新竹市第四十四屆中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：從五方連看一刀剪

關 鍵 詞：五方連、一刀剪

編號：

摘要

本研究以五連方為出發點，觀察到有對稱軸的五連方多能透過層疊完成一刀剪，並於文獻探討中定義出「脊椎摺法」的概念，發現所有五連方皆可用脊椎摺法剪出，進一步分析後歸納出脊椎摺法適用的必要條件，並將之推廣至多邊形：對於任意凸 n 邊形，完成一刀剪需進行 n-2 次邊合併，於前 n-3 次合併後，圖形將摺為三角形，最後一次合併使所有邊匯聚成一條邊，從而完成一刀剪；若為凹多邊形，則以凹角的角平分線為谷線，其餘角平分線為山線，依照凸多邊形的摺法操作即可成功一刀剪，由此可推論任意多邊形皆能以脊椎摺法一刀剪。最後，本研究亦探討多邊形的剪線長度，並推廣至任意多邊形。

壹、研究動機

課堂上老師給我們操作五方連拼出矩形的活動，老師的教具是透過雷射切割機產出，由於教具模組數量不多，導致有些組別需與別組共用，不甚方便，於是自己動手畫方格剪紙製作五方連。很偶然的，在網路上看到了一刀剪的研究，我們思考：是否五方連也可一刀剪？因此開啟了我們的一刀剪研究之旅。

貳、研究目的

(一) 探討五方連之一刀剪方法。

(二) 探討任意凸多邊形一刀剪的方法與限制。

(三) 探討任意凹多邊形一刀剪的方法與限制。

(四) 探討無對稱軸之非封閉多邊形一刀剪的方法與限制。

(五) 圓盤堆疊法的深入研究。

(六) 探討任意由直線構成的多邊形的剪線長度。

參、研究設備與器材

電腦、紙、筆、剪刀、方格紙、GSP 軟體(繪圖工具)。

肆、研究過程與方法

一、名詞定義

(一) 一刀剪：

將一張紙以任意方式壓平折疊，剪一刀直線剪出圖形。

(二) 五連方的圖形定義：

(正方形邊長=五連方最長邊+2)。

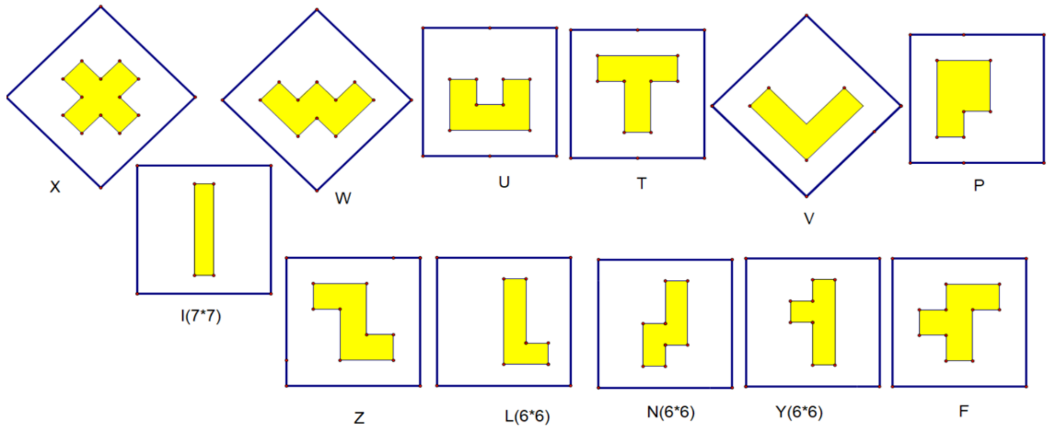


圖 1：五連方圖形定義

(三) 全圖層摺疊法：

每個步驟都將所有圖層一起摺疊。

(四) 脊椎摺法：

一種平面摺疊方法，以山線及谷線進行摺疊。在研究結果會仔細說明。

(五) 山線(以紅色實線表示)：

向外摺疊的摺線。

(六) 谷線(以藍色虛線表示)：

向內摺疊的摺線。

(七) n-gap：

碰到 n 個圓的縫隙，如：3-gap = 碰到 3 個圓的縫隙。

(八) 剪線：

圖形摺疊後，進行一刀剪所剪的線段。

二、定理 (證明見附錄)

(一) 前川定理：

平面摺紙的每個頂點，山線數和谷線數在任意方向上都差 2。

(二) 川崎定理：

平面摺紙的每個頂點，從任意一個角開始依序編號，奇數角度的總和是 180 度，偶數角的和也是 180 度。

本篇報告使用的摺線皆符合前川定理及川崎定理。

三、圖片來源及宣告

本文中除了下列採用的圖，其餘皆由 GSP 繪圖軟體自行繪製 。

直接取用：

1. 直骨架法: Stefan Huber (2012) Wiki/Straight Skeleton 目錄。(圖 3、圖 4)

二次創作：

1. 烏龜的摺紙與一刀剪。將網站原圖用 GSP 描繪過的。(圖 2)
2. 圓盤堆疊法。報告中左圖為網站原圖用 GSP 描繪過的，右圖為二次創作。(圖 5)

四、文獻探討

(一) 文獻與本研究的差異

序號	文獻名稱	研究內容與摘要	與本研究的差異處與啟發
1	神奇一刀剪 (46 屆國中組)	這篇科展內容主要找出在紙中央剪出各種圖形的方法、一刀將一個大正方形等分成 n 個小正方形的方法，及一剪出錐體、柱體的展開圖的方法。	1.啟發：讓我們了解如何定量一刀剪的過程，並分析各種不同折法。 2.差異：他們主要探討規則多邊形的一刀剪，而我們則擴展到任意多邊形。

2	烏龜摺紙一刀剪	這個網站主要針對一隻烏龜進行一刀剪，包含每一步驟詳細的摺法。	
3	Erik Demaine 教授網站及影片	對一刀剪有深入的研究	啟發：從全圖層摺疊法往脊椎折法的方向研究
4	何老的一刀剪圖庫	此網站有豐富的一刀剪素材	

表 1：文獻探討與本研究的差異

(二) 烏龜摺紙與一刀剪

在 Science. Smith 的網站中，說明了烏龜一刀剪的方法，將一隻烏龜畫上山線和谷線，摺好後一刀剪下，即可剪出一隻烏龜。我們照著圖 2-1 的摺痕圖，得到圖 2-2 的剪後樣子。

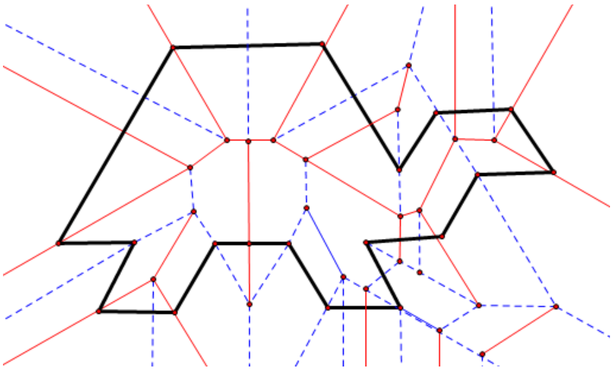


圖 2-1：烏龜摺痕圖

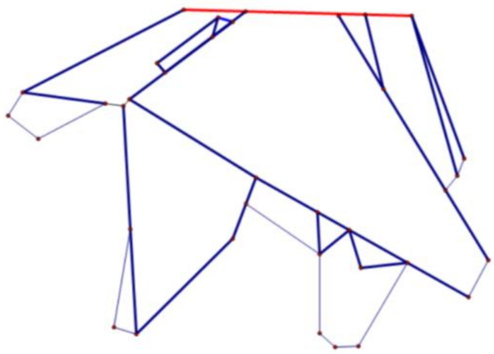


圖 2-2：烏龜一刀剪前的狀態

(三) Erik Demaine 摺剪影片

1. 直骨架法(Straight Skeleton)：

多邊形由邊開始以恆定的速度連續平行向內收縮。如果其中一個移動的頂點與不相鄰的邊相撞，多邊形就會被一分為二，直線骨架是移動頂點在過程中描繪出的線段的組合。圖 3 顯示了收縮過程，圖 4 以藍色表示直線骨架。

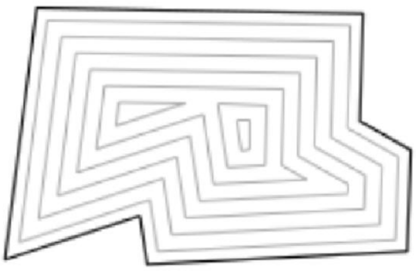


圖 3：直骨架法收縮過程

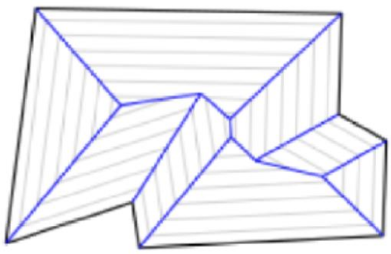


圖 4：直骨架法直線骨架

2. 圓盤堆疊法(Disk-Packing)：

將圖形以頂點為圓心畫圓，圓之間的空隙碰到 3~4 個圓，圓的切線取出交點，從圖形的頂點連線到交點，將部分的點連線，再視情況增加或刪減摺線。

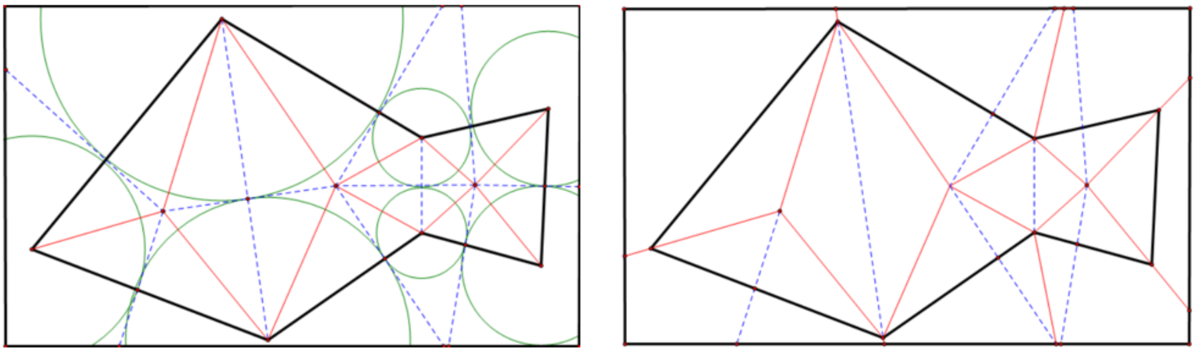


圖 5：圓盤堆疊法(魚)

