

新竹市第 44 屆中小學科學展覽會
作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：移位跳棋的推廣

關鍵詞：跳棋,棋藝遊戲

編號：

摘要

本研究以移位跳棋為主題，探討在棋子加入編號並要求「完整對號互換」後，其移動步數的規律與一般化公式。首先，我們回顧歷屆移位遊戲相關研究，整理常見的移動策略與最少步數結構，並據此發展適用於本研究的新規則模型。本研究從最基本的一維棋盤出發，利用相鄰移動與跳躍的特性，推導出任意長度單線移位跳棋的步數通式。進一步擴展至二維棋盤。本研究運用橫向與縱向的公式解移動方法，將複雜的二維互換問題拆解成多組一維子問題，最終建立可處理任意 $x \times y$ 棋盤的遞迴通式。

一、研究動機

在數學專題課上，我們接觸到移位跳棋這個遊戲，遊戲規則簡單易懂，在搜尋相關文獻後，我們希望可以繼續推廣研究發展下去，於是開啟了我們的研究之路。

二、研究目的

1. 探討單線移位跳棋，加入編號並進行互換的一般化通式解。
2. 探討二維平面移位跳棋，加入編號並進行互換的一般化通式解。

參、研究設備與器材

AMA2.0、電腦、紙、筆

肆、研究過程

移位跳棋的相關文獻有非常多，以下我們先對相關研究做簡要說明：

一、文獻探討

屆別	作品名稱	內容概要
第 24 屆初小組	有趣的移位遊戲	▪找出移位遊戲的簡易走法。
		▪探討所需的次數（最少次數）與每邊棋子個數之間的關係
第 34 屆高小組	毛毛蟲變蝴蝶~移位遊戲的新發現	▪結合「毛蟲棋」與「河內塔」兩種遊戲，發展出「毛蟲塔」移位遊戲。
		▪探究此遊戲的移位步數。
第 41 屆國中組	個人移位跳棋遊戲的探討	▪研究移位跳棋的移位步數和規律性。
		▪探討不同花色種類、數量或排列方式下的移位問題。
		▪找出最少移位步數公式。

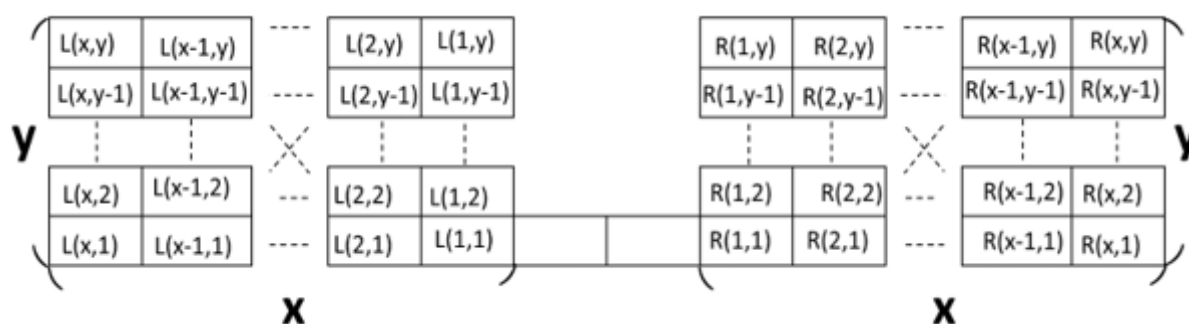
第 44 屆國小組	三色移位毛毛蟲~三色移位遊戲的探討	▪將遊戲變化為三色移位遊戲
		▪探討不同棋子數量情況下的移動最少步數
		▪找出移動最低步數之間的規律並推導公式。
第 46 屆國小組	乾坤大挪移	▪找出遊戲的解法、公式，並定義解法為「跳島攻法」
		▪公式分奇、偶數兩情況，並以數學歸納法證明公式
第 47 屆國小組	跳島攻法—破解移位遊戲的最佳策略	▪找出遊戲的解法、公式，並定義解法為「跳島攻法」
		▪公式分奇、偶數兩情況，並以數學歸納法證明公式
第 48 屆國小組	毛毛蟲爬眼鏡-移位遊戲變形玩法	▪改變移位遊戲棋盤樣式為類似眼鏡形狀的「眼鏡型棋盤」並探討環狀移位遊戲的規律
第 51 屆國小組	向左走向右走~相鄰移位遊戲最佳策略探討之研究	▪改變移位遊戲的規則，尋找最少移位次數。
		▪透過改變排列順序、排列圖形（如順時鐘環形）來設計新遊戲，並探討之間的相關性。
第 53 屆國小組	「毛蟲」「塔」-移位遊戲混合版初探	▪因接觸移位遊戲及了解其數學規律，嘗試改變遊戲條件，自創「河內塔」遊戲。
第 56 屆國小組	「青蛙」「塔」移位遊戲	▪將移位棋遊戲結合河內塔與青蛙塔遊戲規則，找出青蛙塔的最少步數跳法與規律。

綜合上述文獻探討，我們決定將移位棋遊戲做下列變化：將每顆棋做編號，並且必

須將相對應編號位置的棋子進行互換。

二、遊戲規則介紹

在基礎的長條式棋盤上拓展一個新棋盤，計算步數的規則有以下幾點(棋盤如下圖所示)



