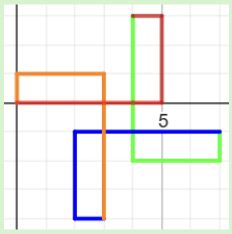
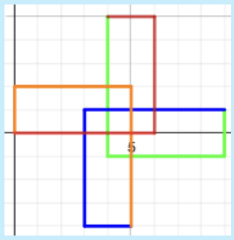
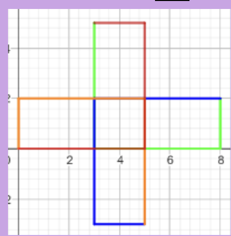
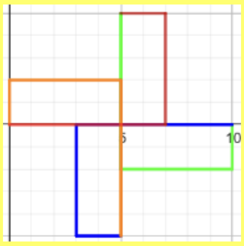
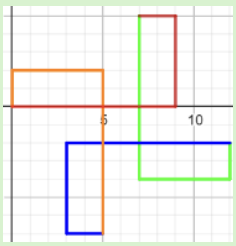
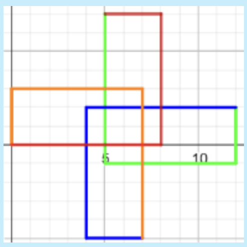
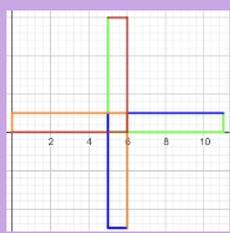
圖形分類代號說明：

車：風車型、扇：風扇型、重：重瓣花型、X：X 型、

十：十字型、田：田字型、九：九宮格型

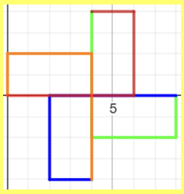
1. A>2C

1-1. B>2C

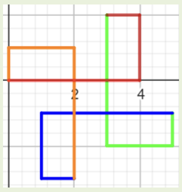
Ns. 4-3-1 車	Ns. 5-3-1 扇	Ns. 6-5-2 重	Ns. 5-5-2 十
			
Ns. 7-5-2 車	Ns. 8-5-2 扇	Ns. 8-7-3 重	Ns. 6-5-2 十
			

1-2. B=2C

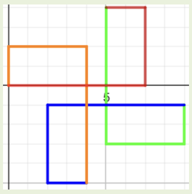
Ns. 6-4-2 車



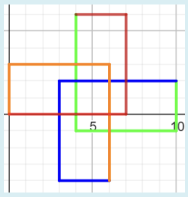
Ns. 4-2-1 扇



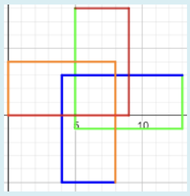
Ns. 7-4-2 扇



Ns. 7-6-3 重

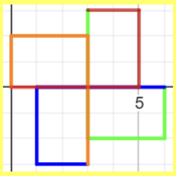


Ns. 9-8-4 重

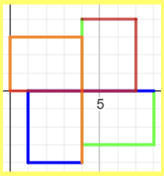


1-3. 2C>B>C

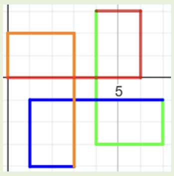
Ns. 5-3-2 車



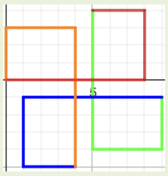
Ns. 7-4-3 車



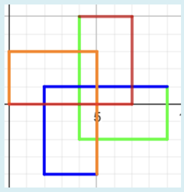
Ns. 6-3-2 扇



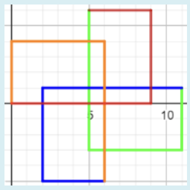
Ns. 8-4-3 扇



Ns. 7-5-3 重

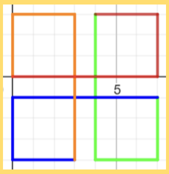


Ns. 9-6-4 重

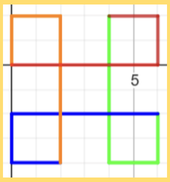


1-4. B=C（也就是：大數 A，大於兩個相同較小數 B=C 的 2 倍）

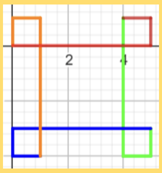
Ns. 7-3-3 X



Ns. 6-2-2 X



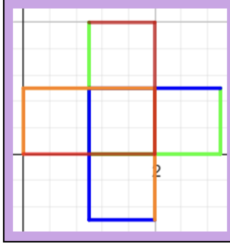
Ns. 5-1-1 X



2. A=2C，因為 A≥B，所以當 A=2C，B 就只會≤2C，不會>2C。

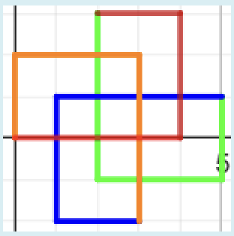
2-1. B=A=2C（也就是：兩個相同的大數 A=B，是較小數 C 的 2 倍）

Ns. 2-2-1 十

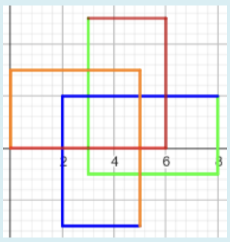


2-2. 2C>B>C

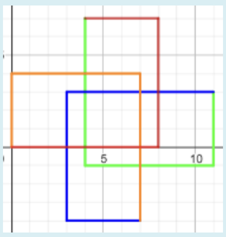
Ns. 4-3-2 重



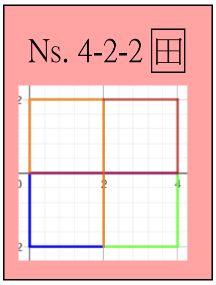
Ns. 6-5-3 重



Ns. 8-7-4 重



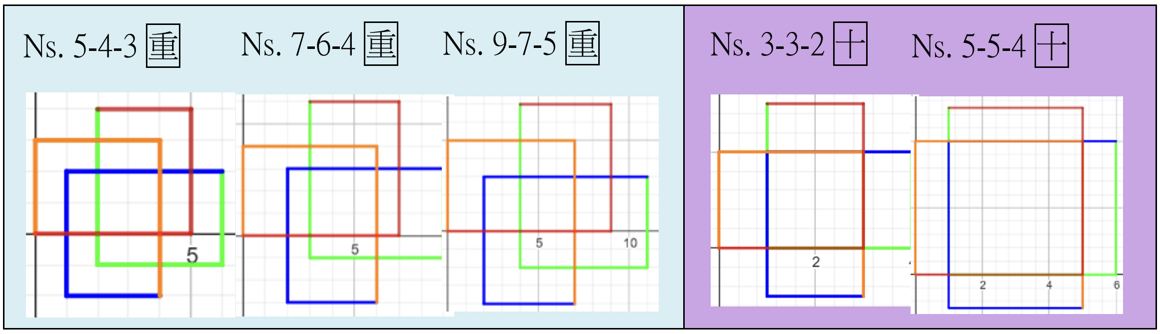
2-4. B=C（也就是：大數 A，是兩個相同較小數 B=C 的 2 倍）



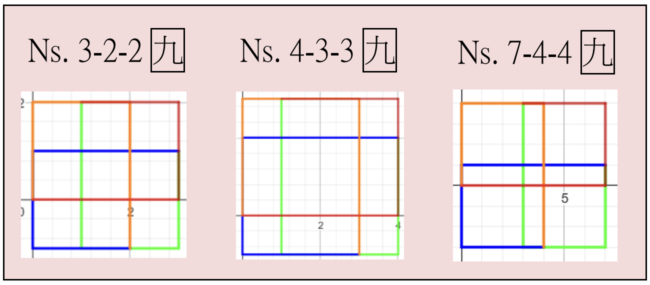
3. A<2C

因為 A≥B，當 A<2C 時，B 就只會<2C。

3-1. 2C>B>C



3-2. B=C（也就是：大數 A，小於兩個相同較小數 B=C 的 2 倍）



將以上的比較結果，整理成表 2：

(表 2) 3 個數的數列不同數字大小與圖形分類彙整表(自行製表)