五、一刀剪方法：全圖層摺疊法、脊椎摺法

(一) 全圖層摺疊法

每個步驟都將所有圖層一起摺疊。

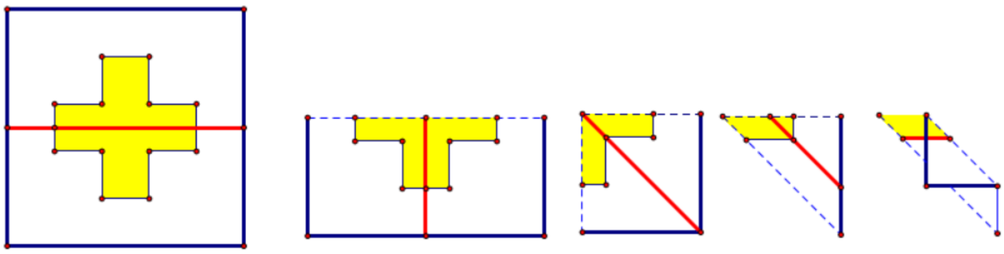


圖 6：十字形全圖層摺疊法

圖 6 的十字經過不斷層疊，進而進行一刀剪，這種摺法稱為全圖層摺疊法。

(二) 脊椎摺法

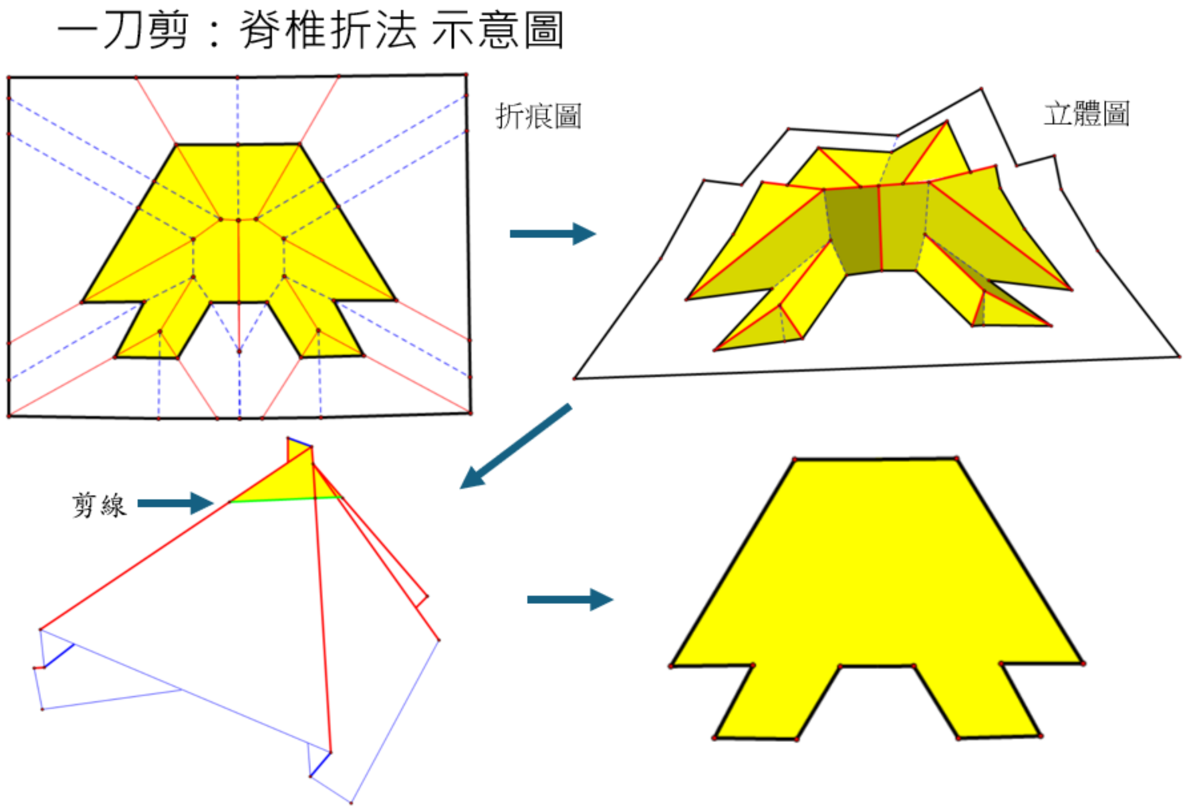


圖 7：一刀剪脊椎摺法示意圖

多邊形大多要在兩個皆為山線的角中加入與邊垂直的谷線。將這些邊取出交點，再將這些交點連成山線。由於交點連成的山線大多居圖形的中央，貫穿整個圖形，因此將這種摺法則稱為**脊椎摺法**，在研究結果會有詳細的說明。

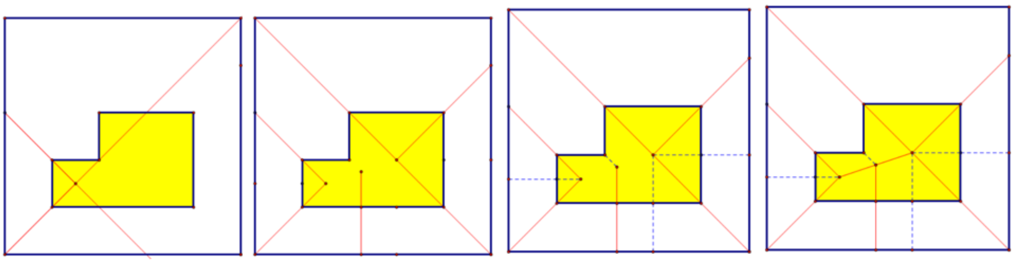


圖 8-1　　圖 8-2　　圖 8-3　　圖 8-4

圖 8-1 先標示出角平分線，取出交點後留下需要的線段，如圖 8-2。在兩條山線間視情況加入與邊垂直的谷線，如圖 8-3，最後將角平分線交點以山線連起來，得圖 8-4。