【棋子設定】

1. 每行棋子數為 x 顆，每列棋子數為 y 顆

L 棋子編號： $L(1,1), L(1,2), \dots, L(x, y)$ ，由右至左，下至上依序放置於左邊

R 棋子編號： $R(1,1), R(1,2), \dots, R(x, y)$ ，由左至右，下至上依序放置於右邊

每格只能有一顆棋子

【移動規則】

1. 棋子只能移動到「相鄰」的空格，上下左右皆可。
2. 跳躍（跨越）規則：棋子可以跳過「與自己相鄰」的一顆棋子

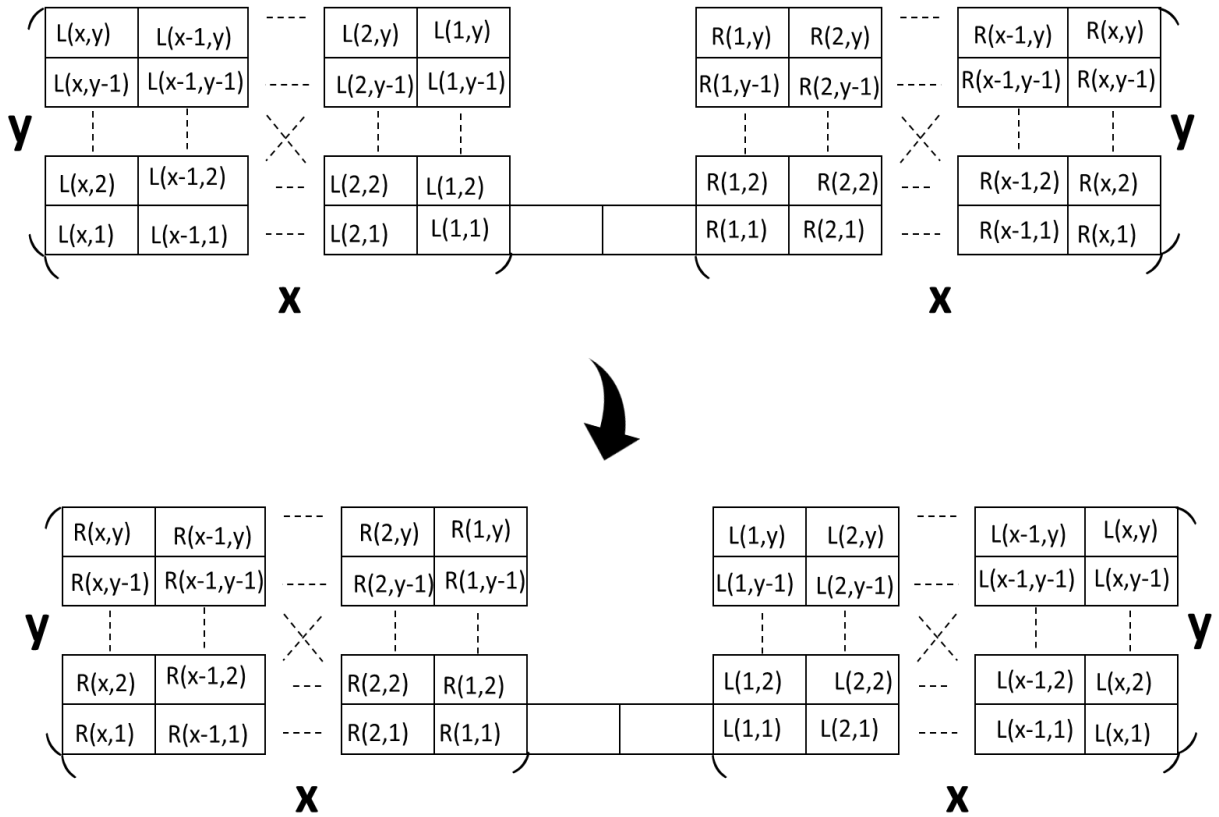
跳過的方向同樣是上下左右

被跳過的棋子後面必須有一格空格，才能跳到該空格

※跳一次算一步，移動一次也算一步

【目標】

將所有 L、R 棋子完全對調位置，且需「對號入座¹」(如下):



【符號定義】

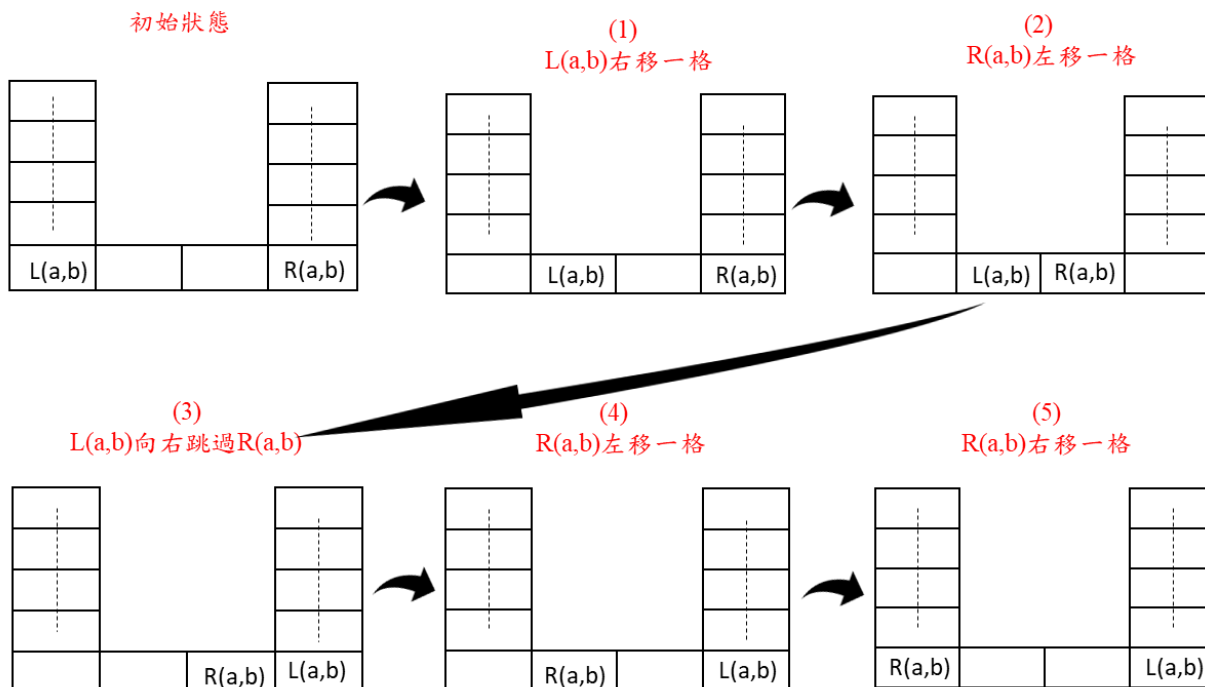
棋盤兩邊各有 x 行， y 列的棋盤 ($x, y \in N$)，將所有左側(L)與右側(R) 棋子完全對號入座對調位置，所需的通式解步數，我們以符號 $f(x, y)$ 表示。

¹將 $L(a,b)$ 和 $R(a,b)$ 的棋子初始位置互換 ($a, b \in N$ 且 $a \leq x, b \leq y$)

研究一、單線棋盤 (探討 $f(x, y)$ 中, $x=1$ 的棋盤之通式解)

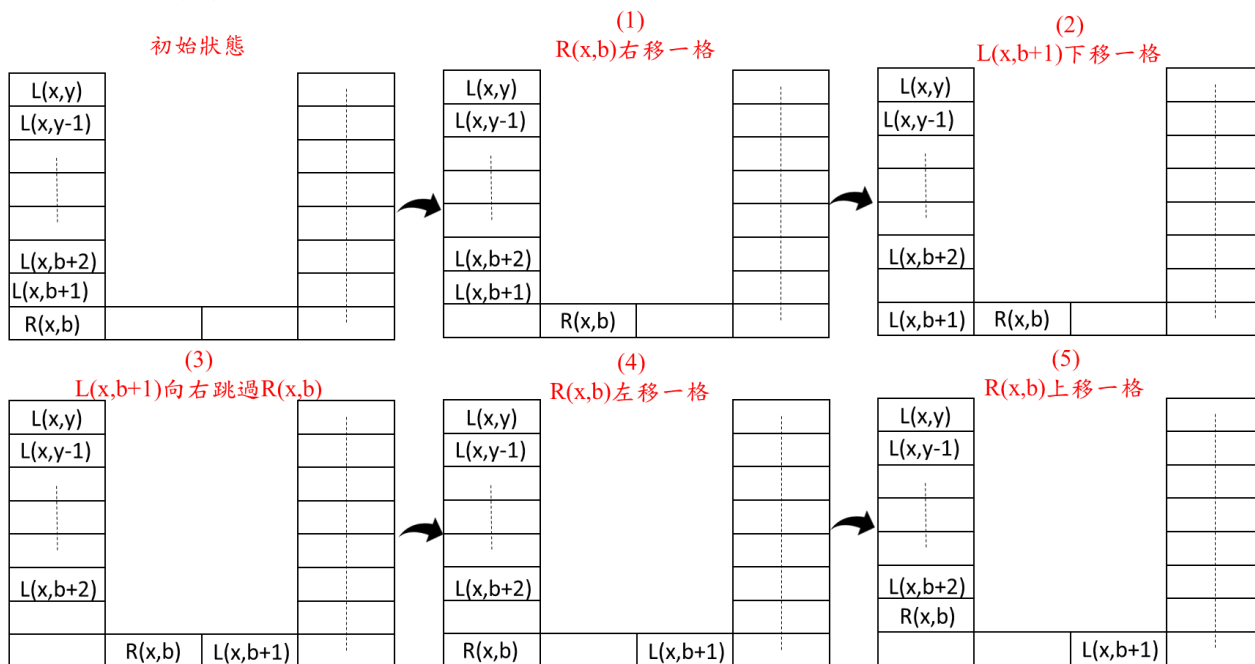
在開始之前, 我們先說明兩個公式:

公式一: $L(a,b)$ 和 $R(a,b)$ 互換



*公式一將 $L(a,b)$ 和 $R(a,b)$ 兩位置互換所需步數為5步

公式二: 將 $R(x,b)$ 通過所有的 L 移到最上面



(6)
L(x,b+2)向下跳過R(x,b)

L(x,y)		
L(x,y-1)		
⋮		
R(x,b)		
L(x,b+2)		L(x,b+1)

(7)
R(x,b)上移一格

L(x,y)		
L(x,y-1)		
⋮		
R(x,b)		
L(x,b+2)		L(x,b+1)

(8)
重複(6)、(7)y-b-2次

R(x,b)		
L(x,y)		
L(x,y-1)		
⋮		
L(x,b+2)		L(x,b+1)

(9)
依序將L(x,y)~L(x,b+2)上移一格

R(x,b)		
L(x,y)		
L(x,y-1)		
⋮		
L(x,b+2)		
		L(x,b+1)

(10)
L(x,b+1)左移兩格

R(x,b)		
L(x,y)		
L(x,y-1)		
⋮		
L(x,b+2)		
L(x,b+1)		

*公式二將最下面棋子調整至最上面所需步數為

$$7 + 2(y - b - 2) + y - b - 2 + 1 + 2$$

$$= 3y - 3b + 4$$

我們先從 $y = 2, 3, \dots$ 依序往下探討，尋求規律：

(I) $y = 2$ 時

初始狀態

L(1,2)			R(1,2)
L(1,1)			R(1,1)

(1)套用公式一

L(1,2)			R(1,2)
L(1,1)			R(1,1)

(2)套用b=1時的公式二

L(1,2)			R(1,2)
R(1,1)			L(1,1)

(3)套用b=1時的公式二

R(1,1)			R(1,2)
L(1,2)			L(1,1)

(4)套用公式一

R(1,1)			L(1,1)
L(1,2)			R(1,2)

(5)套用b=1時的公式二

R(1,1)			L(1,1)
R(1,2)			L(1,2)

(6)套用b=1時的公式二

R(1,2)			L(1,1)
R(1,1)			L(1,2)

步數計算： $y = 2$ 時，一共用了 2 次公式一，4 次 $b = 1$ 時的公式二

$$\text{故 } f(1, 2) = 2 \times 5 + 4 \times (3 \times 2 - 3 \times 1 + 4) = 38 \text{ (步)}$$

(II) $y = 3$ 時

<p>初始狀態</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>L(1,3)</td><td></td><td>R(1,3)</td></tr> <tr><td>L(1,2)</td><td></td><td>R(1,2)</td></tr> <tr><td>L(1,1)</td><td></td><td>R(1,1)</td></tr> </table>	L(1,3)		R(1,3)	L(1,2)		R(1,2)	L(1,1)		R(1,1)	<p>(1)套用公式一</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>L(1,3)</td><td></td><td>R(1,3)</td></tr> <tr><td>L(1,2)</td><td></td><td>R(1,2)</td></tr> <tr style="background-color: #f8d7da;"><td>L(1,1)</td><td></td><td>R(1,1)</td></tr> </table>	L(1,3)		R(1,3)	L(1,2)		R(1,2)	L(1,1)		R(1,1)	<p>(2)套用$b=1$時的公式二</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr style="background-color: #f8d7da;"><td>L(1,3)</td><td></td><td>R(1,3)</td></tr> <tr style="background-color: #f8d7da;"><td>L(1,2)</td><td></td><td>R(1,2)</td></tr> <tr style="background-color: #f8d7da;"><td>R(1,1)</td><td></td><td>L(1,1)</td></tr> </table>	L(1,3)		R(1,3)	L(1,2)		R(1,2)	R(1,1)		L(1,1)
L(1,3)		R(1,3)																											
L(1,2)		R(1,2)																											
L(1,1)		R(1,1)																											
L(1,3)		R(1,3)																											
L(1,2)		R(1,2)																											
L(1,1)		R(1,1)																											
L(1,3)		R(1,3)																											
L(1,2)		R(1,2)																											
R(1,1)		L(1,1)																											
<p>(3)套用$b=1$時的公式二</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>R(1,1)</td><td></td><td style="background-color: #f8d7da;">R(1,3)</td></tr> <tr><td>L(1,3)</td><td></td><td style="background-color: #f8d7da;">R(1,2)</td></tr> <tr><td>L(1,2)</td><td></td><td style="background-color: #f8d7da;">L(1,1)</td></tr> </table>	R(1,1)		R(1,3)	L(1,3)		R(1,2)	L(1,2)		L(1,1)	<p>(4)套用公式一</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>R(1,1)</td><td></td><td>L(1,1)</td></tr> <tr><td>L(1,3)</td><td></td><td>R(1,3)</td></tr> <tr style="background-color: #f8d7da;"><td>L(1,2)</td><td></td><td>R(1,2)</td></tr> </table>	R(1,1)		L(1,1)	L(1,3)		R(1,3)	L(1,2)		R(1,2)	<p>(5)套用$b=2$時的公式二</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr style="background-color: #f8d7da;"><td>R(1,1)</td><td></td><td>L(1,1)</td></tr> <tr style="background-color: #f8d7da;"><td>L(1,3)</td><td></td><td>R(1,3)</td></tr> <tr style="background-color: #f8d7da;"><td>R(1,2)</td><td></td><td>L(1,2)</td></tr> </table>	R(1,1)		L(1,1)	L(1,3)		R(1,3)	R(1,2)		L(1,2)
R(1,1)		R(1,3)																											
L(1,3)		R(1,2)																											
L(1,2)		L(1,1)																											
R(1,1)		L(1,1)																											
L(1,3)		R(1,3)																											
L(1,2)		R(1,2)																											
R(1,1)		L(1,1)																											
L(1,3)		R(1,3)																											
R(1,2)		L(1,2)																											
<p>(6)套用$b=2$時的公式二</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>R(1,1)</td><td></td><td>L(1,1)</td></tr> <tr><td>R(1,2)</td><td></td><td style="background-color: #f8d7da;">R(1,3)</td></tr> <tr><td>L(1,3)</td><td></td><td style="background-color: #f8d7da;">L(1,2)</td></tr> </table>	R(1,1)		L(1,1)	R(1,2)		R(1,3)	L(1,3)		L(1,2)	<p>(7)套用公式一</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>R(1,1)</td><td></td><td>L(1,1)</td></tr> <tr><td>R(1,2)</td><td></td><td>L(1,2)</td></tr> <tr style="background-color: #f8d7da;"><td>L(1,3)</td><td></td><td>R(1,3)</td></tr> </table>	R(1,1)		L(1,1)	R(1,2)		L(1,2)	L(1,3)		R(1,3)	<p>(8)套用$b=1$時的公式二</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr style="background-color: #f8d7da;"><td>R(1,1)</td><td></td><td>L(1,1)</td></tr> <tr style="background-color: #f8d7da;"><td>R(1,2)</td><td></td><td>L(1,2)</td></tr> <tr style="background-color: #f8d7da;"><td>R(1,3)</td><td></td><td>L(1,3)</td></tr> </table>	R(1,1)		L(1,1)	R(1,2)		L(1,2)	R(1,3)		L(1,3)
R(1,1)		L(1,1)																											
R(1,2)		R(1,3)																											
L(1,3)		L(1,2)																											
R(1,1)		L(1,1)																											
R(1,2)		L(1,2)																											
L(1,3)		R(1,3)																											
R(1,1)		L(1,1)																											
R(1,2)		L(1,2)																											
R(1,3)		L(1,3)																											
<p>(9)套用$b=2$時的公式二</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr style="background-color: #f8d7da;"><td>R(1,3)</td><td></td><td>L(1,1)</td></tr> <tr style="background-color: #f8d7da;"><td>R(1,1)</td><td></td><td>L(1,2)</td></tr> <tr style="background-color: #f8d7da;"><td>R(1,2)</td><td></td><td>L(1,3)</td></tr> </table>	R(1,3)		L(1,1)	R(1,1)		L(1,2)	R(1,2)		L(1,3)	<p>(10)套用$b=1$時的公式二</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr style="background-color: #f8d7da;"><td>R(1,3)</td><td></td><td>L(1,1)</td></tr> <tr style="background-color: #f8d7da;"><td>R(1,2)</td><td></td><td>L(1,2)</td></tr> <tr style="background-color: #f8d7da;"><td>R(1,1)</td><td></td><td>L(1,3)</td></tr> </table>	R(1,3)		L(1,1)	R(1,2)		L(1,2)	R(1,1)		L(1,3)	<p>(11)套用$b=2$時的公式二</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr style="background-color: #f8d7da;"><td>R(1,3)</td><td></td><td>L(1,3)</td></tr> <tr style="background-color: #f8d7da;"><td>R(1,2)</td><td></td><td>L(1,1)</td></tr> <tr style="background-color: #f8d7da;"><td>R(1,1)</td><td></td><td>L(1,2)</td></tr> </table>	R(1,3)		L(1,3)	R(1,2)		L(1,1)	R(1,1)		L(1,2)
R(1,3)		L(1,1)																											
R(1,1)		L(1,2)																											
R(1,2)		L(1,3)																											
R(1,3)		L(1,1)																											
R(1,2)		L(1,2)																											
R(1,1)		L(1,3)																											
R(1,3)		L(1,3)																											
R(1,2)		L(1,1)																											
R(1,1)		L(1,2)																											