	A>2C	A=2C	A<2C
B>2C	車、扇、重、十	–	–
B=2C	車、扇、重	十	–
2C>B>C	車、扇、重	重	重、十
B=C	X	田	九

觀察表格中形成不同類型的圖案的條件，有下面的發現：

(1) 十字型的圖形，都出現在 A、B 兩數與 2C 大小比較條件都相同，進一步比對形成十字型的數列 A 和 B 的大小，發現都是 A=B。

(2) 風車型、風扇型只會在 A>2C 時形成。進一步觀察比對，發現形成風車型時，A 都剛好等於另外兩數的和（B+C）；形成風扇型時 A 都大於另外兩數的和（B+C）。所以我們推測：形成風車型、風扇型與重瓣花型的決定因素，可能與 A 和 B+C 的大小比較有關。

(3) B=C 時，也就是數列中有相同的兩個數、且是較小數時，只會形成 X 型、田字型和九宮格型。當 B=C 時，若 A>B+C 就一定是 X 型，若 A=B+C 就一定是田字型，若 A<B+C 就一定是九宮格型。所以形成 X 型、田字型和九宮格型的決定因素，確實是與 A 和 B+C 的大小比較有關。

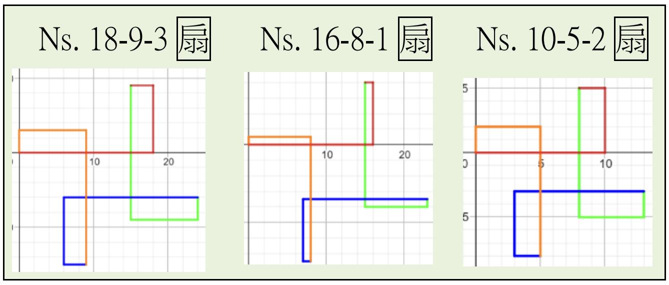
因為從上面的研究，比較較大兩數 A、B 和最小數 C 的大小關係，在 B=C 時，才能從比較「較大數」和另外「兩個相同較小數的和」，來確定會形成的圖形類型：A>B＋C 形成的是 X 型，A=B+C 形成的是田字型，A<B+C 形成的是九宮格型。其他情形下，還不確定圖形類型的變化和 A 與 B+C 有無關聯。在「數字翻筋斗圖形花樣大解碼」科展研究發現，由兩數組成 3 個數的數列圖形類型，會與較大數（A）和較小數 2 倍（2C）的大小比較有關。由於 B=C 時，B+C=C+C=2C，所以我們的研究發現，同時也符合「數字翻筋斗圖形花樣大解碼」的發現，只是差別於觀察與最大數 A 比較大小的對象不同而已。

既然當 B=C 時，由 A 和 B+C 的大小比較可判定圖形定會是屬於 X 型、田字型或九宮格型中這三種類型中的哪一種。我們推測其他四種圖形類別形成的原因，也可能和 A 與另外兩數的和（B+C）比較大小有關，於是便進一步去觀察、比較數列的 A 和 B+C 的大小，對圖形類型的變化有何影響？

(二)比較 A 和 B+C 的大小（其中 B≠C）

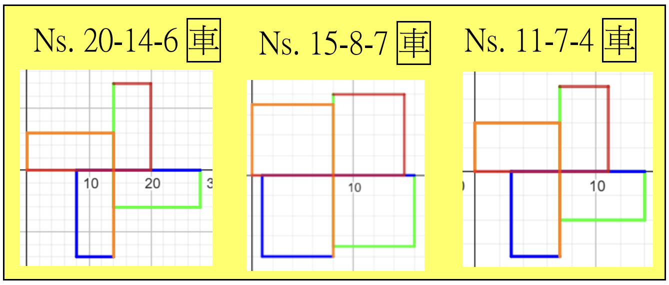
1. A>B+C

上面淺綠色底圖的數列：Ns. 5-3-1、Ns. 8-5-2、Ns.4-2-1、Ns. 7-4-2、Ns. 6-3-2、Ns. 8-4-3，都會畫出風扇型的圖形，也都是 A>B+C。另外再測試幾個 A>B+C 的數列，發現也都是會畫出風扇型。



2. A=B+C

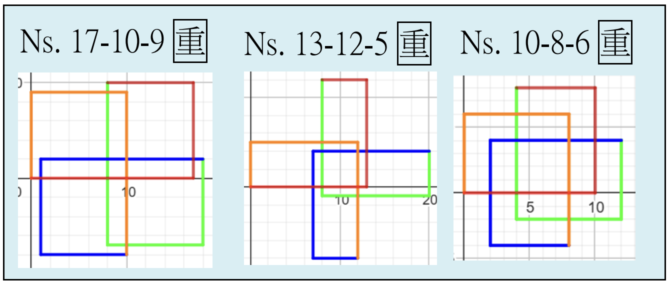
上面黃色底圖的數列：Ns. 5-3-1、Ns. 8-5-2、Ns.4-2-1、Ns. 7-4-2、Ns. 6-3-2、Ns. 8-4-3，都會畫出風車型的圖形，也都是 A=B+C。另外再測試幾個 A=B+C 的數列，發現也都是會畫出風車型。



只要 B 和 C 的差越小，四個長方形的寬度就越接近長度、趨向正方形；相反的，只要 B、C 間的差越大，四個長方形的寬度就越窄、扇葉越狹長。

3. A<B+C

上面淺藍色底圖的數列：Ns. 5-3-1、Ns. 8-5-2、Ns.4-2-1、Ns. 7-4-2、Ns. 6-3-2、Ns. 8-4-3，都會畫出重瓣花型的圖形，也都是 A<B+C。另外再測試幾個 A<B+C 的數列，發現也都是會畫出風重瓣花型。



從上面比較較大數 A 和其他兩數 B、C 的大小關係，發現：只要去比較「較大數」和另外「兩個相同較小數的和」的大小關係，就可以確定會形成的圖形類型，這是「數字翻筋斗圖形花樣大解碼」的科展報告中還沒有深入研究的部分。

【總結】3 個數的數列，改變數字排列順序，不影響可形成圖形類型；而數字大小與形成的圖形類型間存在一定的關係：

數列 Ns. A-B-C，其中 A ≥ B ≥ C，A、B、C 均 ∈ N。

1. 當 B=C 時：若 A>B+C 就一定是 X 型：

   若 A=B+C 就一定是田字型：

   若 A<B+C 就一定是九宮格型。

2. 當 B>C 時：若 A>B+C 時，就一定是風扇型；

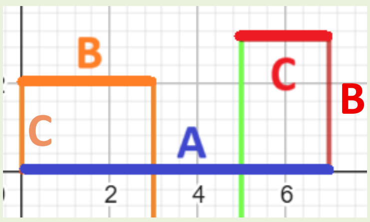
   若 A=B+C 時，就一定是風車型；

   若 A<B+C 時，且 A=B 時就一定是十字型，否則就一定是重瓣花型。

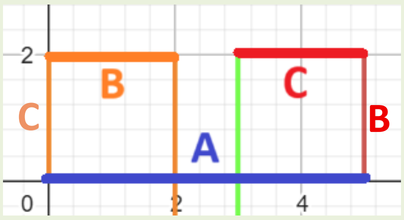
分析

依據「數字翻筋斗圖形花樣大解碼」的研究，基本形的邊長，其中一邊是最小數，另一邊則是「與最小數相鄰的數」或「與最小數前後一輪會相連接的數」兩者中較小的數。由於 A≥B，因此 C 和 B 就一定是基本形的邊長。所以我們試著固定 B 和 C、改變 A，或是固定 A、改變 B 或 C，讓 A>、=、或<B+C，去觀察 A 的長度與基本形（邊長是 B、C）組合而成的圖形，會如何轉化出不同類型的圖形。

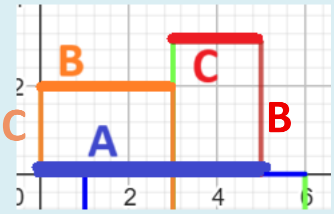
<table>
<tr><th>A>B+C</th><th>A=B+C</th><th>A<B+C</th></tr>
<tr>
<td>
風扇型（B>C）