伍、研究結果

研究一、五連方的一刀剪

可依據對稱軸的有無分成 2 類：

有對稱軸：X 型、V 型、W 型、U 型、T 型、I 型。

無對稱軸：P 型、Z 型、L 型、N 型、Y 型、F 型。

有對稱軸的五連方較為簡易，因為一開始就能依對稱軸將邊數減半，大多可以一次將所有圖層一起折疊。以下列出有**對稱軸圖形的摺法(全圖層摺疊法)**：

1. X 型

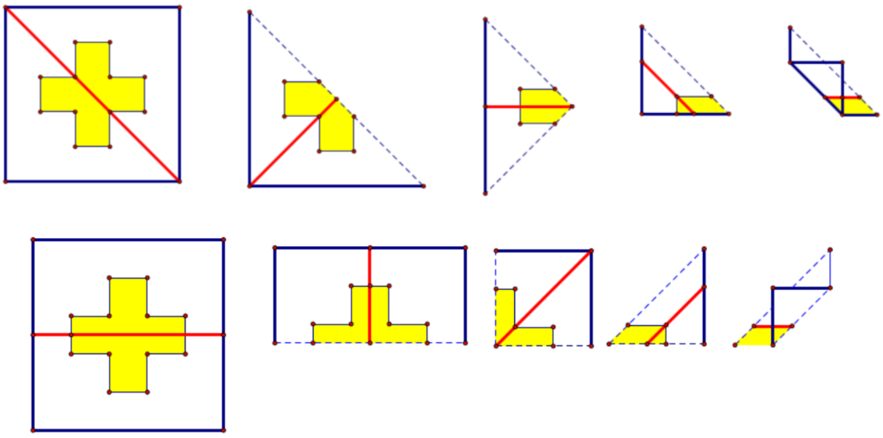


圖 9：X 型

2. I 型

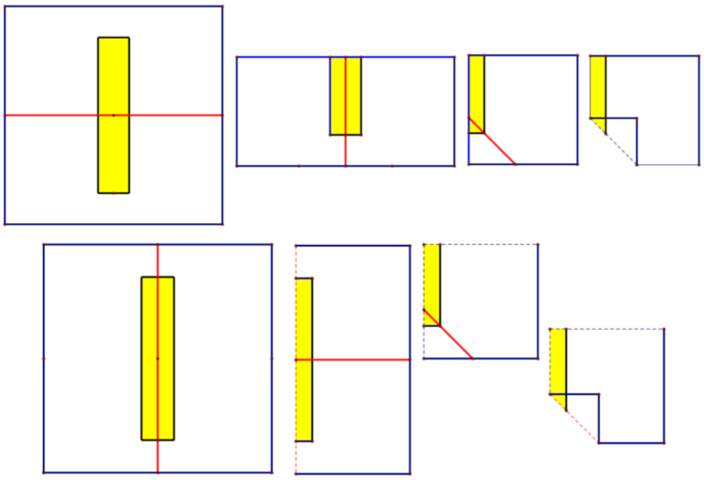


圖 10：I 型

3. W 型

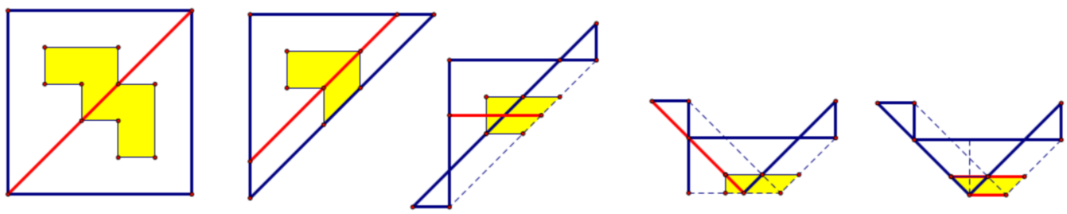


圖 11：W 型

4. U 型

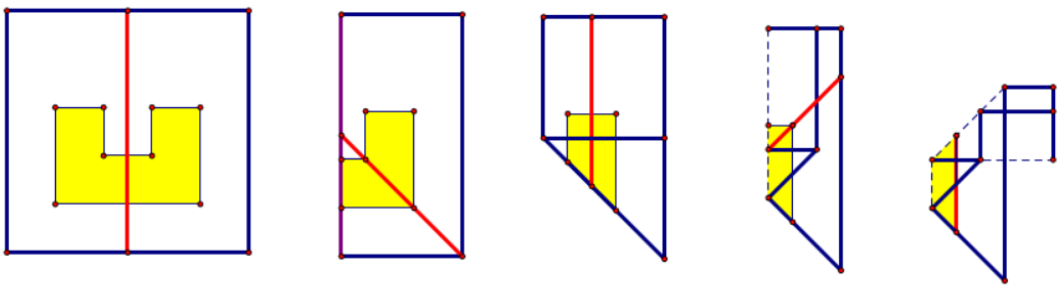


圖 12：U 型

5. T 型

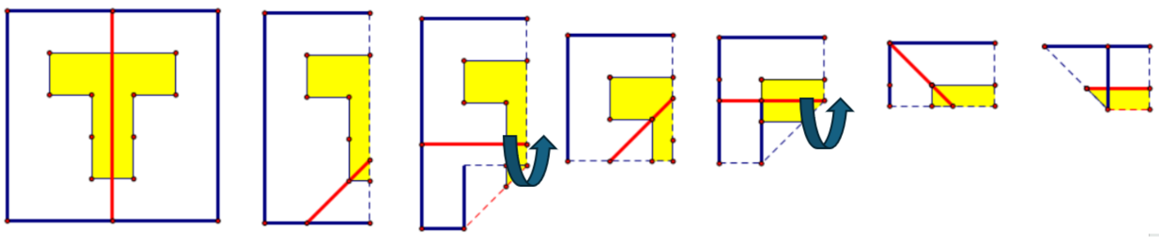


圖 13：T 型

6. V 型

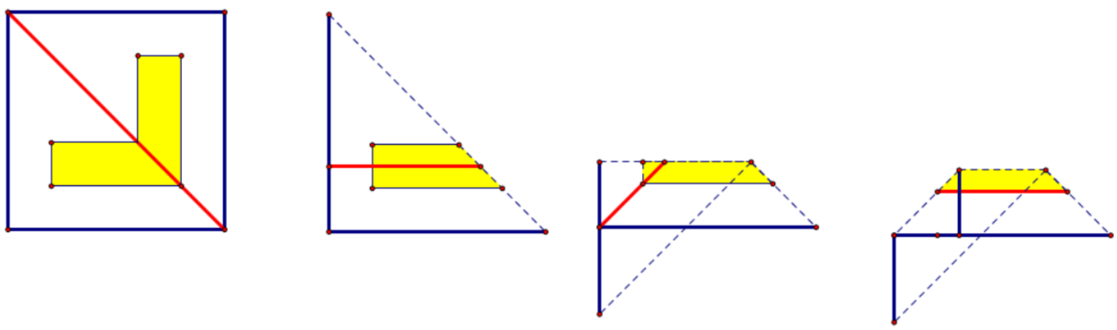


圖 14：V 型

五連方依全圖層摺疊法展開後，可以得到以下的摺痕圖：

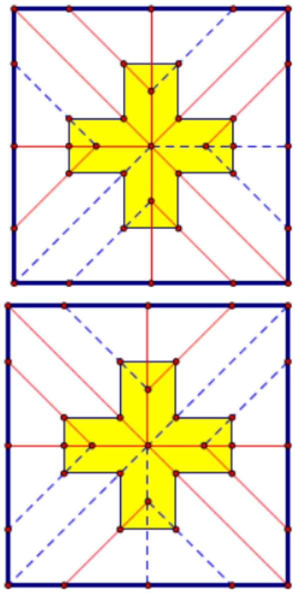
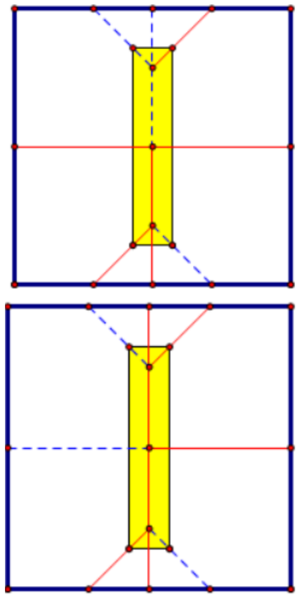
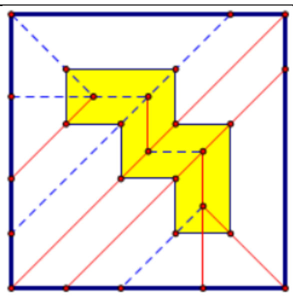
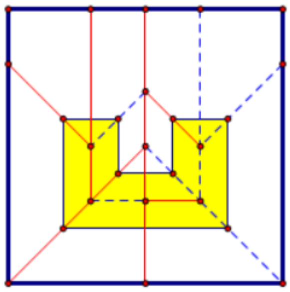
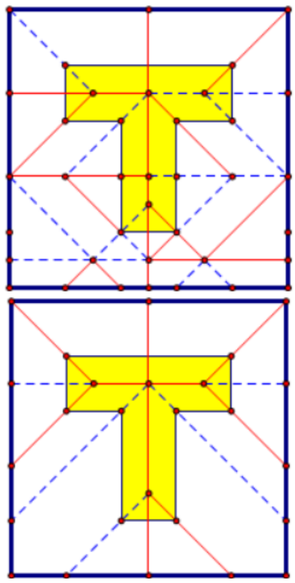
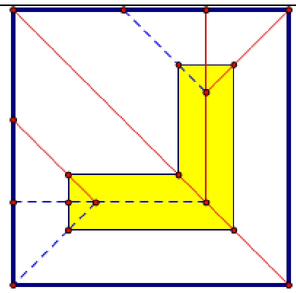
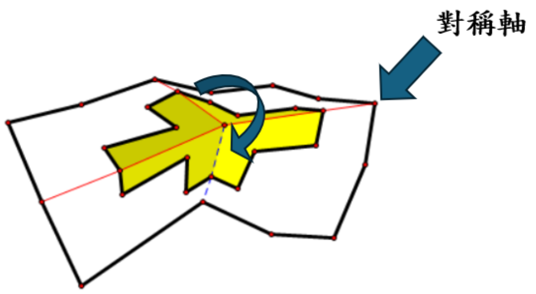
1. X 型	2. I 型	3. W 型
		
4. U 型	5. T 型	6. V 型
		

表 2：全圖層摺疊法摺痕展開圖

歸納 1：**全圖層摺疊法沿著對稱摺痕山線、谷線相反。**

圖 15 中，當 X 型由上而下對摺，上面的山線會對應下面的谷線，因此若一面是山線，另一面必為谷線。圖 15 部分的摺痕展開圖。圖 16 為步驟對應的對稱摺痕圖，由圖 17 可以更清楚上面對稱軸對應摺痕的情形。



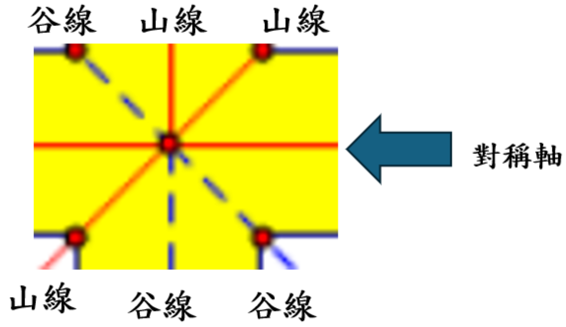


圖 15：全圖層折疊法摺痕展開圖　　圖 16：全圖層折疊法對稱摺痕圖

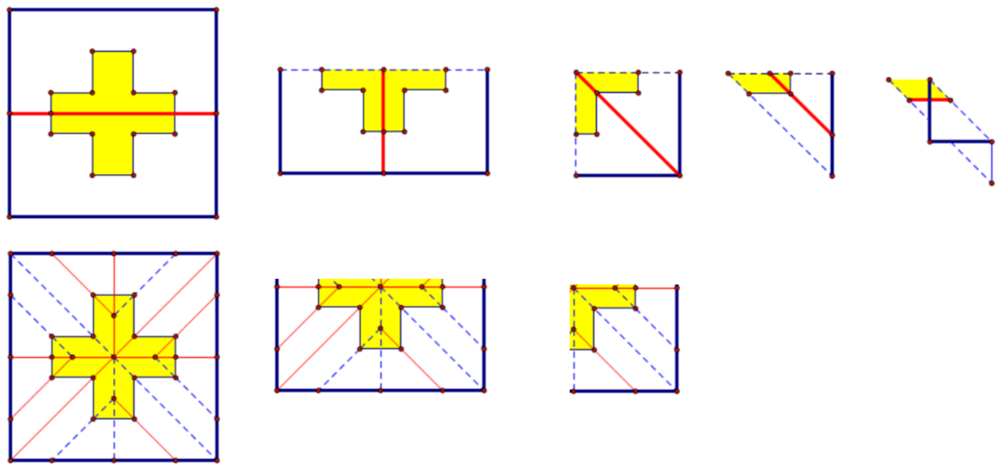
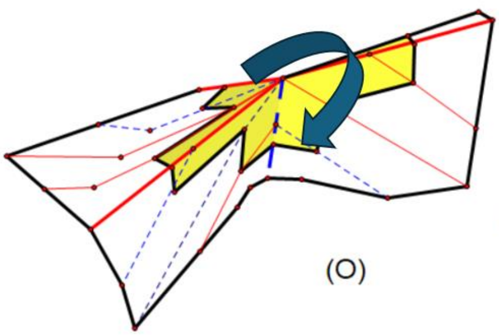


圖 17：上面為摺的步驟圖，下面為摺痕圖

歸納 2：全圖層摺疊法有固定的摺痕順序。

圖 18-1 可摺，圖 18-2 雖然摺的也是摺痕圖中的摺線，但第 2 步驟的兩條谷線無法繼續摺。



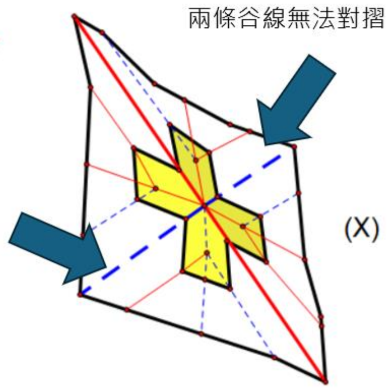


圖 18-1：全圖層摺疊法摺痕圖(可摺)　　圖 18-2：全圖層摺疊法摺痕圖(不可摺)

結論一：全圖層摺疊法沿著對稱摺痕山線、谷線相反；且有固定的摺痕順序。

接著，我們將 12 種五連方的一刀剪摺法解出，下列為 12 種五連方的脊椎摺法摺痕圖：

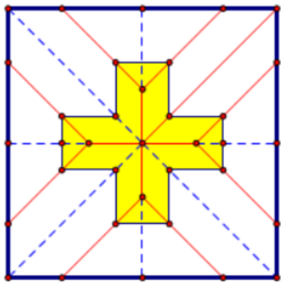
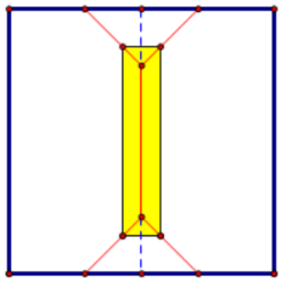
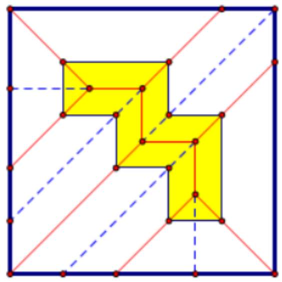
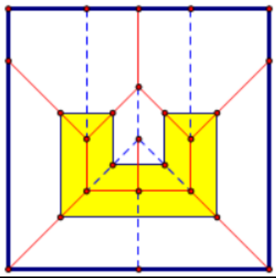
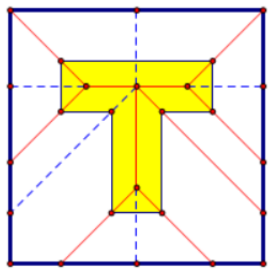
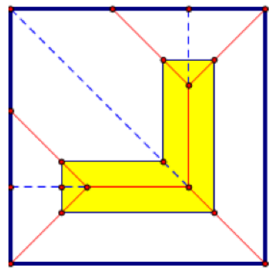
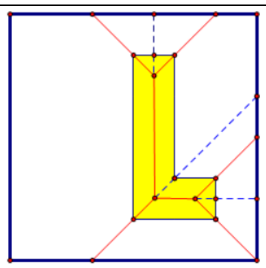
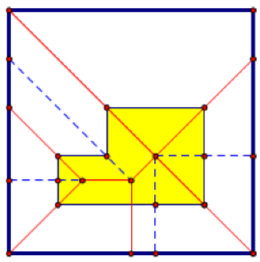
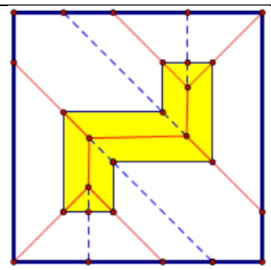
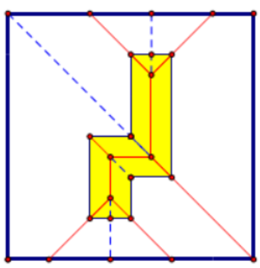
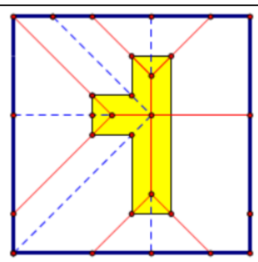
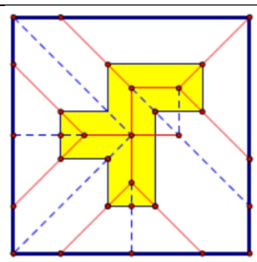
1. X 型	2. I 型	3. W 型
		
4. U 型	5. T 型	6. V 型
		
7. L 型	8. P 型	9. Z 型
		
10. N 型	11. Y 型	12. F 型
		

表 2：12 種五連方的脊椎摺法摺痕圖

結論二：12 種五連方均可一刀剪。

歸納 3：**脊椎摺法一刀剪作品會有兩處為兩條山線中間沒有谷線(或兩條谷線中間沒有山線)。**

如下圖，設五邊形 CDEFG 為 A 面，五邊形 IJKLM 為 B 面，六邊形 CDJKQL 為 C 面，五邊形 DEOIJ 為 D 面。基於前川定理，A 面的兩條山線 $\overline{CD}$ 與 $\overline{EF}$ 之間無谷線(為平面摺疊的正面與背面)，同理，B 面、C 面、D 面的兩條山線間皆無谷線。為了將 A、C 面及 B、D 面摺疊，新增谷線 $\overline{LJ}$ 及 $\overline{DN}$ 。同一側若有 n 個面要摺疊，就會有 n-1 條谷線，因此會有一個面的兩條山線間無谷線。