步數計算： $y = 3$ 時，一共用了3次公式一，4次 $b = 1$ 時的公式二，4次 $b = 2$ 時的公式二

$$\text{故 } f(1,3) = 2 \times 5 + 4 \times (3 \times 3 - 3 \times 1 + 4) + 4 \times (3 \times 3 - 3 \times 2 + 4) = 78 (\text{步})$$

(III) 一般化步數計算

由上述可知：

$$f(1,1) = 5$$

$$f(1,2) = f(1,1) + 5 + 4[3(2-1) + 4]$$

$$f(1,3) = f(1,2) + 5 + 4[3(3-1) + 4]$$

⋮

$$f(1,y) = f(1,y-1) + 5 + 4[3(y-1) + 4]$$

將以上算式加起來，可得：

$$f(1,y) = 5y + 4[3(2-1) + 4] + 4[3(3-1) + 4] + \dots + 4[3(y-1) + 4]$$

$$= 5y + 12[2 + 3 + \dots + y - (y-2+1)] + 16(y-2+1)$$

$$= 5y + 12\left[\frac{(y+2)(y-1)}{2} - (y-1)\right] + 16(y-1)$$

$$\begin{aligned}
&= 5y + 6(y^2 + y - 2) - 12y + 12 + 16y - 16 \\
&= 6y^2 + 6y + 5y - 12y + 16y - 16 \\
&= 6y^2 + 15y - 16
\end{aligned}$$

結論一

單線棋盤(1×y 棋盤)左右兩側棋子互換位置之通式解步數 $f(1, y) = 6y^2 + 15y - 16$

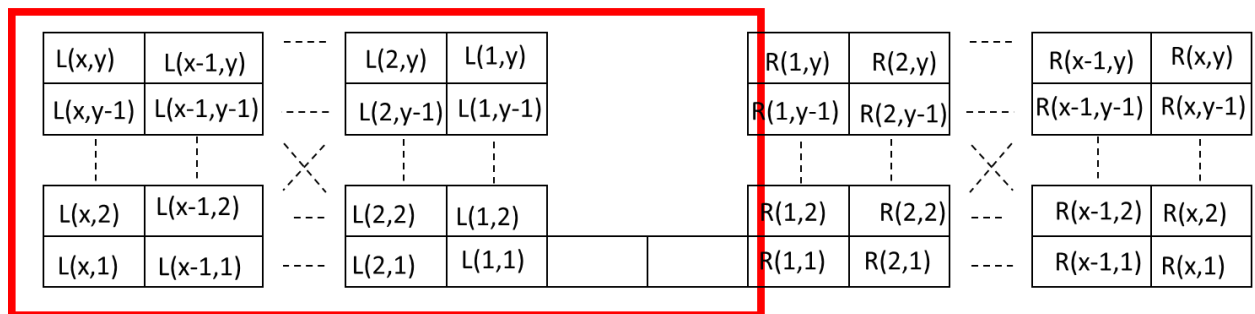
研究二、正方形棋盤 (探討 $f(x, y)$ 中， $x = y$ 的棋盤之通式解)