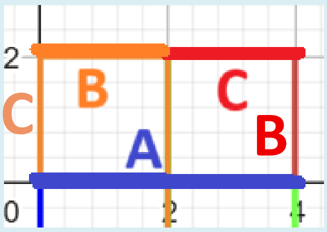
X 型（B=C）



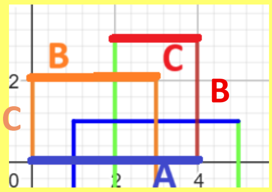
</td>
<td>
風車型（B>C）



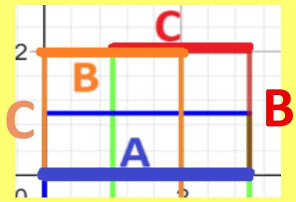
田字型（B=C）



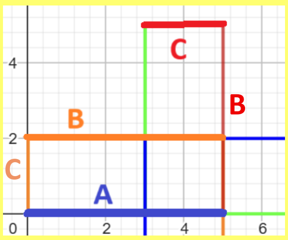
</td>
<td>
重瓣花型（B>C 且 A≠B）



九宮格型（B=C≠A）



十字型（A=B>C）



</td>
</tr>
</table>

現在我們不用畫圖，就可從數列的數字組合來判斷會形成的圖形類型：

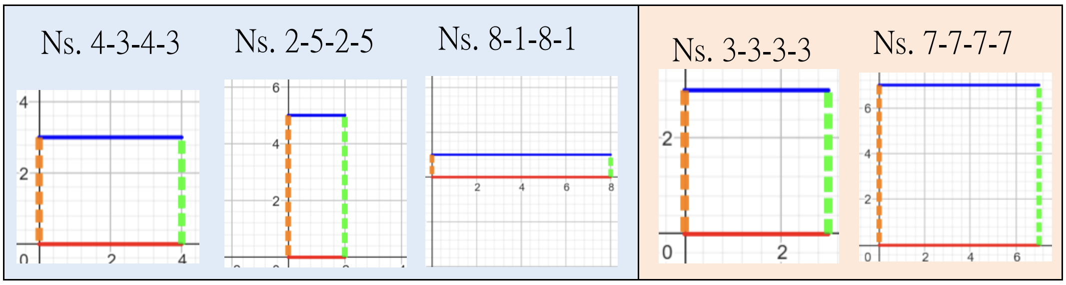
1. 當藍線大於橘線和紅線的和（A>B+C）時，會形成風扇型（B>C）或 X 型（B=C）。
2. 當藍線等於橘線和紅線的和（A=B+C）時，會形成風車型（B>C）或田字型（B=C）。
3. 當藍線小於橘線和紅線的和（A<B+C）時，會形成重瓣花型（B>C 且 A≠B）或九宮格型（B=C≠A）或十字型（A=B>C）。

研究三-2：4 個數的數列

將數列設為：Ns. A-B-C-D，A、B、C、D 均 ∈ N。

由於在 4 個數的數列 中，每一個數字就代表一個方向（X+、X−、Y+、Y−），因此我們將研究的重點擺在比較 A（X+）和 C（X−）的大小差異，以及比較 B（Y+）和 D（Y−）的大小差異。試著將 A、B、C、D 代入不同的數字，觀察形成的圖形屬於哪一種類型。

(一)可回到原點的圖形的數字組合與圖形特徵



發現和「數字翻筋斗圖形花樣大解碼」有相同的發現：

1. 4 個數的數列，要能剛好回到原點， X、Y 軸的值，在一次循環循環結束時，就必須剛好等於 0，圖形會回到原點。否則會依直往某個相向偏移而無法回到原點。
2. 因為一次循環會朝 X+和 X−的方向畫第 1、3 數的長度，朝 Y+和 Y−的方向畫第 2、4 數的長度，所以第 1、3 個數要相同，第 2、4 個數也要相同。
3. 能回到原點的數列，一次循環就可以回到原點，且只會畫出兩種類型的圖形：

   (1)如果 4 個數都相同，則會畫出正方形。正方形的邊長是數列中的數字。

   (2)如果第 1、3 數相同，第 2、4 數也相同，但是數列是由 2 個不同的數所組成時，會形成長方形。長方形的長寬就是數列中第 1、2 個數。

(二)無法回到原點的圖形特徵

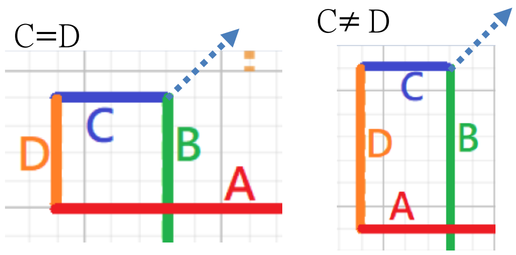
在 4 個數的數列中，一個數就代表一個方向，如果每個數字都不一樣，就沒辦法抵消，無法回到原點，會朝某一個方向無限重複。在「數字翻筋斗圖形花樣大解碼」的科展報告中，只研究了前兩數相同，後兩數也相同時，圖形的基本形彼此是否會相鄰、重疊、或是分開，並發現基本形的離散情形與較大數與較小數的 2 倍互相比大小有關。但是並未深入探討若是數字組合不只是由 2 個數字來組成時，圖形又會如何變化？所以我們決定研究其他的數字組合，觀察會畫出哪些不同類型的圖形。

1. 圖形基本形形狀、延伸方向（箭頭表示延伸方向）

   數列 Ns. A-B-C-D，A、B、C、D 均 ∈ N。所畫出的組合圖形，A、C 會互相平行，B 和 D 平行。

   (1) 若 A 是最大數，且 B>D

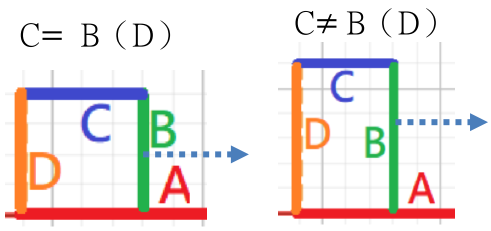
   ① 截取連續 4 個數（如右圖所示 B-C-D-A），則數字 C 和數字 D 所畫的 2 個線段，會組成一個基本形：當 C=D 時是正方形，當 C≠ D 時是長方形。



   ② 一次循環結束時，X 座標的偏移值 A−C> 0， Y 座標的偏移值 B−D> 0，圖形會向右上偏移。

   (2) 若 A 是最大數，且 B=D

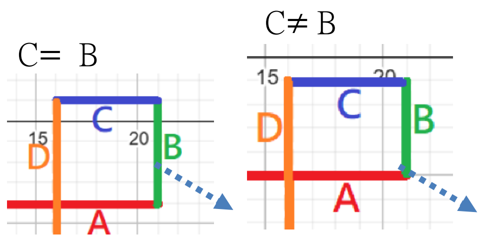
   ① 截取連續 4 個數（如圖所示 B-C-D-A），則數字 C 和數字 B（D）所畫的 2 個線段，會組成一個基本形：當 C=D 時是正方形，當 C≠ D 時是長方形。



   ② 一次循環結束時，X 座標的偏移值 A−C> 0， Y 座標的偏移值 B−D= 0，圖形會向右偏移。

   (3) 若 A 是最大數，且 B<D

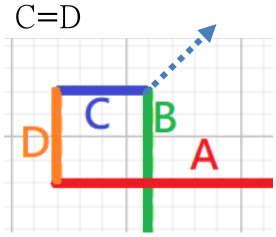
   ① 截取連續 4 個數（如圖所示 A-B-C-D），則數字 C 和數字 B 所畫的 2 個線段，會組成一個基本形：當 C=B 時是正方形，當 C≠ D 時是長方形。



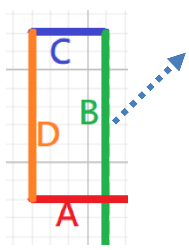
② 一次循環結束時，X 座標的偏移值 A−C> 0， Y 座標的偏移值 B−D> 0，圖形會向右下偏移。

(4) 若 B 是最大數，且 A>C

C=D



C≠ D

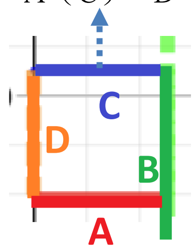


① 截取連續 4 個數（如圖所示 B-C-D-A），則數字 C 和數字 D 所畫的 2 個線段，會組成一個基本形：當 C=D 時是正方形，當 C≠ D 時是長方形。