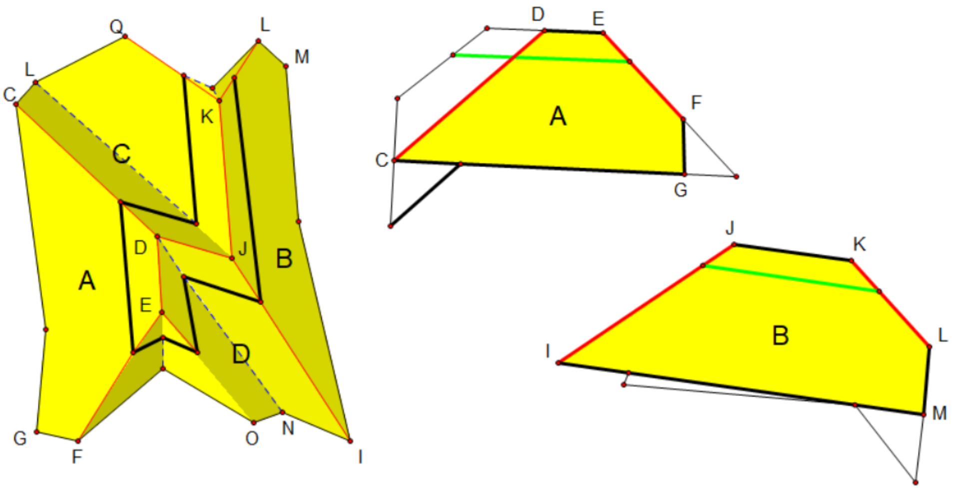


圖 19：歸納 3

歸納 4：**全圖層摺疊法可以與脊椎摺法交錯使用(圖 20)。**

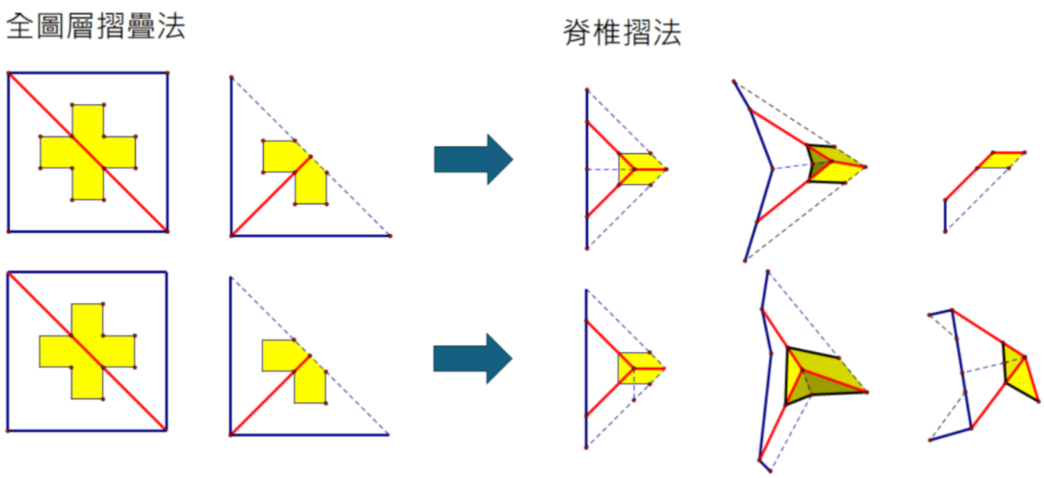


圖 20：全圖層摺疊法與脊椎摺法並用

歸納 5：在符合前川定理及川崎定理的情況下，摺線可以改變。(下圖以 N 型為例)

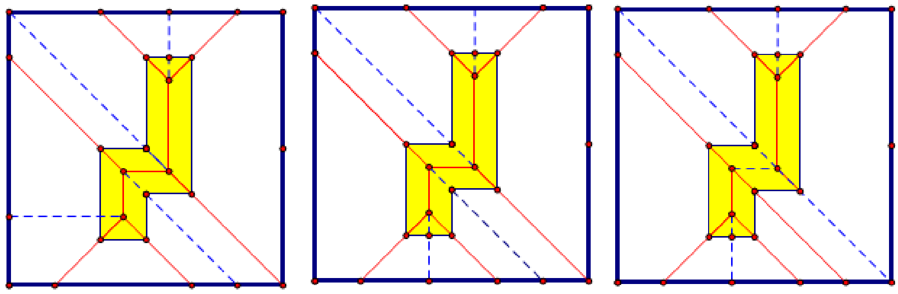


圖 21：N 型摺線

結論三：脊椎摺法一刀剪作品會有兩處為兩條山線中間沒有谷線； (或兩條谷線中間沒有山線)。另外，全圖層摺疊法可以與脊椎摺法並用

研究二、凸多邊形的一刀剪

1. 三角形

其折疊過程如下：

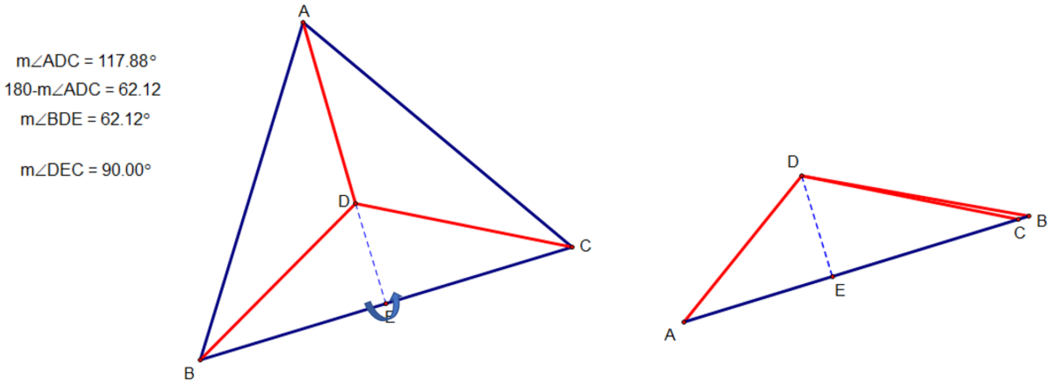


圖 22：三角形折疊過程

先畫出三條角平分線，連出內心。以這個三角形為例，$\angle ADC$約為 117.88°，將$\overline{BD}$逆時針旋轉(180 - 117.88)°，可以使$\angle ADC + \angle BDE$ = 180°，以符合川崎定理。

2. 凸四邊形

四邊形可分為：(1) 角平分線共點的四邊形　　(2) 任意四邊形

Case1：角平分線共點的四邊形

其折疊過程如下：

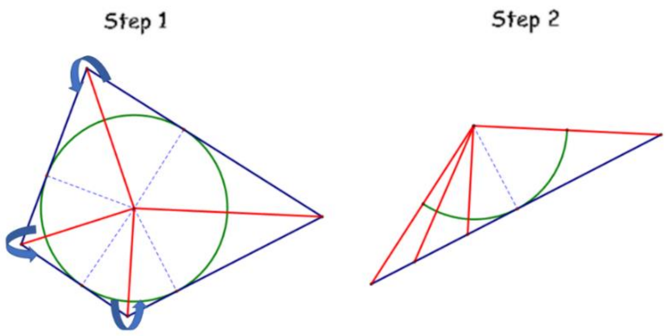


圖 23：角平分線共點的四邊形折疊過程

該多邊形的每條邊都與圖形裡的圓相切，則此多邊形的角平分線必共點(為四邊形的內心)，透過上述我們可知：**角平分線共點的多邊形可以透過上述特殊摺法處理。**

Case2：任意四邊形

其折疊過程如下：

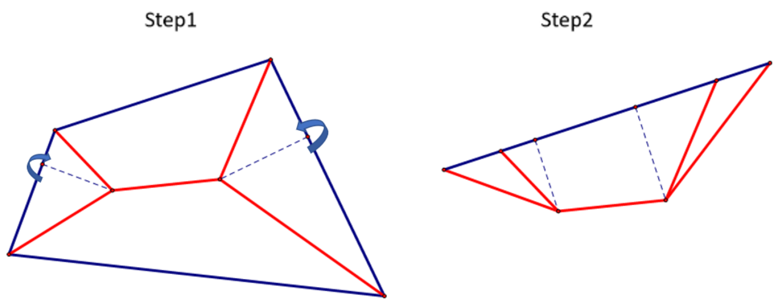


圖 24：四邊形折疊過程

3. 凸五邊形

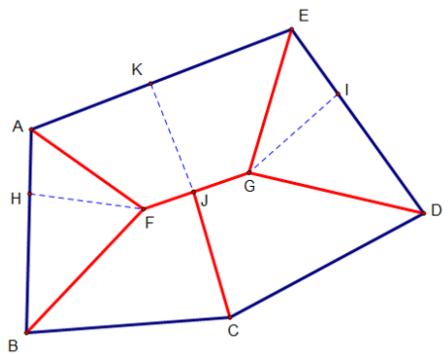


圖 25：五邊形摺痕圖

先將其中四個角兩個一組作角平分線，取交點，將兩點連線，將剩下的一個角作角平分線，取到剛才的兩點連線那邊，再根據前川定理作谷線。

透過上述，我們可知：**任意凸多邊形每一次按照山線-谷線-山線的方式去摺，就能把兩條邊合併為一條邊，因此 n 邊形一刀剪，需要合併 n-2 次，最後就能把所有邊併為一條邊，再一刀剪下。**

> **結論四：(1) 角平分線共點的多邊形有特殊摺法。**
> **(2) 任意凸多邊形每一次按照山線-谷線-山線的方式去摺，就能把兩條邊合併為一條邊，因此 n 邊形一刀剪，需要合併 n-2 次，最後就能把所有邊併為一條邊，再一刀剪下。**

研究三、凹多邊形的一刀剪

1. 凹四邊形

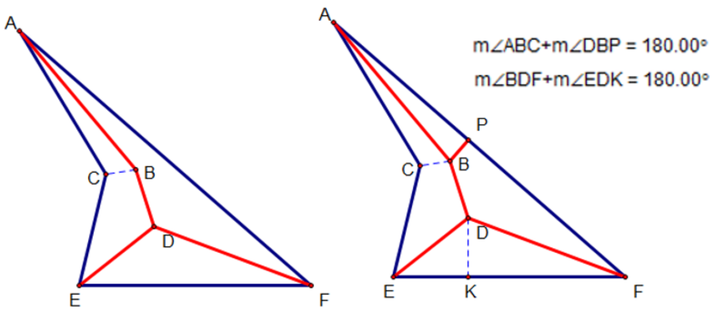


圖 26：凹四邊形摺痕圖

以上圖的凹四邊形為例，先將$\angle A$、$\angle C$、$\angle E$、$\angle F$的平分線取交點，將交點連線，連出來的圖形頂點 B、D 不符合前川定理(左圖)，B 點少一條山線，D 點少一條谷線，因此為了解決這個問題，我們在邊 $\overline{AF}$ 上新增一點 P，與頂點 B 連成山線，並且為了符合川崎定理，$\angle ABC + \angle PBD$要等於 180°，將邊$\overline{BD}$以頂點 B 為旋轉中心，逆時針旋轉(180-角 ABC)°，取出與邊 $\overline{AF}$ 的交點 P，與頂點 B 連線，如右圖；頂點 D 也以相同的方法增加谷線。