在這之前，我們再補充幾個公式：

公式三 (僅用於二維棋盤) 將最右邊的棋子移到最左邊：

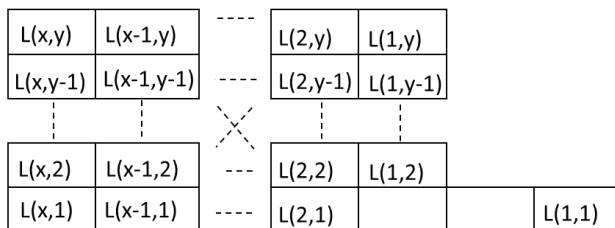
關於公式三，以下僅針對L作說明，R的部分鏡像即可

初始狀態

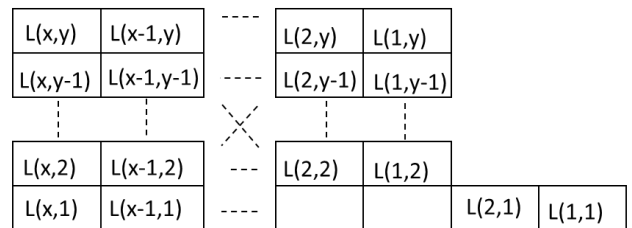


接著，我們將上圖左側局部放大步驟化說明移動方式：

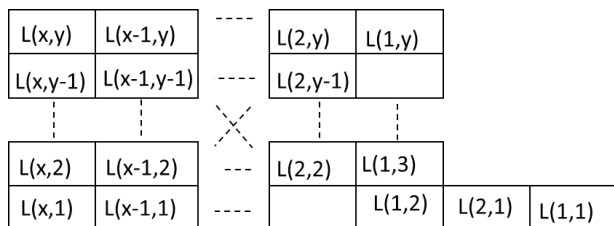
(1) L(1,1) 向右兩格



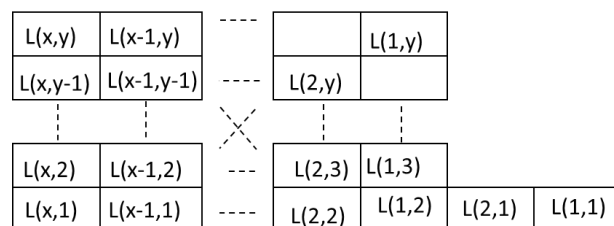
(2) L(2,1) 向右兩格



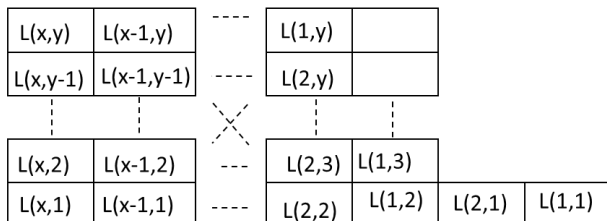
(3) 依序將 $L(2,1) \sim L(b^2-1,1)$ 下移一格



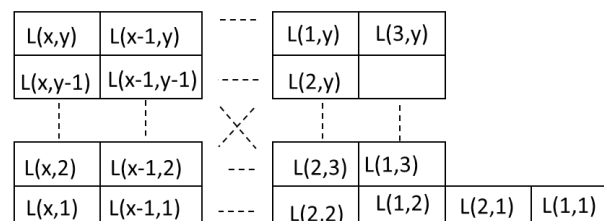
(4) 依序將 $L(2,2) \sim L(b,2)$ 下移一格



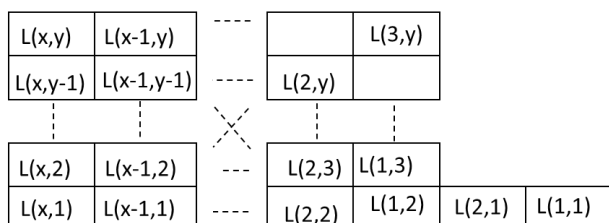
(5) $L(1,b)$ 左移一格



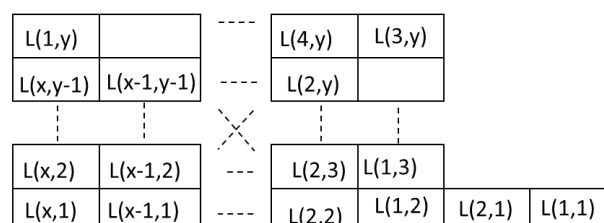
(6) $L(3,b)$ 向右跳過 $L(1,b)$



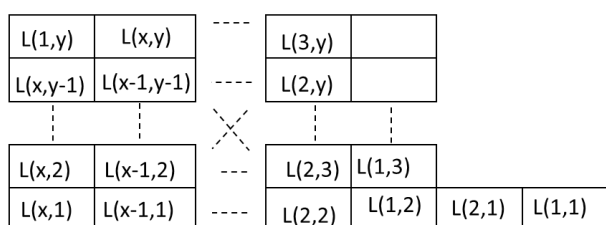
(7) $L(1,b)$ 左移一格



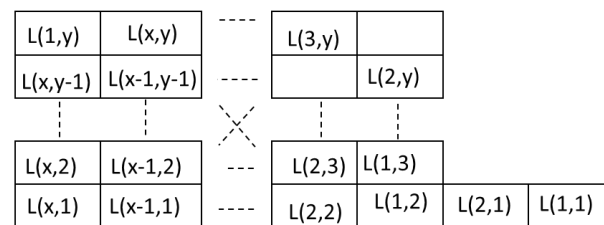
(8) 重複(6)、(7) $x-3$ 次



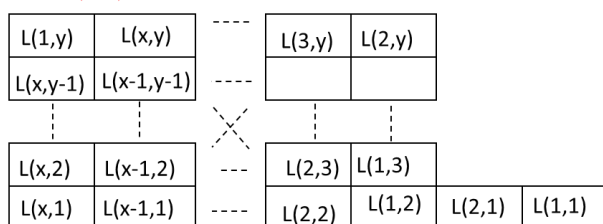
(9) 依序將 $L(x,b) \sim L(3,b)$ 向左一格



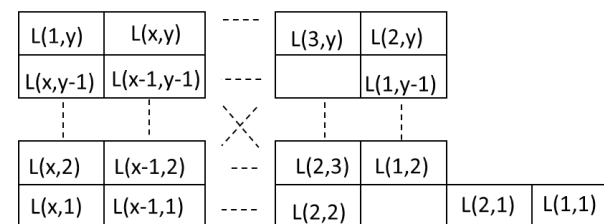
(10) $L(2,b)$ 向右一格



(11) $L(2,b)$ 向上一格

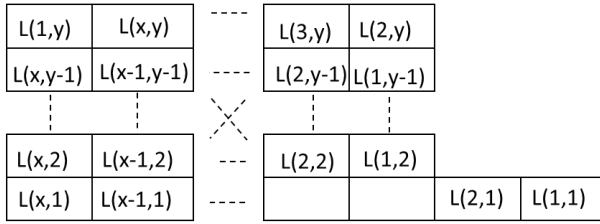


(12) 依序將 $L(1,b-1) \sim L(1,2)$ 上移一格

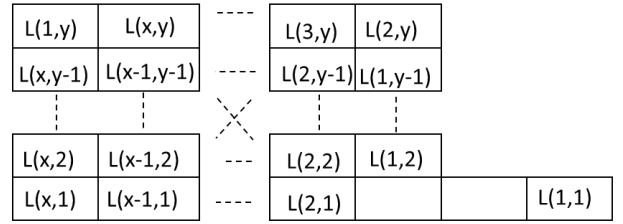


² 此處以 $b = y$ 作為範例

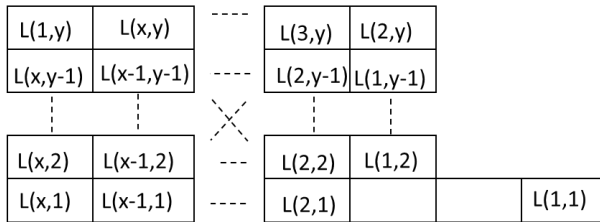
(13) 依序將L(2,b-1)~L(2,2)上移一格



(14) L(2,1)向左兩格



(15) L(1,1)向左兩格

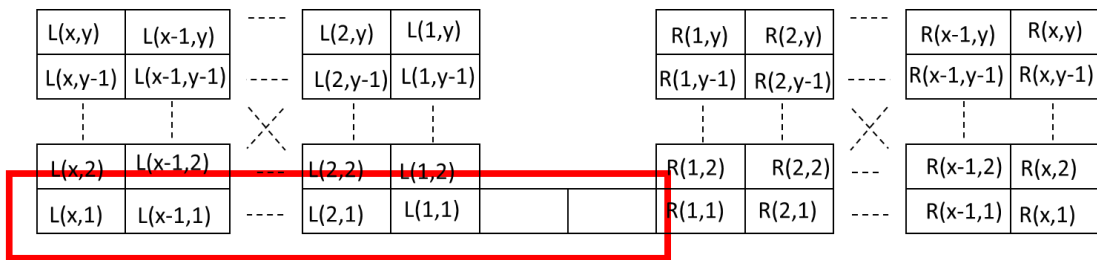


*∴公式三的步數為：

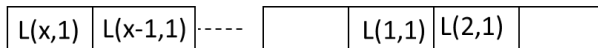
$$\begin{aligned}
 &4 + b - 2 + b - 1 + 3 + 2(x - 3) + x - 2 + 2 + 2(b - 2) + 4 \\
 &= 4 + 2b + 2x - 6 + x + 2b \\
 &= 4b + 3x - 2
 \end{aligned}$$