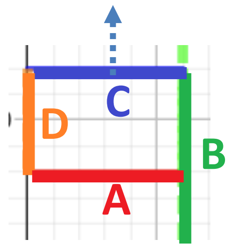
② 一次循環結束時，X 座標的偏移值 A−C> 0， Y 座標的偏移值 B−D> 0，圖形會向右上偏移。

(5) 若 B 是最大數，且 A=C

A（C）=D



A（C）≠D

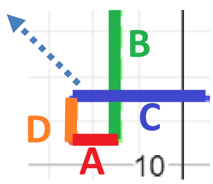


① 截取連續 4 個數（如圖所示 B-C-D-A），則數字 A（C）和數字 D 所畫的 2 個線段，會組成一個基本形：當 C=D 時是正方形，當 C≠ D 時是長方形。

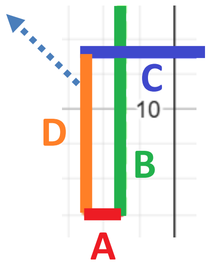
② 一次循環結束時，X 座標的偏移值 A−C= 0， Y 座標的偏移值 B−D> 0，圖形會向上偏移。

若 B 是最大數，且 A<C

A=D



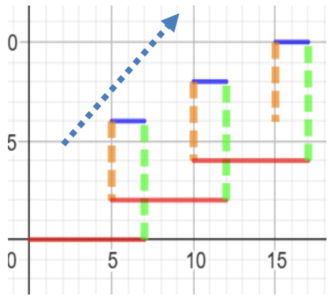
A≠D



① 截取連續 4 個數（如圖所示 C-D-A-B），則數字 A 和數字 D 所畫的 2 個線段，會組成一個基本形：當 A=D 時是正方形，當 A≠ D 時是長方形。

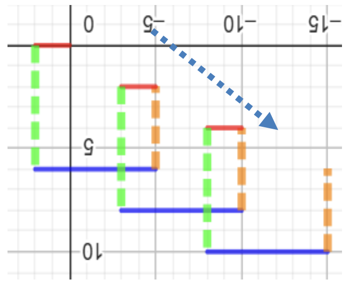
② 一次循環結束時，X 座標的偏移值 A−C> 0， Y 座標的偏移值 B−D> 0，圖形會向左上偏移。

(6) 若 C 是最大數，代表 A<C，圖形會朝 X−的方向延伸。B>、=、或<D 則會讓圖形朝上、中、下延伸，條件與 A 是最大數時相同，只是 X 軸延伸方向相反。如果 B 和 D 的關係相同 A 和 C 的差也相同，只是變成 C 是最大數，形成的圖形旋轉 180 度就會和 A 是最大數時的圖形成線對稱圖形，如下頁圖 6 的例子。



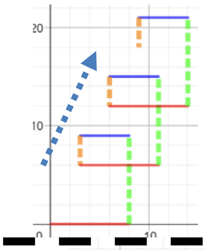
←Ns. 7-6-2-4

Ns. 2-6-7-4（旋轉 180 度後）→

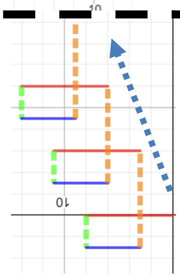


(圖 6) 3 個滑桿畫的圖（自行製圖）

(7) 若 D 是最大數，代表 B<D，圖形會朝 Y−的方向延伸，A>、=、<C 則會讓圖形朝右、中、左延伸，條件與 B 是最大數時相同，只是 Y 軸延伸方向相反。如果 A 和 C 的關係相同 B 和 D 的差也相同，只是變成 D 是最大數，形成的圖形旋轉 180 度就會和 B 是最大數時形成的圖形是線對稱圖形。如右圖的例子所示。

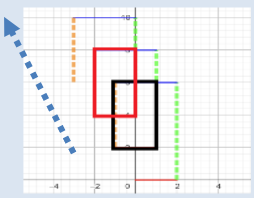
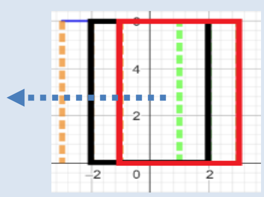
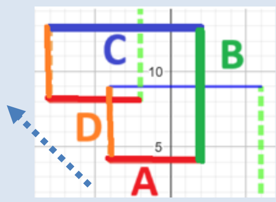


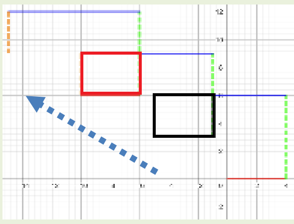
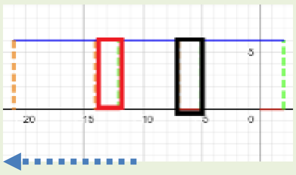
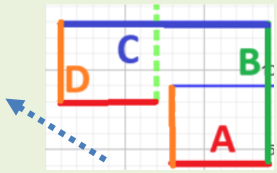
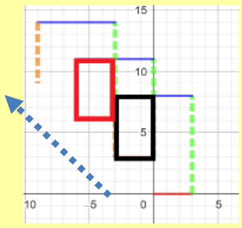
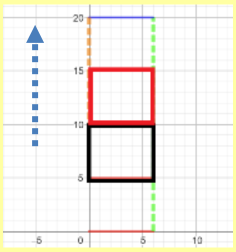
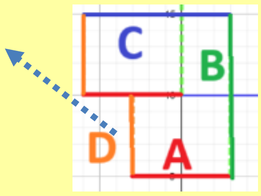
←Ns. 8-9-5-3



←Ns. 8-3-5-9（旋轉 180 度後）

2. 圖形基本形的重疊、分離、緊鄰（紅、黑線代表基本形邊長）

基本形重疊	Ns. 2-6-3-4  Ns. 3-6-4-6 	分析： 圖中兩個基本形 X 軸方向邊長（A）的和大於 C，因此紅線會交疊，才能  在藍線的範圍內；另外兩個基本形 Y 軸方向邊長（D）的和大於 B，因此橘線會交疊，才能在藍線的範圍內。要 X 軸和 Y 軸兩個方向都有交疊，基本形才會重疊，重疊部分的 X 軸方向邊長是 A 和 C 中較小數的 2 倍減較大數，Y 軸方向邊長是 B 和 D 中較小數的 2 倍減較大數。

基本形分離	Ns. 4-6-9-3  Ns. 2-6-9-6 	分析：  圖中兩個基本形 X 軸方向邊長（A）的和小於 C，因此紅線中間有空隙，但是另外兩個基本形 Y 軸方向邊長（D）的和大於 B。只要基本形 X 軸和 Y 軸其中一個方向邊長（X 軸方向 A、C 中較小數或 Y 軸方向 B、D 中較小數）的 2 倍，小於其相對邊（X 軸方向 A、C 中較大數或 Y 軸方向 B、D 中較大數），基本形就會分離。兩基本形間 X 軸或 Y 軸方向的距離，是符合分離條件的基本形邊長的 2 倍和相對邊的差。
基本形緊鄰	Ns. 3-8-6-5  Ns. 6-10-6-5 	分析：  圖中兩個基本形 Y 軸方向邊長（D）的和剛好等於 B，因此橘線讓兩個基本形緊貼，但是另外兩個基本形 X 軸方向邊長（A）的和大於 C。只要基本形 X 軸和 Y 軸其中一個方向邊長的 2 倍等於它的相對邊，基本形就會緊鄰。如果基本形的兩個邊長（X 軸方向 A、C 中較小數或 Y 軸方向 B、D 中較小數）的 2 倍都等於其相對邊（X 軸方向 A、C 中較大數或 Y 軸方向 B、D 中較大數），基本形會以 1 個頂點相接。

基本形的重疊、分離、緊鄰的研究結果與「數字翻筋斗圖形花樣大解碼」的科展報告相近，我們把他們的研究結果修正整理成適用於 4 個數都不一樣的情況：

1. 4 數的數列，基本形的兩邊長度方別為：X 軸方向邊長是 A、C 中較小數， Y 軸方向邊長是 B、C 中的較小數；相對邊則分別為 X 軸方向邊長是 A、C 中較大數， Y 軸方向邊長是 B、C 中的較大數。
2. 兩個基本形邊長×2 皆大於其相對邊，圖形會重疊；
3. 其中一個基本形邊長×2 小於其相對邊，圖形會分離；
4. 其中一個基本形邊長×2 等於其相對邊，圖形會緊鄰；
5. 基本形的兩個邊長分別×2 都等於其相對邊時，基本形就只有 1 個頂點會相碰。