其折疊過程如下：

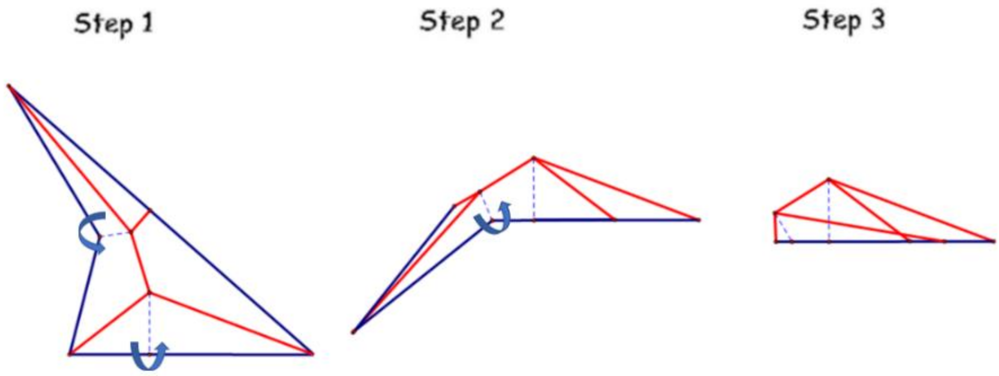


圖 27：凹四邊形折疊過程

2. 凹五邊形

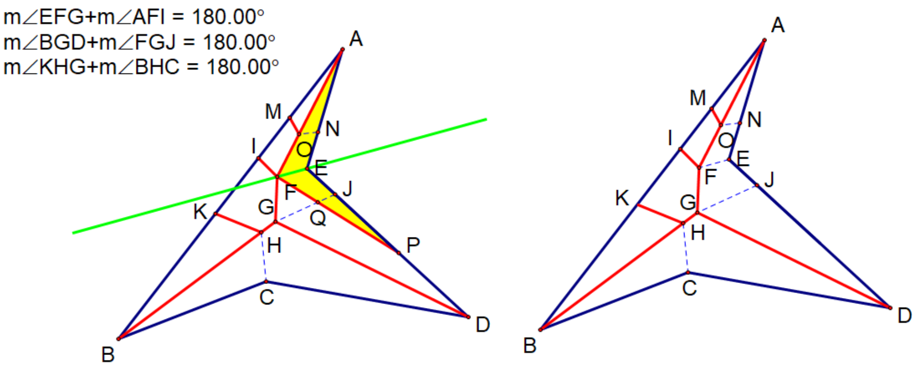


圖 28：凹五邊形摺痕圖

其摺疊過程如下：

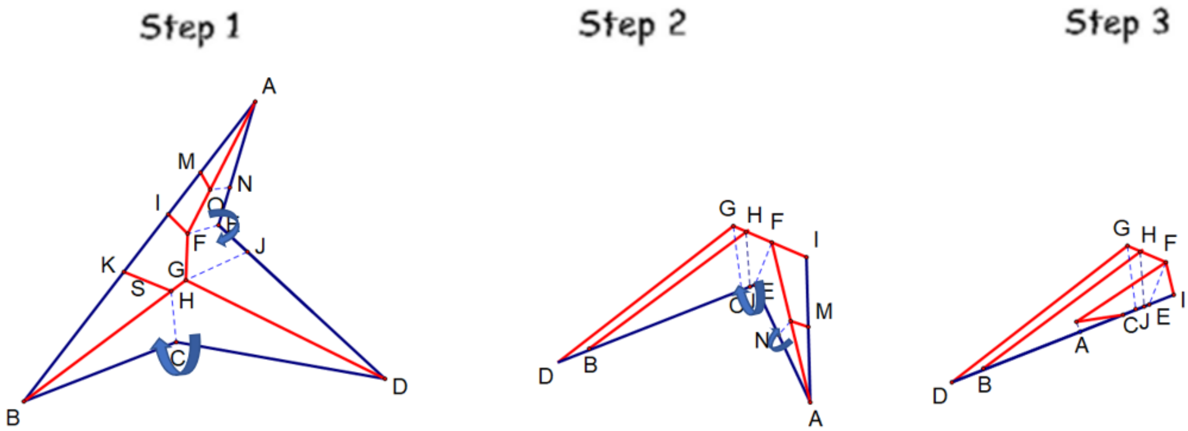


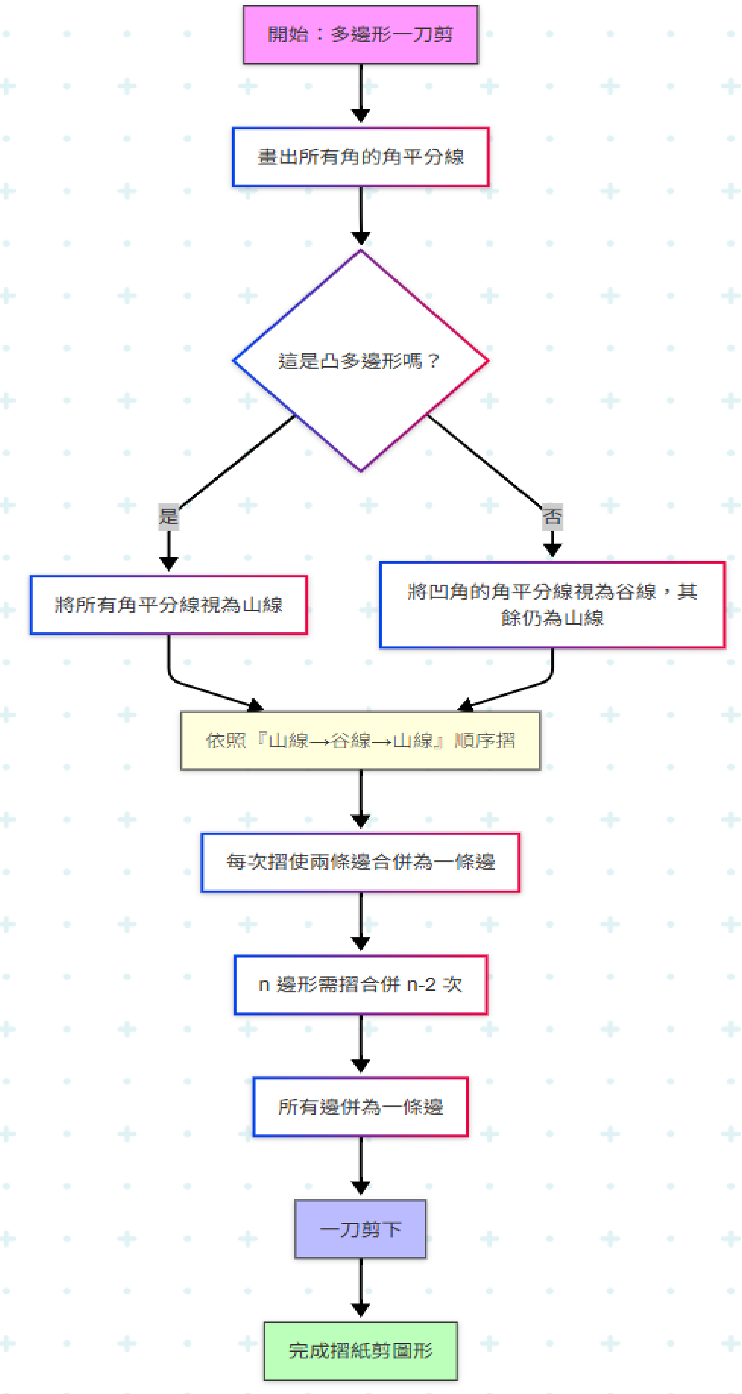
圖 29：凹五邊形折疊過程

本來 $\overline{AF}$ 是直線，不需要線段 $\overline{MO}$ 與 $\overline{NO}$，但是△AEF 沿谷線 $\overline{EF}$ 向下摺會重疊△PEF，而區域經過谷線 $\overline{GJ}$，所以就跟著有一個谷線的摺痕(線段$\overline{NO}$與$\overline{MO}$)。$\overline{NO}$ 沿 $\overline{EF}$ 與 $\overline{JQ}$ 對稱。$\overline{MO}$ 沿 $\overline{AF}$ 與 $\overline{NO}$ 對稱。

我們發現：**凹多邊形只需把凹角的角平分線當成谷線，其餘角的角平分線還是山線，並按照前面多邊形的摺法摺，即可一刀剪。**

結論五：凹多邊形只需把凹角的角平分線當成谷線，其餘角的角平分線還是山線，並按照前面多邊形的摺法摺，即可一刀剪。

一刀剪流程圖(使用 mermaid 製作)：



結論六：任意以直線構成的封閉圖形都可以一刀剪。

研究四、無對稱軸之非封閉圖形的一刀剪

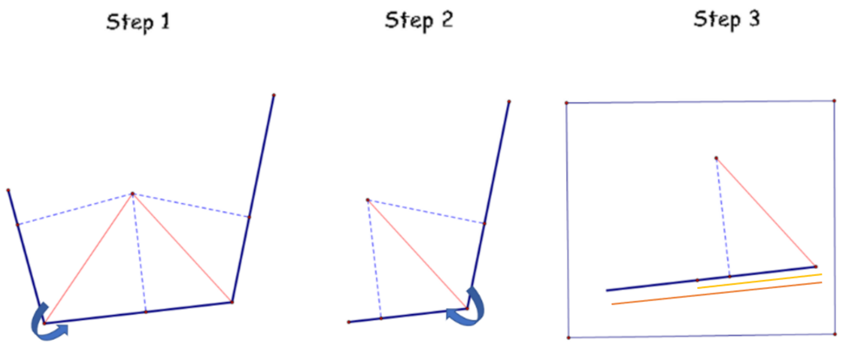


圖 30：不規則非封閉圖形的一刀剪

圖中利用脊椎折法長邊和短邊對折後會疊在一起，而一刀剪時短邊外的空白會一起被剪到，如果長邊折過來，一定會有長短邊之分，就會呈現上述狀況，因此不規則非封閉圖形無法一刀剪。

結論七：無對稱軸之非封閉圖形無法一刀剪。

研究五、圓盤堆疊法之深入研究

1. 四邊形

(1) 以四個角為圓心，圓可以涵蓋四條邊的四邊形

這樣的四邊形有一個特點：對邊相加相等(邊$\overline{AB}$+邊$\overline{CD}$=邊$\overline{BC}$+邊$\overline{AD}$)。首先來證明為什麼對邊相等。下圖中，深藍色四邊形是要剪下來的四邊形，線段 a, b, c, d 分別為圓 A, B, C, D 的半徑，那麼邊 $\overline{AB}$ +邊 $\overline{CD}$ $= (a+b)+(c+d)$，邊$\overline{BC}$+邊$\overline{AD}$ $= (b+c)+(a+d)$，$(a+b)+(c+d)=(b+c)+(a+d)$。

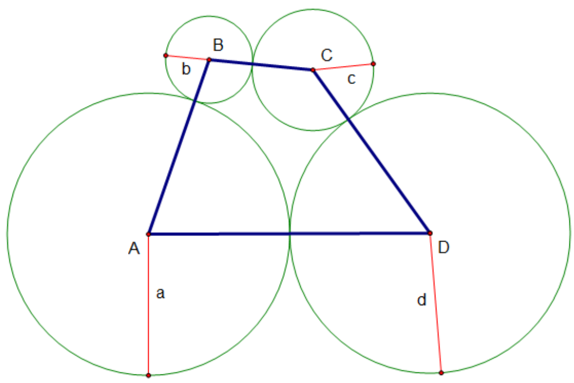


圖 31：以四個角為圓心，圓可以涵蓋四條邊的四邊形

以下說明畫出四邊形摺線的方法。「以四個角為圓心，圓可以涵蓋四條邊的四邊形」有 2 種情況，一種是 1 個 4-gap，1 種是 2 個 3-gap。先講 1 個 4-gap 的情況。這種情況對角的圓形不會彼此碰到。也就是$(a+c)$小於$\overline{AC}$連線長，$(b+d)$小於$\overline{BD}$連線長。首先，先畫出圓的切線 $\overline{FI}$、$\overline{FJ}$、$\overline{HK}$、$\overline{HL}$，交於 F、H 兩點，圓的切線與邊垂直。畫出四條角平分線，$\angle B$ 與 $\angle D$ 的角平分線會經過點 F 和點 H，以下用 $\angle B$ 為例證明為什麼會經過。設 $\overline{BF}$ 只是一般的連線。因為圓的關係，$\overline{BJ}=\overline{BI}$，而$\angle BIF$和$\angle BJF$為直角，共用線段 $\overline{BF}$，$\triangle BIF$與$\triangle BJF$為 RHS 全等，所以$\angle IBF=\angle JBF$，故 $\overline{BF}$ 為 $\angle B$ 的角平分線，換句話說，$\angle B$ 的角平分線會經過點 F。設點 E、點 G 為角平分線上的一個點，連線$\overline{EF}$、$\overline{FG}$、$\overline{GH}$、$\overline{HE}$，點 E、G 可以使點 E、F、G、H 符合川崎定理，也就是$\angle AEH+\angle FEG=180°$，$\angle BFI+\angle EFG=180°$，$\angle CGH+\angle FGE=180°$，$\angle GHK+\angle EHD=180°$。最後，我們要使這個圖的點 E、F、G、H 符合前川定理(山線與谷線數相差 2)，因此刪去線段$\overline{FJ}$、$\overline{HL}$，連線$\overline{EG}$。最後再把四個圓刪掉，如圖 32。

