新竹市第四十三屆中小學科學展覽會

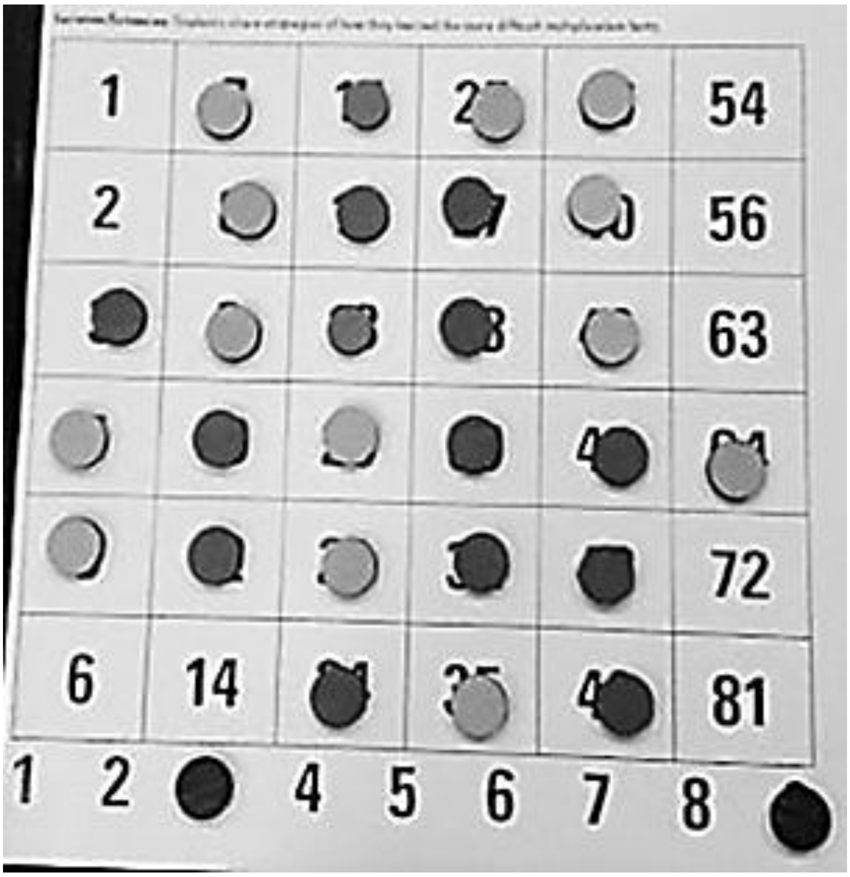
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國小組

作品名稱：乘法賓果對戰遊戲解析

關 鍵 詞：公因數、優勢策略、電腦對戰



編　　號：

乘法賓果對戰遊戲解析

摘要

本研究主要是探究兩人對戰遊戲「乘法賓果」的優勢策略，及其背後隱藏的數學關係。研究成果如下：

1. 分析 2×2～6×6 棋盤的數字組合及優勢方。
2. 以電腦程式模擬 6×6 棋盤隨機對戰，結果先手勝率較大。
3. 找出 6×6 棋盤上較容易獲勝的優勢策略。
4. 分析 6×6 棋盤中的各種數學性質，包含了：平方數、賓果組合、可連跳數、棋盤位置分布……等，並找到這些性質與優勢策略的關係。
5. 分析 6×6 棋盤雙方使用策略對戰時的優勢方與勝率，發現賓果遊戲雖然沒有必勝策略，但先手較佔優勢。

壹、前言

一、研究動機

我們在學校的數學活動中，學到一個利用九九乘法來玩賓果的雙人對戰遊戲，在遊戲的過程不僅能幫助背誦九九乘法，也讓我們對正在學習的因數和倍數有更深刻的體會，是一個好玩又能學習的好遊戲。

在我們多次嘗試對戰之後，發現似乎先手的勝率較高、不大公平。於是我們想要研究看看：真的是先手較佔優勢嗎？為什麼會如此？有沒有必勝策略？若是可以更深入了解此遊戲背後的數學原理，一定十分有趣。

經我們查詢歷屆科展作品和網路資料，發現沒有人做過關於這個主題的研究，所以我們決定自己來探索這個主題。

1	7	15	25	36	54
2	8	16	27	40	56
3	9	18	28	42	63
4	10	20	30	45	64
5	12	21	32	48	72
6	14	24	35	49	81

1　2　3　4　5　6　7　8　9

(圖 1)乘法賓果棋盤

自行繪製

二、遊戲規則

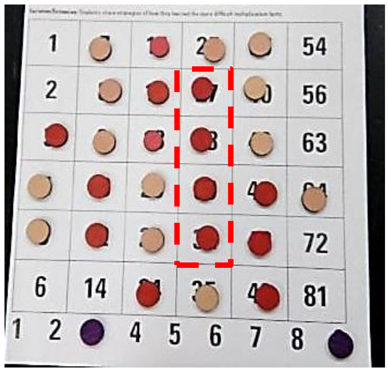
1.在遊戲剛開始，先手可將 2 顆可以移動的棋子，放在如圖 1 棋盤下方 1～9 處的任意兩數（也可以 2 顆棋都放在同一個數），每 1 個棋子代表選擇 1 個數。接著在上方棋盤上，將