【結論】綜合以上兩點，可以得出以下結論：

1. 基本形邊長：由 A-B-C-D 組成的 4 數數列，圖形回不到原點時，基本形在 X 軸方向邊長是 A、C 中的較小數（相對的平行線是 A、C 中的較大數）；Y 軸方向的邊長則是 B、D 中的較小數（相對的平行線是 B、D 的較大數）。
2. 基本形形狀：如果最小數連續出現兩次（頭尾也算連續），圖形基本形就會是正方形，邊長是最小數。如果沒有，基本形則是長方形。（也適用有回到原點的圖形）
3. 圖形在 X 軸延伸方向：若 A>C，圖形會朝右延伸；若 A<C，圖形會朝左延伸。
4. 圖形在 Y 軸延伸方向：若 B>D，圖形會朝上延伸；若 B<D，圖形會朝下延伸。
5. 基本形的離散程度：
   (1) 只要 A>2C、B>2D、C>2A、D>2B 其中一個條件成立，基本形就會分離。
   (2) 只要 A=2C、B=2D、C=2A、D=2B 其中一個條件成立，基本形就會緊鄰。
   (3) 只要 A=2C、C=2A 其中一個條件成立，且 B=2D 或 D=2B 時，基本形會以頂點相接。
   (4) 只要 A<2C、C<2A 其中一個條件成立，且 B<2D 或 D<2B 時，基本形會重疊。

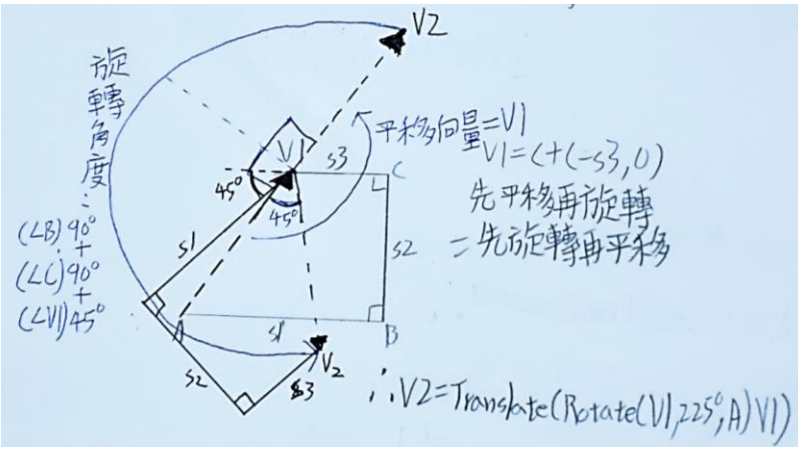
研究四：改變數列間的旋轉角度對圖形的影響

本研究會嘗試改變畫完整個數列後旋轉的角度，但每個數字間的旋轉角度依然保持 90 度，並觀察圖形的變化。我們決定只研究改變數列有 3、4 個數時數列間的旋轉角度對圖形的影響，因為數列有 1、2 個數時形成的圖形太單調，5 個數時又太複雜，且循環次數和 3 個數時相同，所以探討 3 個數就可以了，不用研究有 5 個數的數列。4 個數的數列雖然有可能不會回到原點，但改變旋轉角度後，說不定會改變延伸方向，最後可再轉回原點。

研究四-1：改變數列有 3 個數時數列間的旋轉角度

(一) 探討利用 Geogebra 製作數列間旋轉角度為 45 度的圖形

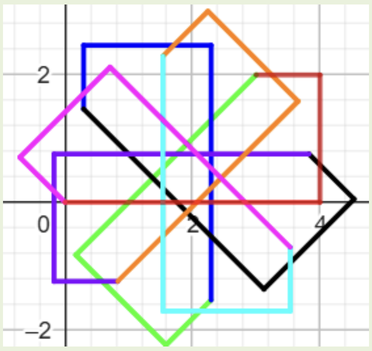
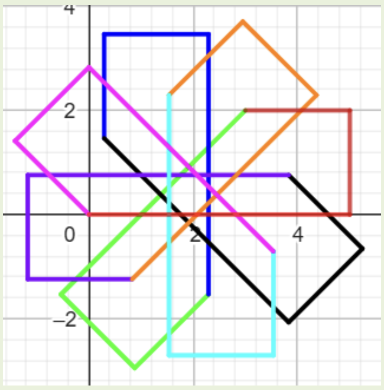
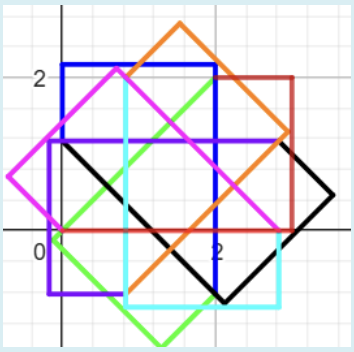
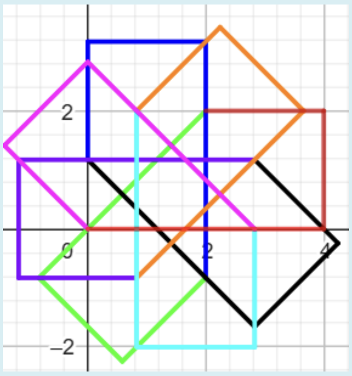
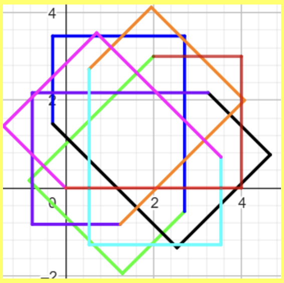
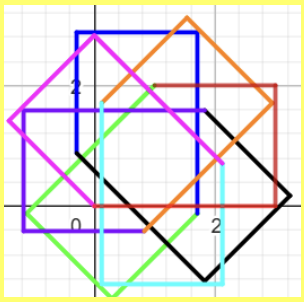
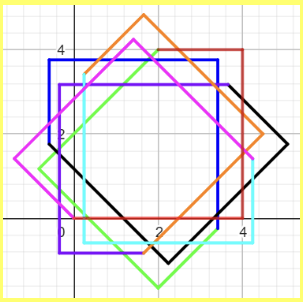
1. 利用描圖紙來觀察改變循環間的旋轉角度，兩次循環的圖形間的相對位置關係。先在 2 張描圖紙上分別試畫 3 個數的一次循環圖形。將第二次循環的圖形旋轉後，起點位置和第一次循環的圖形終點相接（見圖 7）。發現：
   (1) 旋轉角度（位移向量）：將原本旋轉角度 90 度改成 45 度後，第二次循環的圖形，是第一次循環的圖形逆時針旋轉了 180 度+45 度＝225 度。
   (2) 第二次循環的終點位置 V2：第一次循環的終點位置（也就是位移向量 V1）旋轉 225 度、再平移到點 V1。



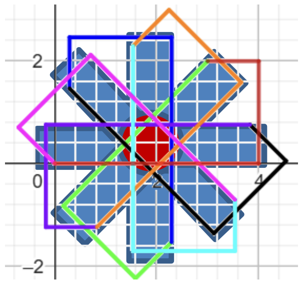
(圖 7)用描圖紙推測下次圖形位置變化的研究筆記（自行拍照）

2. 利用研究一的方法三來畫圖，發現經過 8 次循環，圖形就可以回到原點了。因此數列間旋轉角度是 45°時的循環次數是 8。

3. 改變滑桿數字組合，觀察圖形變化。皆以θ =45°來測試 3 數的主要圖形類型條件。

A>B+C	A=B+C	A<B+C
Ns. 4-2-1（原風扇型）  Ns. 5-2-2（原 X 型） 	Ns. 3-2-1（原風車型）  Ns. 4-2-2（原田字型） 	Ns. 4-3-2（原重瓣花型）  Ns. 3-2-2（原九宮格型）  Ns. 4-4-1（原十字型） 