公式四：將(1,1)移至最左邊

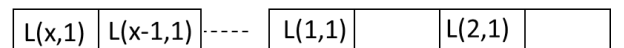
初始狀態



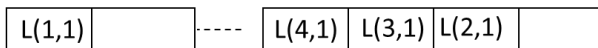
(1) L(2,1)向右跳過(1,1)



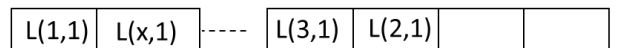
(2) L(1,1)向左一格



(3) 重複(1)、(2)x-2次



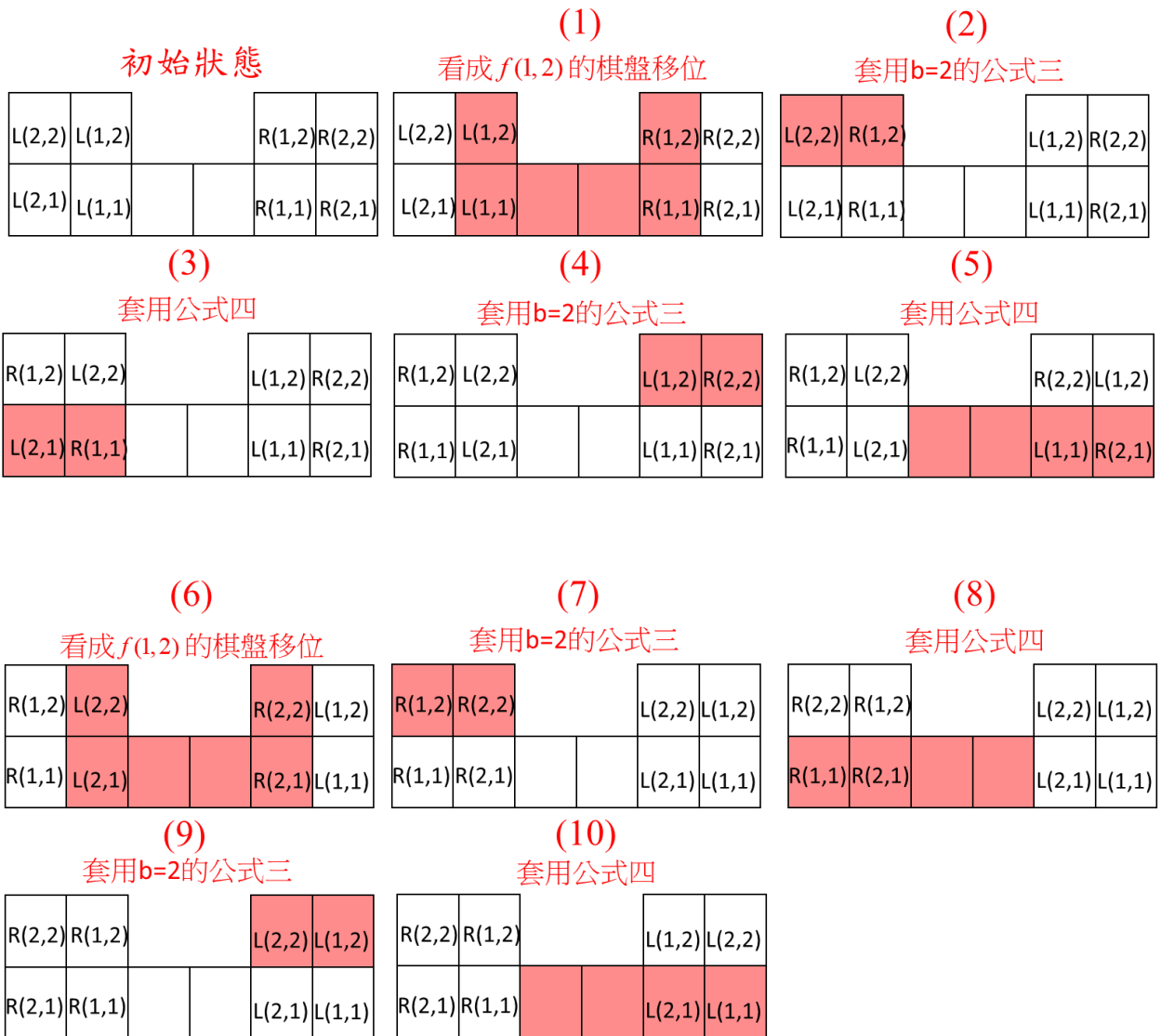
(4) 將L(x,1)~L(2,1)依序向右一格



*∴公式四的步數為： $2 + 2(x - 2) + x - 1 = 3x - 3$ (步)

我們同樣先從 $x = 2, 3, \dots$ 依序往下探討：

(I) $x = 2$ 時



步數計算： $x = 2$ 時，一共用了 2 次 $f(1,2)$ 時的棋盤移位，4 次 $b = 2$ 時的公式三，

4 次公式四

故總步數為：

$$\begin{aligned}
 & 2f(1,2) + 4 \times (4 \times 2 + 3 \times 2 - 2) + 4 \times (3 \times 2 - 3) \\
 &= (24 + 30 - 16) \times 2 + 48 + 12 \\
 &= 76 + 60 \\
 &= 136(\text{步})
 \end{aligned}$$

(II) $x = 3$ 時

初始狀態

L(3,3)	L(2,3)	L(1,3)			R(1,3)	R(2,3)	R(3,3)
L(3,2)	L(2,2)	L(1,2)			R(1,2)	R(2,2)	R(3,2)
L(3,1)	L(2,1)	L(1,1)			R(1,1)	R(2,1)	R(3,1)

(1)

看成 $f(1,3)$ 的棋盤移位

L(3,3)	L(2,3)	L(1,3)			R(1,3)	R(2,3)	R(3,3)
L(3,2)	L(2,2)	L(1,2)			R(1,2)	R(2,2)	R(3,2)
L(3,1)	L(2,1)	L(1,1)			R(1,1)	R(2,1)	R(3,1)

(2)

兩邊分別套用 $b=3$ 的公式三

L(3,3)	L(2,3)	R(1,3)			L(1,3)	R(2,3)	R(3,3)
L(3,2)	L(2,2)	R(1,2)			L(1,2)	R(2,2)	R(3,2)
L(3,1)	L(2,1)	R(1,1)			L(1,1)	R(2,1)	R(3,1)

(3)

兩邊分別套用 $b=2$ 的公式三

R(1,3)	L(3,3)	L(2,3)			R(2,3)	R(3,3)	L(1,3)
L(3,2)	L(2,2)	R(1,2)			L(1,2)	R(2,2)	R(3,2)
L(3,1)	L(2,1)	R(1,1)			L(1,1)	R(2,1)	R(3,1)

(4)

兩邊分別套用公式四

R(1,3)	L(3,3)	L(2,3)			R(2,3)	R(3,3)	L(1,3)
R(1,2)	L(3,2)	L(2,2)			R(2,2)	R(3,2)	L(1,2)
L(3,1)	L(2,1)	R(1,1)			L(1,1)	R(2,1)	R(3,1)

(5)

看成 $f(1,3)$ 的棋盤移位

R(1,3)	L(3,3)	L(2,3)			R(2,3)	R(3,3)	L(1,3)
R(1,2)	L(3,2)	L(2,2)			R(2,2)	R(3,2)	L(1,2)
R(1,1)	L(3,1)	L(2,1)			R(2,1)	R(3,1)	L(1,1)

(6)