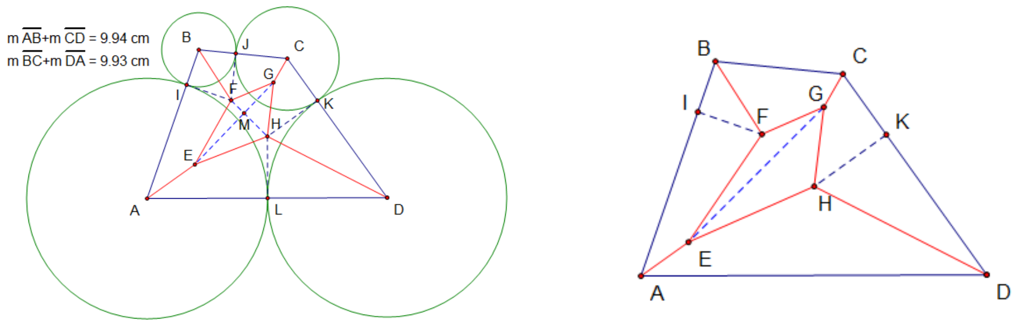
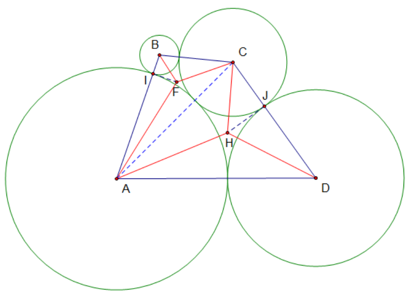


圖 32：四邊形和圓的摺線

第二種情況，也就是 2 個 3-gap 的情況，點 E 會與點 A 重合，點 G 會與點 C 重合，如圖 33。



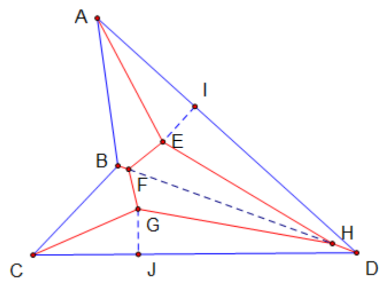


圖 33：2 個 3-gap 的四邊形和圓的摺線　　圖 34：凹四邊形摺線

若是應用在凹四邊形，與脊椎折法不同，凹角也視為凸角，使用山線，如圖 34。

(2) 無邊長限制四邊形

任何一個四邊形都能以 5 個圓涵蓋。如果四邊形中間有 1 個碰 5-gap，情況會比較複雜。因此我們盡量讓空隙為 3-gap 或 4-gap。在這個條件下，情況有 2 種，一種情況是 3 個 3-gap；另一種是 1 個 4-gap 和一個 3-gap。

首先考慮第一種情況。ABCD 為一個四邊形，J 於邊$\overline{BC}$上，分別以 A、B、C、D、J 為圓心畫 5 個圓，畫出切線，點 E、G、K 為圓的 3 個切線交點，將$\overline{AE}$連線，$\overline{AE}$為∠A 的角平分線，前面證明過了。將$\overline{BE}$連線，$\overline{BG}$連線，$\overline{JG}$連線，$\overline{JK}$連線，$\overline{CK}$連線，$\overline{AE}$連線、$\overline{CK}$連線(山線)，上述都是對角線連線切割後的角平分線，例如將$\overline{BD}$連線後，$\overline{BE}$為∠ABD 的平分線。將$\overline{BD}$、$\overline{JD}$對角線連線(谷線)。最後刪去多餘的摺線，再刪去圓形，如圖 35。

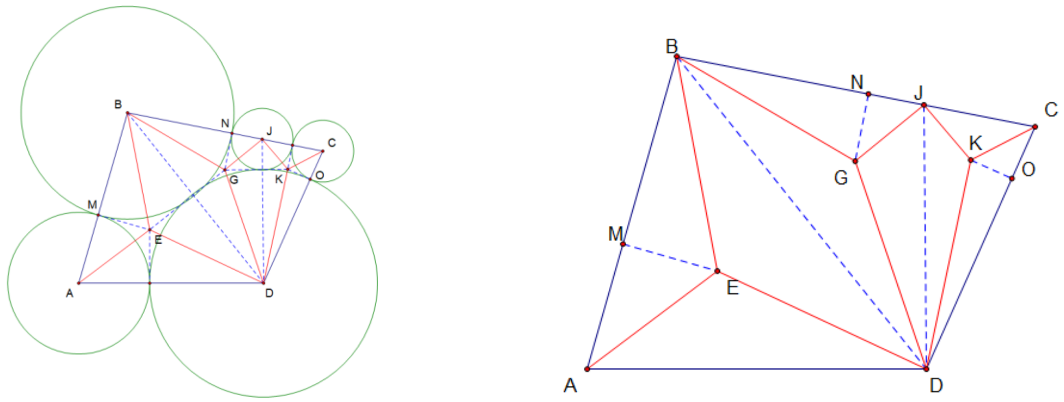


圖 35：3 個切線交點的四邊形和圓的切線

接著看第二種情況，1 個 4-gap 和 1 個 3-gap，它跟第一種情況的差別就是 F 點不會與 B 點重和，H 點不會與 D 點重合，如圖 36。從這些情況可以發現 3-gap 的 F 點會與 B 點重和，H 點會與 D 點重合，而 4-gap 不會。

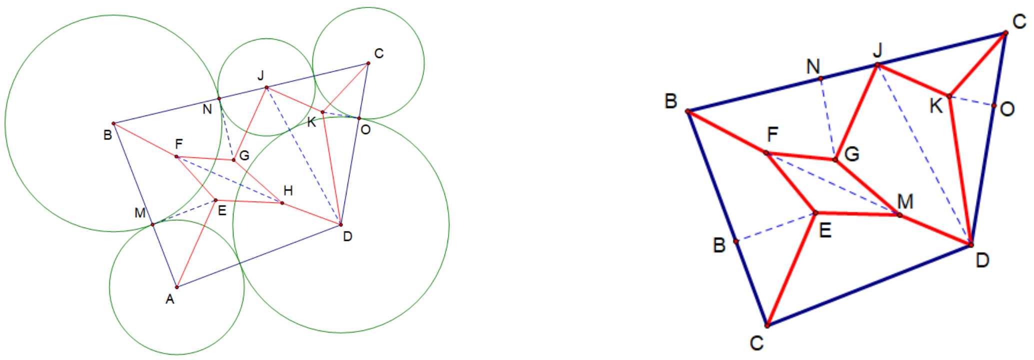


圖 36：1 個 4-gap 和 1 個 3-gap 的四邊形和圓的切線

2. 三角形

以三角形的三個頂點為圓心畫圓，使三條邊都被圓覆蓋。將圓的切線取出交點，連線$\overline{AD}$、$\overline{BD}$、$\overline{CD}$，此三條線為角平分線。由前川定理，刪去 2 條切線，最後將圓刪去，如圖 37。

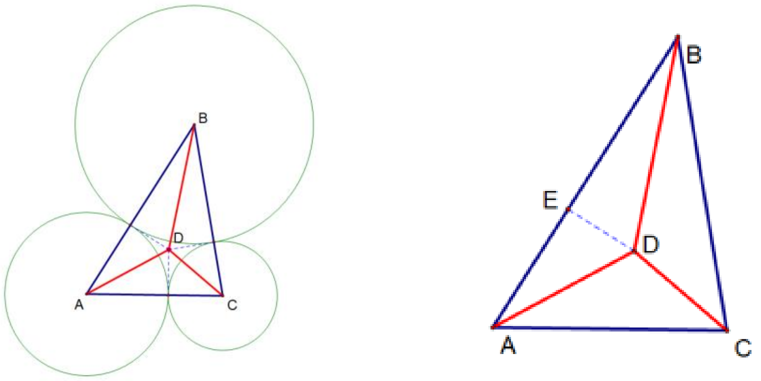


圖 37：三角形和圓的切線

3. 任意多邊形

先畫圓，要使所有間隙皆為 3-gap 或 4-gap，接著畫出切線，取出交點，然後畫出角平分線，連線對角線，最後根據前川定理，刪去多餘的摺線和圓形。

4. 脊椎摺法及圓盤堆疊法在紙上的摺痕

在紙上摺的時候，多邊形的頂點不在邊緣，因此需要作出一些調整。如果碰到邊的線只有一條，那就繼續延伸下去；如果超過 1 條，則需要符合前川定理及川崎定理。下圖為凹四邊形的脊椎摺法，除了中間的線段$\overline{BD}$外，剩下都將頂點那端繼續延伸，直到 碰到紙張邊緣。

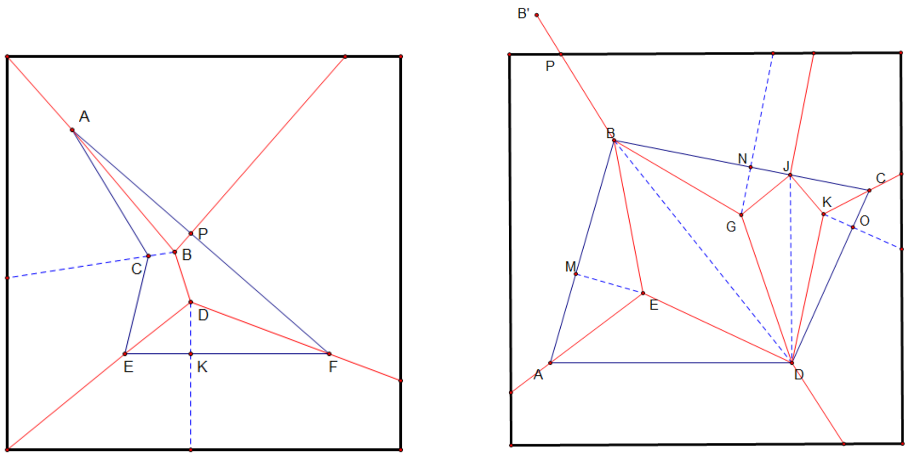


圖 38：凹四邊形脊椎摺法

上圖為圓盤堆疊法的任意四邊形，可以看到點 B、D、J 都有超過 1 條線，因此需要作出調整。點 B 部分，要以點 B 為中心，將線段$\overline{BG}$逆時針旋轉 180°-∠EBD，再將旋轉後的線段$\overline{BG}$縮短到紙張邊緣(線段$\overline{PB}$)。點 J 也是同樣的方法。點 D 部分，要將線段$\overline{DE}$逆時針旋轉 180° - ∠BDG - ∠JDK，再縮短到紙張邊緣。其他碰到邊的線段都繼續延伸就好了。