觀察上表發現 A>、=、<B+C 對圖形的影響並不明顯，只觀察到在 A=B+C 時，圖形整體看起來比較整齊，像是除了最外圍的角以外，其餘的角都是在與其他線相交後轉彎形成的。還可以發現圖形主要分成：最中心的空心、空心周圍的米字號、以及最外圍的部分（見圖 8）。關於這些部分的大小比例估計，是以後可以繼續深入研究的問題。

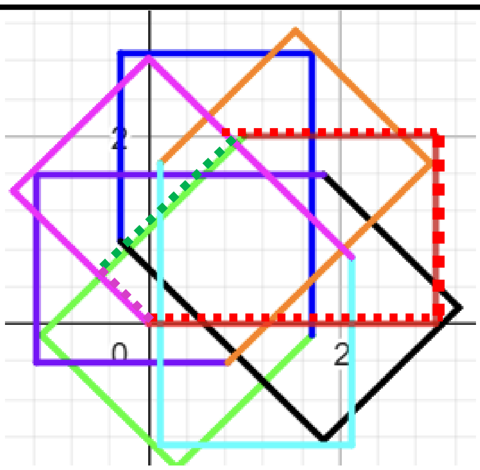


最中心的空心：紅色圓形
空心周圍的米字號：藍色部分（其實是兩個十字型）
最外圍的部分：圖形剩餘空間

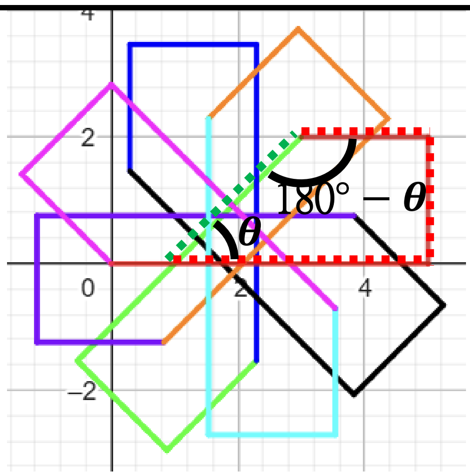
(圖 8)循環間旋轉角度改為 45 度的圖形特徵（自行製圖）

4. 觀察基本形形狀：

　　如果按照以前基本形的定義，基本形一定要是矩形。但改變旋轉角度後，基本形就不會是矩形，還有可能不是四邊形（見圖 9 的虛線區域）。在數列有 3 個數時，基本形邊長就是最小數和第二小數，基本形中長度是最小數或第二小數的邊長的相對邊，都一定是最大數，其中一個最大數邊長會和它的相對邊平行，另一個則不會和相對邊平行。不平行的最大數邊長旁邊的兩個角，角度分別是：θ（夾角的兩邊是不同次循環）和 $180° - \theta$（夾角的兩邊是同一次循環）。



基本形不是四邊形

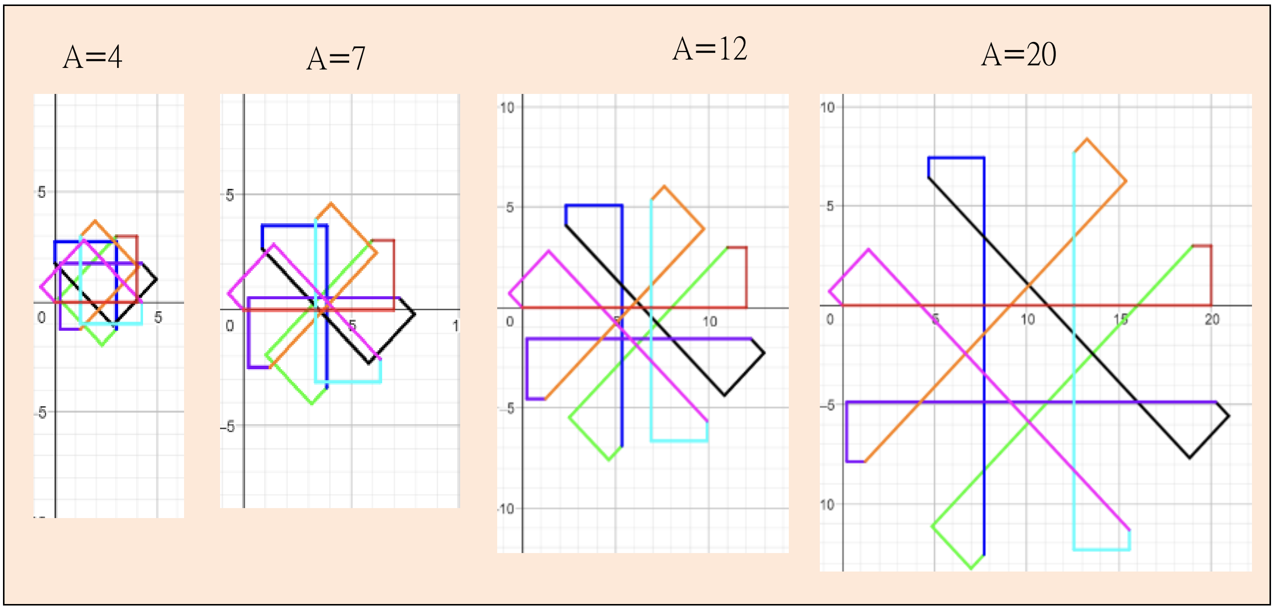


基本形各個角的度數

(圖 9) 分析循環間旋轉角度改為 45 度的基本形（自行製圖）

5. 比較基本形邊長變化：

觀察圖形可以發現，基本形中以最小數和第二小數為邊長的邊，都是在圖形的最外圍，也就是圖形最外圍的其中一部份。因此我們覺得只要固定最小數（C）和第二小數（B），只改變最大數（A），去觀察比較最中心的空心和空心周圍米字號的大小變化。（下圖的 B、C 皆是 3、1）



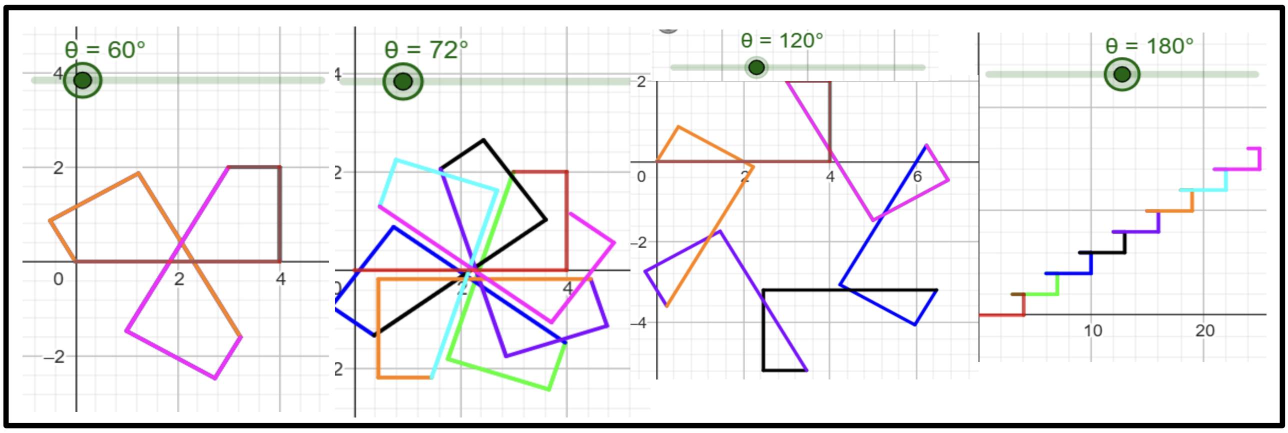
比較結果發現：

1. A 愈大，最外圍的部分大小不會變，但最中心的空心和空心周圍的米字號的大小都愈來愈大，而且變大的程度都一樣。
2. 空心周圍的米字號在 A=4 時是窄的，在 A=7、12、20 時則是細的。進一步觀察，發現在 B、C 不變時，如果空心周圍的米字號的末端是封閉的，則 A 愈大，空心周圍的米字號就愈細，最中心的空心也會愈小；如果空心周圍的米字號的末端沒有封閉，則 A 愈大，空心周圍的米字號就愈粗，最中心的空心也會愈大。