兩邊分別套用 $b=3$ 的公式三

R(1,3)	L(3,3)	R(2,3)			L(2,3)	R(3,3)	L(1,3)
R(1,2)	L(3,2)	R(2,2)			L(2,2)	R(3,2)	L(1,2)
R(1,1)	L(3,1)	R(2,1)			L(2,1)	R(3,1)	L(1,1)

(7)

兩邊分別套用 $b=2$ 的公式三

R(2,3)	R(1,3)	L(3,3)			R(3,3)	L(1,3)	L(2,3)
R(1,2)	L(3,2)	R(2,2)			L(2,2)	R(3,2)	L(1,2)
R(1,1)	L(3,1)	R(2,1)			L(2,1)	R(3,1)	L(1,1)

(8)

兩邊分別套用公式四

R(2,3)	R(1,3)	L(3,3)			R(3,3)	L(1,3)	L(2,3)
R(2,2)	R(1,2)	L(3,2)			R(3,2)	L(1,2)	L(2,2)
R(1,1)	L(3,1)	R(2,1)			L(2,1)	R(3,1)	L(1,1)

(9)

看成 $f(1,3)$ 的棋盤移位

R(2,3)	R(1,3)	L(3,3)			R(3,3)	L(1,3)	L(2,3)
R(2,2)	R(1,2)	L(3,2)			R(3,2)	L(1,2)	L(2,2)
R(2,1)	R(1,1)	L(3,1)			R(3,1)	L(1,1)	L(2,1)

(10)

兩邊分別套用 $b=3$ 的公式三

R(2,3)	R(1,3)	R(3,3)			L(3,3)	L(1,3)	L(2,3)
R(2,2)	R(1,2)	R(3,2)			L(3,2)	L(1,2)	L(2,2)
R(2,1)	R(1,1)	R(3,1)			L(3,1)	L(1,1)	L(2,1)

(11)

兩邊分別套用 $b=2$ 的公式三

R(3,3)	R(2,3)	R(1,3)			L(1,3)	L(2,3)	L(3,3)
R(2,2)	R(1,2)	R(3,2)			L(3,2)	L(1,2)	L(2,2)
R(2,1)	R(1,1)	R(3,1)			L(3,1)	L(1,1)	L(2,1)

(12)

兩邊分別套用公式四

R(3,3)	R(2,3)	R(1,3)			L(1,3)	L(2,3)	L(3,3)
R(3,2)	R(2,2)	R(1,2)			L(3,2)	L(1,2)	L(2,2)
R(2,1)	R(1,1)	R(3,1)			L(3,1)	L(1,1)	L(2,1)

步數計算： $x=3$ 時，一共用了 3 次 $f(1,3)$ 時的棋盤移位，6 次 $b=2$ 時的公式二，6 次 $b=3$ 時的公式二，6 次公式四

故總步數為

$$\begin{aligned}
& 3f(1,3) + 6 \times (4 \times 2 + 3 \times 3 - 2) + 6 \times (4 \times 3 + 3 \times 3 - 2) + 6 \times (3 \times 3 - 3) \\
&= (54 + 45 - 16) \times 3 + 90 + 114 + 36 \\
&= 249 + 240 \\
&= 489(\text{步})
\end{aligned}$$

(III) 一般化步數計算

$x = y$ 時，一共會用到 x 次棋盤為 $f(1, y)$ 時的移位方法， $2x$ 次 $b = 2$ 時的公式三、 $2x$ 次 $b = 3$ 時的公式三、... $2x$ 次 $b = x - 1$ 時的公式三、 $2x$ 次 $b = x$ 時的公式三， $2x$ 次公式四

所以正方形棋盤左右互換所需的通式解步數 $f(x, x)$ 為：

$$\begin{aligned}
 & x \cdot f(1, x) + 2x\{(3x+8-2) + (3x+12-2) + \dots + [3x+4(x-1)-2] + (3x+4x-2)\} + 2x(3x-3) \\
 &= 6x^3 + 15x^2 - 16x + 2x\left[\left(\frac{4x-8}{4} + 1\right)(3x-2) + \frac{\left(\frac{4x-8}{4} + 1\right)(4x+8)}{2}\right] + 2x(3x-3) \\
 &= 6x^3 + 15x^2 - 16x + 2x[(x-1)(3x-2) + (x-1)(2x+4)] + 2x(3x-3) \\
 &= 6x^3 + 15x^2 - 16x + (2x^2 - 2x)(5x+2) + 2x(3x-3) \\
 &= 6x^3 + 15x^2 - 16x + 10x^3 - 6x^2 - 4x + 6x^2 - 6x \\
 &= 16x^3 + 15x^2 - 26x
 \end{aligned}$$

結論二

正方形棋盤 ($x \times x$ 棋盤) 左右兩側棋子互換位置之通式解步數 $f(x, x) = 16x^3 + 15x^2 - 26x$

研究三、任意矩形棋盤 (探討 $f(x, y)$ 中， $x \neq y$ 且 $x > 1$ 的棋盤之通式解)

我們先從 $f(2, 3)$ 和 $f(3, 2)$ 的情況探討：

(I) $f(3, 2)$ 時

初始狀態

L(3,2)	L(2,2)	L(1,2)			R(1,2)	R(2,2)	R(3,2)
L(3,1)	L(2,1)	L(1,1)			R(1,1)	R(2,1)	R(3,1)

(2)

兩邊分別套用 $b=2$ 的公式三

L(3,2)	L(2,2)	R(1,2)			L(1,2)	R(2,2)	R(3,2)
L(3,1)	L(2,1)	R(1,1)			L(1,1)	R(2,1)	R(3,1)

(1)

看成 $f(1, 2)$ 的棋盤移位

L(3,2)	L(2,2)	L(1,2)			R(1,2)	R(2,2)	R(3,2)
L(3,1)	L(2,1)	L(1,1)			R(1,1)	R(2,1)	R(3,1)

(3)

兩邊分別套用公式四

R(1,2)	L(3,2)	L(2,2)			R(2,2)	R(3,2)	L(1,2)
L(3,1)	L(2,1)	R(1,1)			L(1,1)	R(2,1)	R(3,1)

(4)

看成 $f(1,2)$ 的棋盤移位

R(1,2)	L(3,2)	L(2,2)			R(2,2)	R(3,2)	L(1,2)
R(1,1)	L(3,1)	L(2,1)			R(2,1)	R(3,1)	L(1,1)

(5)

兩邊分別套用 $b=2$ 的公式三

R(1,2)	L(3,2)	R(2,2)			L(2,2)	R(3,2)	L(1,2)
R(1,1)	L(3,1)	R(2,1)			R(2,1)	R(3,1)	L(1,1)

(6)

兩邊分別套用公式四

R(2,2)	R(1,2)	L(3,2)			R(3,2)	L(1,2)	L(2,2)
R(1,1)	L(3,1)	R(2,1)			R(2,1)	R(3,1)	L(1,1)

(7)

看成 $f(1,2)$ 的棋盤移位

R(2,2)	R(1,2)	L(3,2)			R(3,2)	L(1,2)	L(2,2)
R(2,1)	R(1,1)	L(3,1)			R(3,1)	L(1,1)	L(2,1)

(8)

兩邊分別套用 $b=2$ 的公式三

R(2,2)	R(2,1)	R(2,3)			L(2,3)	L(2,1)	L(2,2)
R(1,2)	R(1,1)	R(1,3)			L(1,3)	L(1,1)	L(1,2)

(9)

兩邊分別套用公式四

R(2,3)	R(2,2)	R(2,1)			L(2,1)	L(2,2)	L(2,3)
R(1,2)	R(1,1)	R(1,3)			L(1,3)	L(1,1)	L(1,2)