研究六、任意由直線構成的多邊形的剪線長

剪線定義：

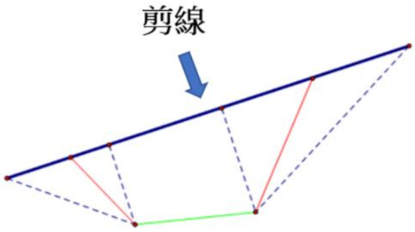


圖 39：剪線定義

所求：已知多邊形的各邊長和角度，求剪線長。

1. 三角形

三角形的剪線長分為兩情況，第一種：若谷線垂直的邊為三角形最長的一邊，則剪線長為其餘兩邊中較長的一邊$\left(\overline{AC}\right)$，或是$\overline{AB}-\overline{BD}+\overline{DC}$；第二種：若谷線垂直的邊為其餘兩邊，則剪線長為三角形中最長的一邊，因為三邊中只有最長的一邊能涵蓋其他兩邊。

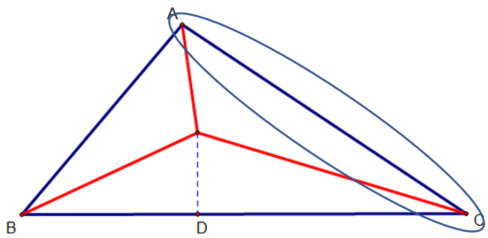


圖 40-1：三角形第一種情況

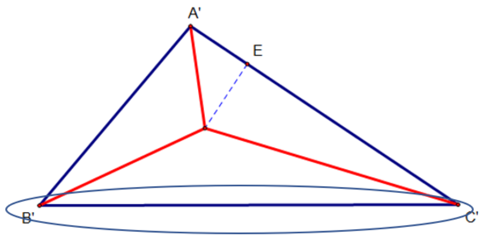


圖 40-2：三角形第二種情況

2. 四邊形

(1) 凸四邊形

凸四邊形的剪線長由底角分為兩情況，分別是雙銳角和一銳角一鈍角。

第一種(底角雙銳角)：

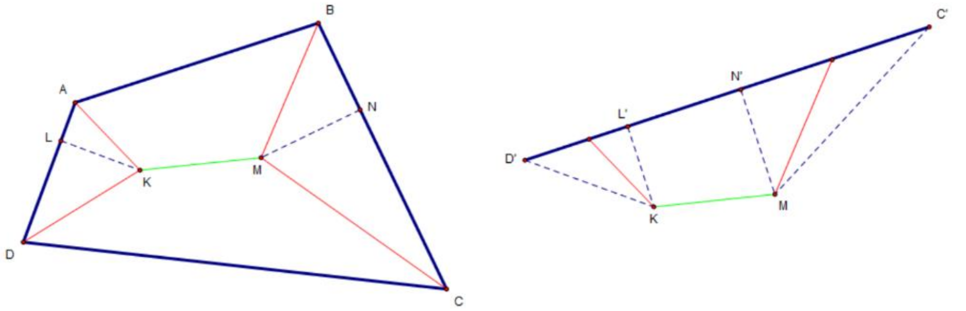


圖 41：凸四邊形第一種情況

剪線長 = 最長的那一條邊($\overline{CD}$)的長度，也等於剩下的 3 條邊($\overline{AD}$、$\overline{AB}$、$\overline{BC}$)，以谷線與邊的交點作為分界，可分成線段$\overline{DL}$、$\overline{LA}$、$\overline{AB}$、$\overline{BN}$、$\overline{NC}$，開始依序一加一減，也就是$\overline{DL}-\overline{LA}+\overline{AB}-\overline{BN}+\overline{NC}$，如圖 41。

剪線長 = $\overline{CD}$ = $\overline{DL}-\overline{LA}+\overline{AB}-\overline{BN}+\overline{NC}$

第二種(底角一銳角一鈍角)：

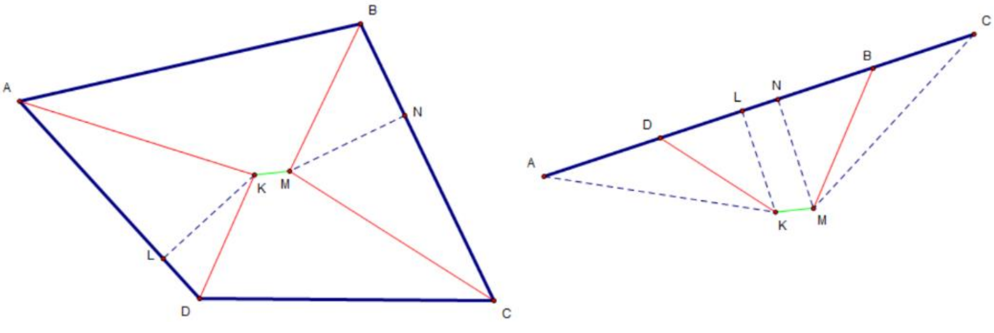
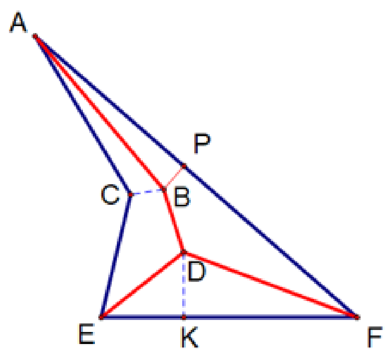


圖 42：凸四邊形第二種情況

此四邊形線段分界方式與第一種相同，但剪線長不同，如圖 42。

剪線長 = $\overline{CD}-\overline{DL}+\overline{LA}$ = $\overline{AB}-\overline{BN}+\overline{NC}$

(2) 凹四邊形



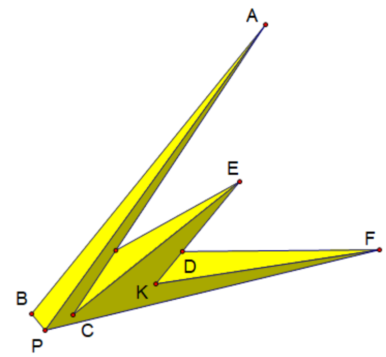
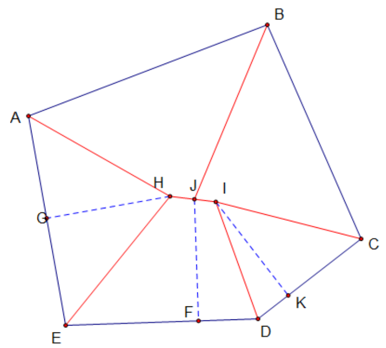


圖 43：凹四邊形摺痕圖　　　　圖 44：凹四邊形剪線長

剪線長 = $\overline{PF} = \overline{PA} - \overline{AC} + \overline{CE} - \overline{EK} + \overline{KF}$

3. 五邊形

(1) 凸五邊形



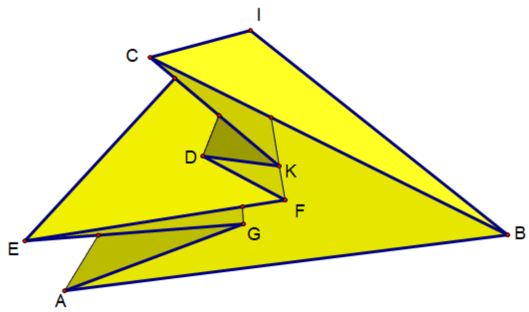
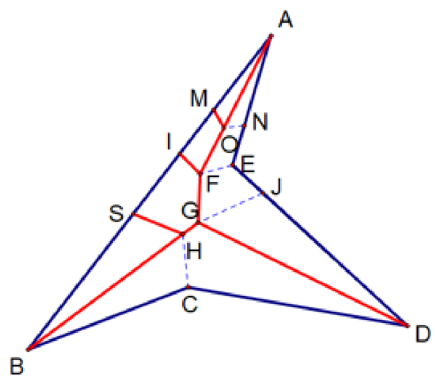


圖 45：凸五邊形摺痕圖　　　　圖 46：凸五邊形剪線長

剪線長 = $\overline{BC} - \overline{CK} + \overline{KD} - \overline{DF} + \overline{FE} = \overline{AB} - \overline{GA} + \overline{EG}$

(2) 凹五邊形



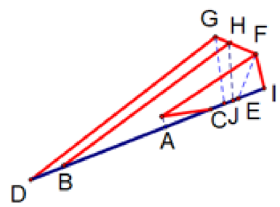


圖 47：凹五邊形摺痕圖　　　　圖 48：凹五邊形剪線長

剪線長 = $\overline{SB} - \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{SI} - \overline{IM} + \overline{MA} - \overline{AN} + \overline{NE} - \overline{EJ} + \overline{JD}$

4. 圓盤堆疊法

(1) 三角形

圓盤堆疊法的三角形剪線長等於上頁脊椎摺法的剪線長。

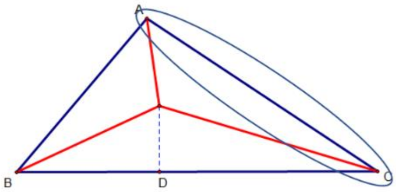


圖 49-1：三角形第一種情況

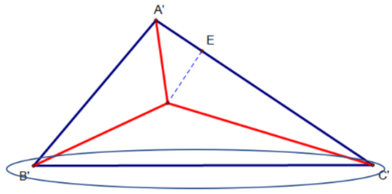


圖 49-2：三角形第二種情況

(2) 四邊形

(一) 凸四邊形

凸四邊形的剪線長由底角分為兩情況，分別是雙銳角和一銳角一鈍角。

第一種情況：

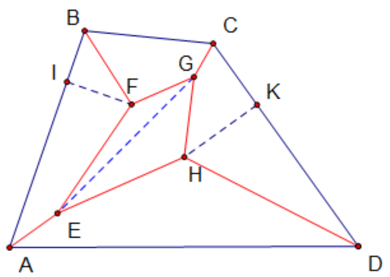


圖 50：凸四邊形摺痕圖(第一種情況)

剪線長 = $\overline{AD} = \overline{AI} - \overline{IB} + \overline{BC} - \overline{CK} + \overline{KD}$

第二種情況：

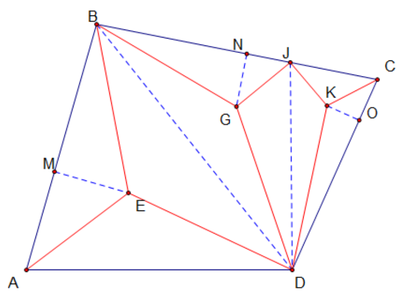


圖 51：凸四邊形摺痕圖(第二種情況)

剪線長 = $\overline{BD} = \overline{DA} - \overline{AM} + \overline{MB} = \overline{DO} - \overline{OC} + \overline{CJ} - \overline{JN} + \overline{NB}$

(二) 凹四邊形

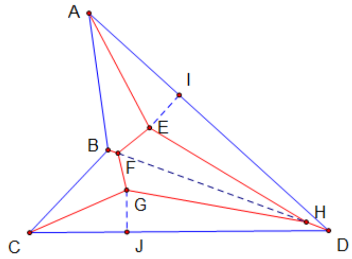


圖 52：凹四邊形摺痕圖

剪線長 = $\overline{BA}-\overline{AI}+\overline{ID}=\overline{BC}-\overline{CJ}+\overline{JD}$

由此可見，剪線長有兩種或兩種以上的表達方式，下圖以凸五邊形(圖 52)為例，分別由最長邊($\overline{AB}$)與次長邊($\overline{BC}$)出發(這裡的邊是指以點為分界的邊)，往相反的方向，減去各自的第二條邊($\overline{GA}$、$\overline{CK}$)，加各自的第三條邊($\overline{EG}$、$\overline{KD}$)……加上各自的最後一條邊。我們可以發現：剪線長的表達一定是奇數個邊長線段依序一加一減，且以點為分界，邊長線段的數量必為偶數。