經過多次測試後，證實在θ =45°時，只要最小數和第二小數（不一定是 B、C）固定，這個發現就一定成立。

(二) 讓數列間的旋轉角度可以任意變換

1. 利用研究一的方法四來畫圖，改變數列間的旋轉角度。
2. 試著將θ變換成 60°、72°、120°、180°等不同角度：皆用 Ns. 4-2-1 來測試，結果見下頁圖 10。



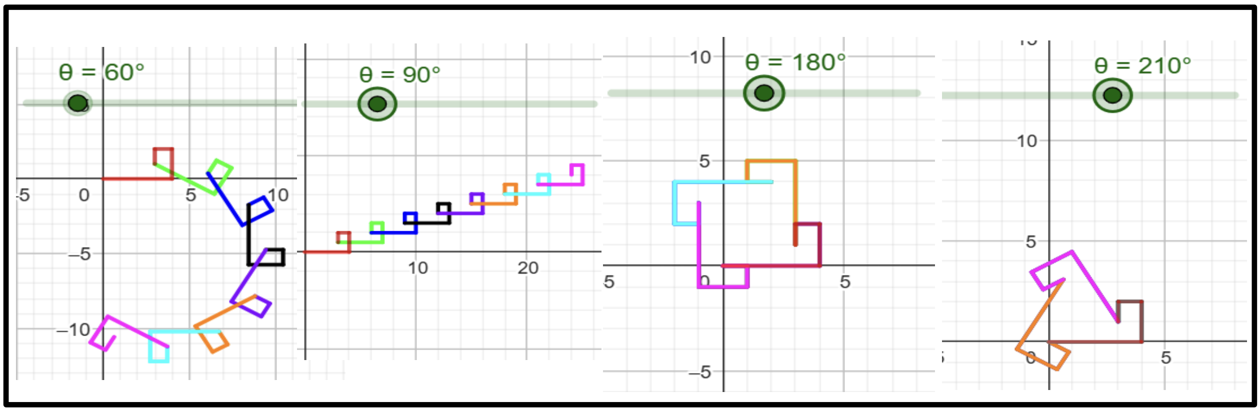
(圖 10)變換 3 數數列間旋轉角度產生的圖形示例（自行製圖）

討論

由圖 10 可以發現：當數列有 3 個數時，數列間旋轉角度不同時，循環次數都不同，有些沒回到原點，是因為這個程式只有 8 次循環，它們可能要更多次循環才會回到原點。但旋轉角度是 180°時，位移向量只有一個方向，不管多少次循環，位移向量都無法成為一個完整的封閉圖形，因此圖形就不會回到原點。如何找出循環次數和角度間的關係，是可以繼續深入研究的問題。

研究四-2：改變 4 個數的數列間旋轉角度

1. 利用研究一的方法四來畫 4 個數的數列，改變數列間的旋轉角度。
2. 試著將θ變換成 60°、90°、180°、210°等不同角度，觀察圖形的變化（皆用 Ns. 4-2-1-1 來測試）。結果見圖 11。



(圖 11) 變換 4 數數列間旋轉角度產生的圖形示例（自行製圖）

討論

由圖 11 可以發現：當 4 個數的數列，數列間旋轉角度不同時，循環次數都不同，有些

沒能回到原點，主要是因為只有畫出 8 次循環，可能要畫更多次的循環才會回到原點。但旋轉角度是 90°時，位移向量固定只朝同一個方向，所以位移向量不管多少次循環，都不會連成一個完整的封閉圖形，因此圖形就不會回到原點。如何找出循環次數和角度間的關係，是可以繼續研究的問題。

研究四 3：探討改變數列間旋轉角度後的循環次數

(一) 研究如何求出循環次數

圖形要能回到原點，每次位移向量的旋轉角度加起來一定要是 360°的倍數。所以循環次數就是：每次循環的位移向量旋轉角度和 360°的最小公倍數，再除以每次循環位移向量的旋轉角度。

數列有 3 個數時的位移向量總旋轉角度是：$lcm(\theta + 90° \times 2{,}360°)$，所以循環次數是：$\frac{lcm(\theta+90°\times 2{,}360°)}{\theta+90°\times 2}$；

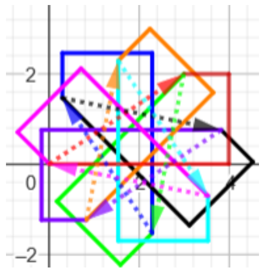
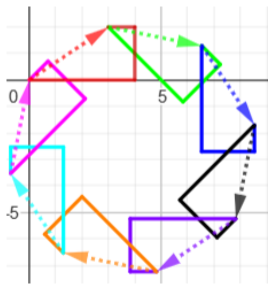
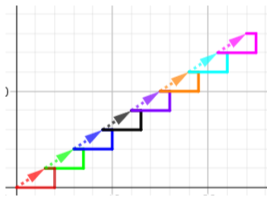
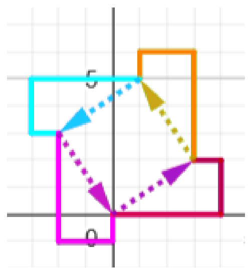
數列有 4 個數時的位移向量總旋轉角度是：$lcm(\theta + 90° \times 3{,}360°)$，所以循環次數是：$\frac{lcm(\theta+90°\times 3{,}360°)}{\theta+90°\times 3}$。

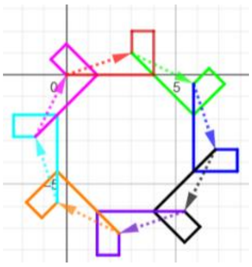
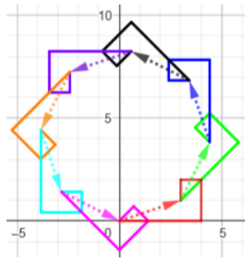
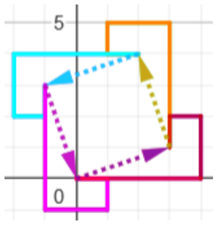
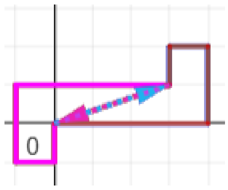
(二) 驗證是否適用於「數字轉轉彎」科展報告中提出的公式

1. 「數字轉轉彎」科展報告中有提出求方向數（α）和最小執行次數（t_0）的公式，分別是：$\alpha = \frac{lcm(\theta{,}360°)}{\theta}$ 和 $t_0 = \frac{\alpha}{\gcd(\alpha{,}n)}$（$\theta$：數字間的循環角度、$n$：數列項數）。由於我們研究的圖形，是只有數列間的循環角度改變，但是同一循環中的旋轉角度保持 90°，因此我們覺得方向數和最小執行次數的公式，說不定會和「數字轉轉彎」科展報告中提出的公式不一樣。

2. 數列有 3 個數時的循環次數（最小執行次數）是：$\frac{lcm(\theta+90°\times 2{,}360°)}{\theta+90°\times 2}$；數列有 4 個數時的循環次數（最小執行次數）是：$\frac{lcm(\theta+90°\times 3{,}360°)}{\theta+90°\times 3}$，圖形回到原點後，下一次循環的線段就會和第一次循環重疊，位移向量的方向也會一樣。因此，在只改變數列間的旋轉角度時，循環次數（最小執行次數）就是位移向量的方向變化次數（方向數）。

3. 以下表格內的圖形 3 數皆以 Ns. 4-2-1 測試，4 數皆以 Ns. 4-2-1-1 測試：

數列	數列間的旋轉角度	實際循環次數	$\frac{lcm(\theta+90°\times 2,360°)}{\theta+90°\times 2}$ $\frac{lcm(\theta+90°\times 3,360°)}{\theta+90°\times 3}$	$\alpha=\frac{lcm(\theta,360°)}{\theta}$ 和$t_0=\frac{\alpha}{\gcd(\alpha,n)}$
Ns. 4-2-1	θ =45°	α =8　t_0 =8 	循環次數（最小執行次數）=8	α =8 t_0 =8
	θ =135°	α =8　t_0 =8 	循環次數（最小執行次數）=8	α =8 t_0 =8
	θ =180°	α =1　t_0無解 	循環次數（最小執行次數）=1	α =2 t_0 =2
	θ =270°	α =4　t_0 =4 	循環次數（最小執行次數）=4	α =4 t_0 =4