$f(3,2)$ 時，一共用了 3 次 $f(1,2)$ 時的棋盤移位，6 次 $b=2$ 時的公式二，6 次公式四

故總步數為

$$\begin{aligned}
& 3f(1,2) + 6 \times (4 \times 2 + 3 \times 3 - 2) + 6 \times (3 \times 3 - 3) \\
&= 3 \times (24 + 30 - 16) + 90 + 36 \\
&= 114 + 126 \\
&= 240
\end{aligned}$$

(II) $f(2,3)$ 時

初始狀態

L(2,3)	L(1,3)			R(1,3)	R(2,3)
L(2,2)	L(1,2)			R(1,2)	R(2,2)
L(2,1)	L(1,1)			R(1,1)	R(2,1)

(1)

看成 $f(1,3)$ 的棋盤移位

L(2,3)	L(1,3)			R(1,3)	R(2,3)
L(2,2)	L(1,2)			R(1,2)	R(2,2)
L(2,1)	L(1,1)			R(1,1)	R(2,1)

(2)

兩邊分別套用 $b=3$ 的公式三

L(2,3)	R(1,3)			L(1,3)	R(2,3)
L(2,2)	R(1,2)			L(1,2)	R(2,2)
L(2,1)	R(1,1)			L(1,1)	R(2,1)

(3)

兩邊分別套用 $b=2$ 的公式三

R(1,3)	L(2,3)			R(2,3)	L(1,3)
L(2,2)	R(1,2)			L(1,2)	R(2,2)
L(2,1)	R(1,1)			L(1,1)	R(2,1)

(4)

兩邊分別套用公式四

R(1,3)	L(2,3)			R(2,3)	L(1,3)
R(1,2)	L(2,2)			R(2,2)	L(1,2)
L(2,1)	R(1,1)			L(1,1)	R(2,1)

(5)

看成 $f(1,3)$ 的棋盤移位

R(1,3)	L(2,3)			R(2,3)	L(1,3)
R(1,2)	L(2,2)			R(2,2)	L(1,2)
R(1,1)	L(2,1)			R(2,1)	L(1,1)

(6)

兩邊分別套用**b=3**的公式三

R(1,3)	R(2,3)			L(2,3)	L(1,3)
R(1,2)	R(2,2)			L(2,2)	L(1,2)
R(1,1)	R(2,1)			L(2,1)	L(1,1)

(7)

兩邊分別套用**b=2**的公式三

R(2,3)	R(1,3)			L(1,3)	L(2,3)
R(1,2)	R(2,2)			L(2,2)	L(1,2)
R(1,1)	R(2,1)			L(2,1)	L(1,1)

(8)

兩邊分別套用公式四

R(2,3)	R(1,3)			L(1,3)	L(2,3)
R(2,2)	R(1,2)			L(1,2)	L(2,2)
R(1,1)	R(2,1)			L(2,1)	L(1,1)

$f(2,3)$ 時，一共用了2次 $f(1,3)$ 時的棋盤移位，4次 $b=2$ 時的公式二，4次 $b=3$ 時的公式二，4次公式四

故總步數為

$$\begin{aligned}
& 2f(1,3) + 4 \times (4 \times 2 + 3 \times 2 - 2) + 4 \times (4 \times 3 + 3 \times 2 - 2) + 4 \times (3 \times 2 - 3) \\
& = 2 \times (54 + 45 - 16) + 48 + 64 + 12 \\
& = 166 + 124 \\
& = 290
\end{aligned}$$

(III) 一般化步數計算

一共會用到 x 次棋盤為 $f(1, y)$ 時的移位方法， $2x$ 次 $b=2$ 時的公式三、 $2x$ 次 $b=3$ 時的公式三、... $2x$ 次 $b=y-1$ 時的公式三、 $2x$ 次 $b=y$ 時的公式三， $2x$ 次公式四

所以任意矩形棋盤左右互換所需的通式解步數 $f(x, y)$ 為：

$$\begin{aligned} & x \cdot f(1, y) + 2x\{(3x+8-2) + (3x+12-2) + \dots + [3x+4(y-1)-2] + (3x+4y-2)\} + 2x(3x-3) \\ &= 6xy^2 + 15xy - 16x + 2x[(3x-2)(y-1) + \frac{(4y+8)(y-1)}{2}] + 2x(3x-3) \\ &= 6xy^2 + 15xy - 16x + 2x[(y-1)(3x+2y+2)] + 2x(3x-3) \\ &= 6xy^2 + 15xy - 16x + 2x[2y^2 + 3xy - 3x - 2] + 6x^2 - 6x \\ &= 6xy^2 + 15xy - 16x + 4xy^2 + 6x^2y - 6x^2 - 4x + 6x^2 - 6x \\ &= 10xy^2 + 6x^2y + 15xy - 26x \end{aligned}$$

結論三

矩形 $x \times y$ 棋盤 ($x \neq y$ 且 $x > 1$) 左右兩側棋子互換位置之通式解步數

$$f(x, y) = 10xy^2 + 6x^2y + 15xy - 26x$$

伍、討論與未來展望

未來我們可以改變格子的形狀，像是三角形、五邊形、六邊形等，也可以增加數條連線讓單線移位棋，增加至雙線三線或更多，總而言之移位棋這個遊戲是一個極具創新性及挑戰性的遊戲。

陸、結論

一、單線棋盤($1 \times y$ 棋盤)左右兩側棋子互換位置之通式解步數 $f(1, y) = 6y^2 + 15y - 16$

二、正方形棋盤($x \times x$ 棋盤)左右兩側棋子互換位置之通式解步數 $f(x, x) = 16x^3 + 15x^2 - 26x$

三、任意矩形棋盤($x \times y$ 棋盤)左右兩側棋子互換位置之通式解步數

$$f(x, y) = 10xy^2 + 6x^2y + 15xy - 26x$$

四、本研究不是只做一般移位跳棋，而是替每顆棋子編上固定編號，要求「對號互換」。

這讓遊戲變成有方向、有限制的排序問題，使數學結構更完整，也能推廣到更多棋盤類型。

五、從最簡單的單線棋盤開始，我們建立了能處理任意長度的步數通式。進一步在二維棋盤中，並設計橫向、縱向的結構化移位方法（公式三、公式四），最後推導出**適用所有 $x \times y$ 棋盤的遞迴通式**。

六、我們觀察到二維移位的核心其實是多層一維移位的組合。利用這個結構，我們能逐層處理棋盤，讓複雜的移動過程變得可以計算、可證明、可預測。

七、本研究方法可延伸至三角形、六邊形、環形棋盤，甚至多線、多層級跳棋。也能應用到排序問題、路徑規劃或程式模擬等其他領域。

柒、參考資料

[1]第 24 屆初小組<有趣的移位遊戲>

[2]第 34 屆高小組<毛毛蟲變蝴蝶~移位遊戲的新發現>

[3]第 41 屆國中組<個人移位跳棋遊戲的探討>

[4]第 44 屆國小組<三色移位毛毛蟲~三色移位遊戲的探討>

[5]第 46 屆國小組<乾坤大挪移>

[6]第 47 屆國小組<跳島攻法—破解移位遊戲的最佳策略>

[7]第 48 屆國小組<毛毛蟲爬眼鏡-移位遊戲變形玩法>

[8]第 51 屆國小組<向左走向右走~相鄰移位遊戲最佳策略探討之研究>

[9]第 53 屆國小組<「毛蟲」「塔」-移位遊戲混合版初探>

[10]第 56 屆國小組<「青蛙」「塔」移位遊戲>