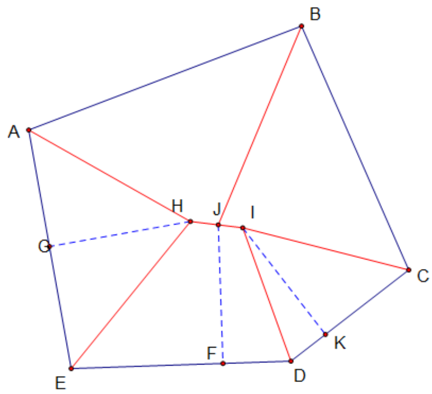


圖 53：凸五邊形剪線長

剪線長 = $\overline{BC}-\overline{CK}+\overline{KD}-\overline{DF}+\overline{FE}=\overline{AB}-\overline{GA}+\overline{EG}$

結論八：剪線長的表達一定是奇數個邊長線段依序一加一減；且以點為分界，邊長線段的數量必為偶數。

陸、討論

一、一刀剪的技法歸納

(1) 將較短的線條折到較長或線條的聚集處，如剪 X 形時步驟四的動作。

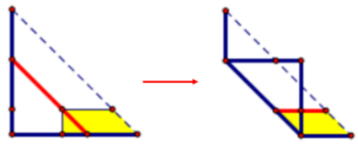


圖 54：剪 X 形步驟四動作

(2) 沿著對稱軸對折，在 X 型、L 型、W 型、U 型等圖形的第一步皆是沿著對稱軸對折，而十字沿對稱軸對折了兩次。另一種是部分對折，如 W 型步驟二的動作。

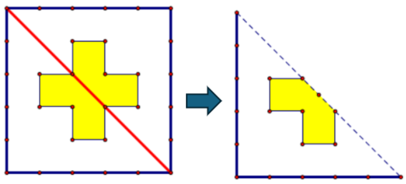


圖 55：W 型步驟二動作

(3) 虛線_轉彎：

這種技法是一條垂直邊的谷摺虛線，和一條實線的山線角平分線所構成，這樣能使轉彎的兩條線都留在正面。

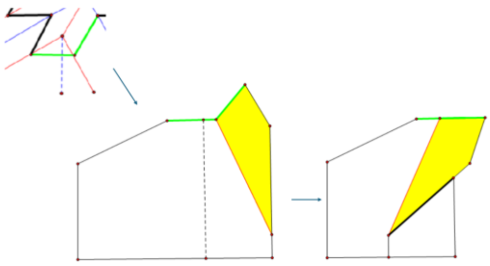


圖 56：虛線_轉彎(烏龜腳)

(4) 脊椎摺法：

以圖形多個內角平分線的交點間的連線為主軸，角平分線的山線與谷線輔助，折成的圖形。例子有文獻探討中的烏龜。

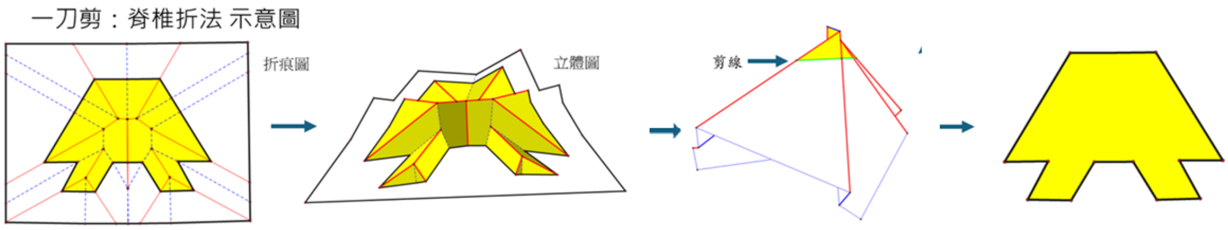


圖 57：脊椎摺法示意圖

(5) 山線ー谷線ー山線：

每次依照山線ー谷線ー山線的順序摺疊，就能將兩條邊合併成一條邊。要將一個 n 邊形的一刀剪完成，需進行 n-2 次合併，最後所有邊會匯聚成一條邊，在一刀剪開圖形。

(6) 凹多邊形摺法：

若遇到凹多邊形，則將每個凹角的角平分線視為谷線，其餘凸角的角平分線仍作為山線，然後依照前述多邊形的摺法進行摺疊。

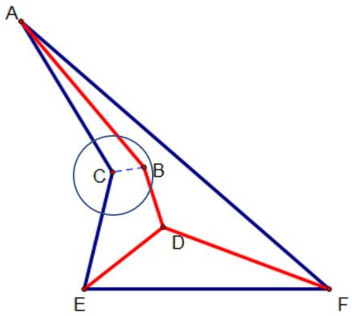


圖 58：凹多邊形摺法

二、一刀剪的技法優劣比較

	全圖層摺疊法	脊椎摺法	圓盤堆疊法
優點	適用於有對稱軸的圖形	適用於較複雜的圖形 如有凹角和轉折等	不必有對稱軸
缺點	角度需變化不大	步驟較困難且繁瑣	圖形不能太複雜

總結：簡單的圖形可以用全圖層摺疊法，脊椎摺法適用的範圍最廣。

柒、結論

1. 全圖層摺疊法沿著對稱摺痕山線、谷線相反；且有固定的摺痕順序。
2. 12 種五連方均可一刀剪。
3. 脊椎摺法一刀剪作品會有兩處為兩條山線中間沒有谷線(或兩條谷線中間沒有山線)；另外，全圖層摺疊法可以與脊椎摺法並用。
4. (1) 角平分線共點的多邊形有特殊摺法。

   (2) 任意凸多邊形每一次按照山線-谷線-山線的方式去摺，就能把兩條邊合併為一條邊，因此 n 邊形一刀剪，需要合併 n-2 次，最後就能把所有邊併為一條邊再一刀剪下。

5. 凹多邊形只需把凹角的角平分線當成谷線，其餘角的角平分線還是山線，並按照前面多邊形的摺法摺，即可一刀剪。
6. 任意的封閉圖形都可以一刀剪。
7. 無對稱軸之非封閉圖形無法一刀剪。
8. 剪線長的表達一定是奇數個邊長線段依序一加一減，且以點為分界，邊長線段的數量必為偶數。

捌、未來展望

1. 非封閉圖形。
2. 圓盤堆疊法的深入探討。
3. 中空的一刀剪。
4. 正立方體壓平摺疊的一刀剪。

玖、參考文獻

1. 黃心玟、曾瑜婷、符昕、陳韻如。神奇一刀剪。第四十六屆中小學科學展覽會。取自：https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/46/junior/0304/030407.pdf

2. Folding the Turtle for 1-Cut. 取自：https://www.science.smith.edu/~jorourke/HowToFoldIt/Turtle1-Cut/FoldingTheTurtle.html

3. Erik Demaine. Erik Demaine's Folding and Unfolding: The Fold-and-Cut Problem。取自：https://erikdemaine.org/foldcut/

4. Erik Demaine (2012). Lecture 8 : Fold and cut. Retrieved from MIT Open Course Ware. 取自：https://www.youtube.com/watch?v=K0GuKDSX1FA

5. 何清人。何老的一刀剪教室。取自：https://onecutpaper.com/download/

6. 前川定理。維基百科。取自：https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%89%8D%E5%B7%9D%E5%AE%9A%E7%90%86

7. 川崎定理。維基百科。取自：https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%B7%9D%E5%B4%8E%E5%AE%9A%E7%90%86

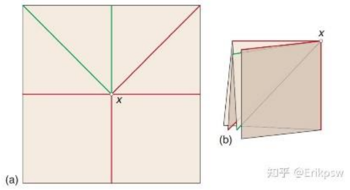
8. Straight skeleton. Retrieved from Wikipedia. 取自：https://en.wikipedia.org/wiki/Straight_skeleton

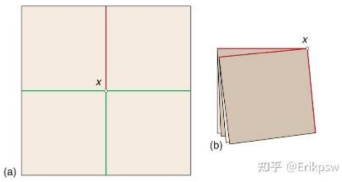
9. Marshall Bern, Erik Demaine, David Eppstein, Barry Hayes (2001). A Disk-Packing Algorithm for an Origami Magi Trick. 取自： https://erikdemaine.org/papers/OSME2001b/paper.pdf

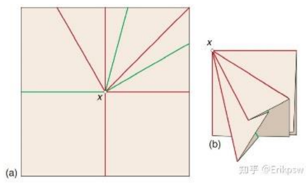
10. Shintaro Fushida-Hardy(2019). How to cut shapes. Retrieved from Stanford University. 取自：https://stanford.edu/~sfh/fold.pdf

附錄

1、 前川定理證明：

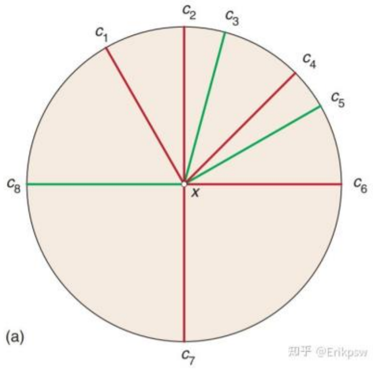




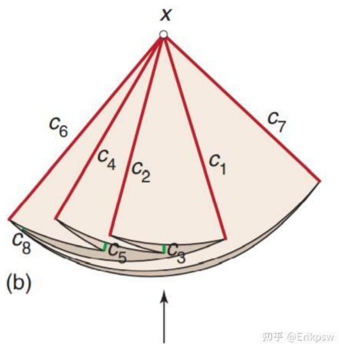


讓 M 和 V 分別代表平頂點摺疊中的山摺與谷摺的數量，則前川定理可以表示為：

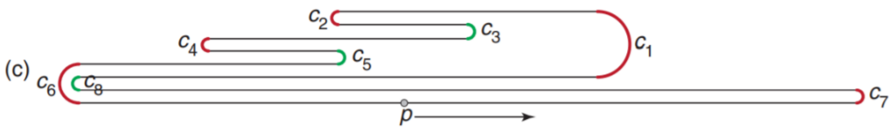
M = V + 2 或是 V = M + 2，即 |M – V| = 2。



由於我們只關心頂點 x 和周圍的摺痕，所以可以做一個圓(a)，按摺痕折疊後形成(b)。



從下往上看向頂點 x，可以發現圓環形成了一個封閉迴路(c)。



想像有一個螞蟻從 p 點出發在這個閉合迴路上爬行，遇到山折便逆時針 180 度，遇到谷折便順時針旋轉 180 度，最後回到原點，方向和開始一樣，由於沿著閉合迴路走了一周，相當於旋轉了 360 度，即 $M * 180° + V * (-180°) = 360°$

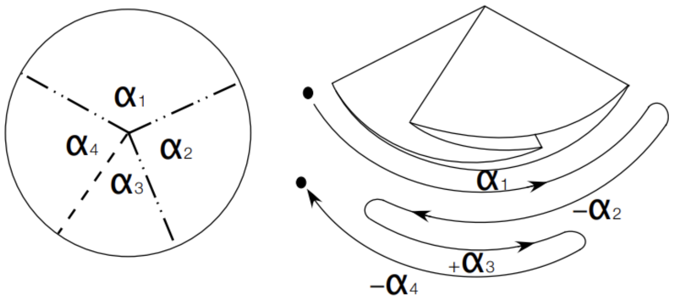
$\therefore M – V = 2$

因為紙有兩面，如果從另一面看，原來的山折變成了谷折，原來的谷折變成了山折，所以有：V – M = 2

這樣便證明了前川定理。

參考資料：https://zhuanlan.zhihu.com/p/184886420

2、 川崎定理證明：



So... $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \ldots - \alpha_{2n} = 0$

add to this $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2n} = 2\pi$

and you get $2\alpha_1 + 2\alpha_3 + \ldots + 2\alpha_{2n-1} = 2\pi$

that is, $\alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2n-1} = \pi$

將摺痕圖從任意一個角開始依序編號 a1,a2,a3,a4，折疊後可以觀察到 a1-a2+a3-a4=0，得到 a1+a3=a2+a4=360 度。

參考資料：https://courses.csail.mit.edu/6.849/fall10/lectures/L20_images.pdf