數列	數列間的旋轉角度	實際循環次數	$\frac{lcm(\theta+90°\times 2,360°)}{\theta+90°\times 2}$ $\frac{lcm(\theta+90°\times 3,360°)}{\theta+90°\times 3}$	$\alpha=\frac{lcm(\theta,360°)}{\theta}$ 和$t_0=\frac{\alpha}{\gcd(\alpha,n)}$
Ns. 4-2-1-1	θ =45°	α =8 t_0 =8 	循環次數（最小執行次數） =8	α =8 t_0 =2
	θ =135°	α =8 t_0 =8 	循環次數（最小執行次數） =8	α =8 t_0 =2
	θ =180°	α =4 t_0 =4 	循環次數（最小執行次數） =4	α =2 t_0 =1
	θ =270°	α =2 t_0 =2 	循環次數（最小執行次數） =2	α =4 t_0 =1

4. 由上表可以發現，在 Ns. 4-2-1 時，只有θ =45°、135°、270°，「數字轉轉彎」科展報告中提出的公式，才會和實際的 α 與 t_0 相同；在 Ns. 4-2-1-1 時，則都與實際的 α 與 t_0 不相同。因此可以知道：當只有改變數列間的旋轉角度時，「數字轉轉彎」科展報告中提出的公式基本上都不適用。有時候答案剛好相同，是因為數列有 3 個數時，它們的公式少加了兩個 90°，因此每次循環都少加了 180°，如果循環次數是偶數（180°和 360°的公倍數），旋轉角度少加了 180°的結果會和加了 180°的結果相

同。數列有 4 個數時，則變成 270°和 360°的公倍數。

5. 圖形不能回到原點時，代表方向數是 1，也就是「位移向量的旋轉角度和 360°的最小公倍數」，剛好就是「位移向量的旋轉角度除以 $(\theta + 90° \times 2)$ 或 $(\theta + 90° \times 3)$」，結果是 1。位移向量的旋轉角度和 360°的最小公倍數，剛好是位移向量的旋轉角度的話，位移向量的旋轉角度就一定是 360°的倍數。

6. 數列有 3 個數時，圖形不能回到原點的狀況有：θ =180°、θ =540°（又等於 180°）。由此可發現，圖形不能回到原點的狀況只有 θ =180°。

7. 數列有 4 個數時，圖形不能回到原點的狀況有：θ =90°、θ =450°（又等於 90°）。由此可發現，圖形不能回到原點的狀況只有 θ =90°。

8. 如果圖形沒有回到原點，最小執行次數（t_0）就沒有解，因此圖形沒有回到原點就是 $\alpha \neq t_0$ 的唯一例外。

伍、結論

一、利用 GeoGeBra 輔助畫圖：

1. 本研究共使用了 4 種不同的方法來畫圖：一次畫一個數、群組一次循環的圖案作旋轉平移、變換不同次循環間的旋轉角度、隨意調整不同次循環間的旋轉角度。

2.使用滑桿功能來變化數列的數值，以及旋轉角度，可隨手變化產生不同的圖形花樣。

二、改變 3 數數列的數字排列順序，只有起點不同，圖形的形狀和大小都相同。

三、改變數字大小對圖形的影響：

(一) 3 個數的數列 Ns. A-B-C，其中 A ≥ B ≥ C，A、B、C 均 ∈ N。只要去比較「較大數 A」和「兩個相同較小數的和 B+C」的大小關係，就可判斷出圖形類型：

1. 當 B=C 時：若 A>B+C 就一定是 X 型：若 A=B+C 就一定是田字型：若 A<B+C 就一定是九宮格型。

2. 當 B>C 時：若 A>B+C 時，就一定是風扇型；若 A=B+C 時，就一定是風車型；若 A<B+C 時，且 A=B 時就一定是十字型，否則就一定是重瓣花型。

(二) 4 個數的數列 Ns. A-B-C-D，A、B、C、D 均 ∈ N。

1.圖形要能回到原點，一次循環就可以回到原點，且只會畫出兩種類型的圖形：

(1)如果 4 個數都相同，則會畫出正方形。正方形的邊長是數列中的數字。

(2)如果第 1、3 數相同，第 2、4 數也相同，但是數列是由 2 個不同的數所組成時，會形成長方形。長方形的長寬就是數列中第 1、2 個數。

2.無法回到原點的圖：

(1)基本形邊長：在 X 軸方向邊長是 A、C 中的較小數（相對的平行線是 A、C 中的較大數）；Y 軸方向的邊長則是 B、D 中的較小數（相對的平行線是 B、D 的較大數）。

(2)基本形形狀：如果最小數連續出現兩次（頭尾也算連續），圖形基本形就會是正方形，邊長是最小數。如果沒有，基本形則是長方形。（也適用有回到原點的圖形）

(3)圖形在 X 軸延伸方向：若 $A>C$，圖形會朝右延伸；若 $A<C$，圖形會朝左延伸。

(4)圖形在 Y 軸延伸方向：若 $B>D$，圖形會朝上延伸；若 $B<D$，圖形會朝下延伸。

(5)基本形的離散程度：

①只要 $A>2C$、$B>2D$、$C>2A$、$D>2B$ 其中一個條件成立，基本形就會分離。

②只要 $A=2C$、$B=2D$、$C=2A$、$D=2B$ 其中一個條件成立，基本形就會緊鄰。

③只要 $A=2C$、$C=2A$ 其中一個條件成立，且 $B=2D$ 或 $D=2B$ 時，基本形會以頂點相接。

④只要 $A<2C$、$C<2A$ 其中一個條件成立，且 $B<2D$ 或 $D<2B$ 時，基本形就會重疊。

四、改變數列間的旋轉角度對圖形的影響：

(一) 改變 3 數數列間的旋轉角度：

1. 旋轉角度變成 45°：

(1)只有在 $A=B+C$ 時，圖形整體看起來比較整齊，像是除了最外圍的角以外，其餘的角都是在與其他線相交後轉彎形成的。而圖形主要分成：最中心的空心、空心周圍的米字號、以及最外圍的部分。

(2)基本形形狀：基本形不會是矩形，還有可能不是四邊形。在最大數邊長旁邊的

兩個角，角度分別是：θ（角旁邊的兩條邊是不同個循環）和 $180° - \theta$（角旁邊的兩條邊是同個循環）。

(3)改變最大數的數字大小：最大數愈大，最外圍的部分大小不會變，但最中心的空心和空心周圍的米字號的大小都愈來愈大，而且變大的程度都一樣。

2. 變換其他旋轉角度：數列間旋轉角度是 180°時，位移向量只有一個方向，不管多少次循環，都不會回到原點；其他旋轉角度則有不同的循環次數。

(二) 改變 4 數數列間的旋轉角度：數列間旋轉角度是 90°時，不會回到原點；其他旋轉角度則有不同的循環次數。

五、改變數列間的旋轉角度後的循環次數：

(一) 循環次數計算公式：

1. 3 個數的數列循環次數是：$\frac{lcm(\theta+90°\times 2,360°)}{\theta+90°\times 2}$；

2. 4 個數的數列循環次數是：$\frac{lcm(\theta+90°\times 3,360°)}{\theta+90°\times 3}$。

3. 數列有 3 個數時，圖形不能回到原點的狀況有：θ =180°、θ =540°（又等於 180°）。由此可發現，圖形不能回到原點的狀況只有θ =180°。

4. 數列有 4 個數時，圖形不能回到原點的狀況有：θ =90°、θ =450°（又等於 90°）。由此可發現，圖形不能回到原點的狀況只有θ =90°。

5. 如果圖形沒有回到原點，最小執行次數（t_0）就沒有解，因此圖形沒有回到原點就是$\alpha \neq t_0$的唯一例外。

陸、參考資料

1. 呂卓諺、翁婕珊、劉家珊。數字翻筋斗圖形花樣大解碼。第 61 屆全國中小學科展國小組數學科，網址：https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/61/pdf/NPHSF2021-080409.pdf?0.28462919882146975。

2. 林玠廷、康哲銨、林詠心。數字轉轉彎。第 63 屆全國中小學科展國中組數學科，網址：https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/63/pdf/NPHSF2023-030412.pdf?0.6543117064688406。