兩顆棋子的數互乘所得到的乘積數格子上，放置屬於己方顏色的棋子。

2.接下來雙方只能輪流移動棋盤下方 1～9 兩顆棋子中的 1 顆（1 個數），得到兩數的乘積數，在上方對應的乘積數上放置屬於自己顏色的棋子。

3.已經被「佔領」的格子，無法再重複放置其他的棋子。

4.任一方「佔領」的格子在橫、直、或斜線上連續佔領 4 個數，就是獲勝方。



(圖 2)對戰棋盤示例

自行拍照

5.當上方棋盤上沒有剩餘格子時，或移動兩個候選數都沒有可放置的格子時，遊戲結束（和局）。

例如：圖 2 中先手先挑選了下方 1～9 中的「6」和「2」、得到乘積數「12」（2x6），就在棋盤上方 12 的格子裡，放下一顆自己的紅色棋子。後手接下來保留「2」、將「6」移動到「2」，得到乘積數「4」（2x2），就在棋盤上方 4 的格子裡放下一顆自己的原色棋子。在圖 2 例子中，先手的紅色棋子最先排成有連續 4 顆的 1 直線（紅色框），所以先手獲勝。

三、名詞解釋

1.候選數：在棋盤下方 1～9，雙方可輪流選取的兩個相同或不同的數字。

2.乘積數：棋盤下方挑選到的兩個候選數，相乘所得到、在棋盤上方格子中的數字。

3.賓果（獲勝）判定：任一方佔領的格子，在直線、橫線或斜線方向，可以排列成連續的 4 顆時，即為賓果／獲勝。

4.「聽」：當一方只要再下一個乘積數就可以得到 4 數連一直線而賓果獲勝，此狀態稱為「聽」。

5.和局：當上方棋盤上沒有剩餘格子時，或移動兩個候選數中的任一個候選數，都沒有可放置的格子，遊戲就會結束。

6.賓果係數：每個乘積數下一步變化的乘積數中，「無法和自己成為賓果組合的乘積數個數」減去「能與自己成為賓果組合的乘積數個數」之後，除以該乘積數下一步可變化的乘積數個數。

四、研究目的

(一) 探究棋盤上「數字」與「排列方式」兩者間具有的性質與關係。

(二) 用 Scratch 編寫電腦程式，探究雙方隨機對戰下的優勢方與勝率。

(三) 探究遊戲中的獲勝方使用哪些對戰策略，以提高獲勝機會。

(四) 探究棋盤上的數字具有哪些會影響獲勝機會的性質，以便選擇對戰策略時列入評估。

(五) 探究本遊戲的優勢方與優勢策略。

貳、研究設備

一、 紙製棋盤、密集板雷切棋具、紙筆。

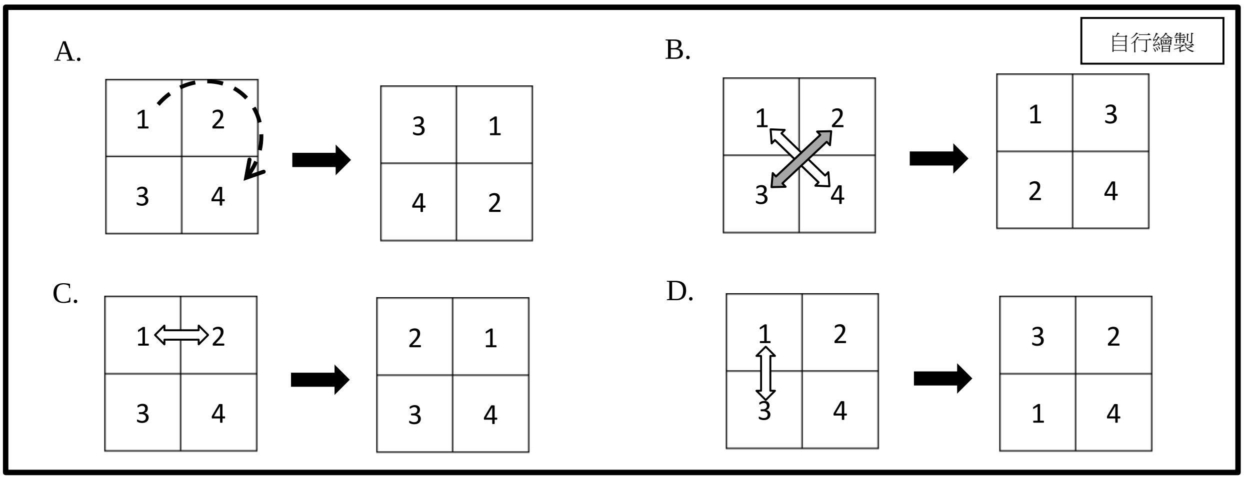
二、 電腦與軟體：Scratch（電腦隨機下棋程式編寫）、Word（整理研究成果）、Excel（各項性質分析）、PowerPoint（繪製分析圖）。

參、研究過程與結果

一、探究 2×2～5×5 的棋盤組合與優勢方

(一)改變 2×2 棋盤上的數字排列方式

我們先從最小的 2×2 棋盤開始研究如果改變棋盤上的數字所在位置，對遊戲會有什麼影響？分別依據順/逆時針旋轉（如圖 3A）、對角線互換（如圖 3B）、上下或左右 2 數互換（如圖 3C、D）等方式來變化，觀察相鄰或可連線數字之間的關係。



(圖 3) 變化 2×2 棋盤上的數字排列組合(自行繪製)

結果發現：

1. 順時針或逆時針旋轉、對角線互換時，2×2 棋盤相鄰或可連線的兩數不變，不影響連線結果。
2. 如圖 3C 所示，上下或左右 2 數互換時，如果只調換其中一組數字，就會讓相鄰數字改變，但是可連線的數字（可「賓果」獲勝的組合）並不會受到影響。

【結論】因為不管相鄰的數是否有改變，2×2 棋盤上的 4 個數字，彼此還是都可以互相連線。所以：**在 2×2 棋盤變化數字排列方式，對遊戲的勝率並不會有影響。**

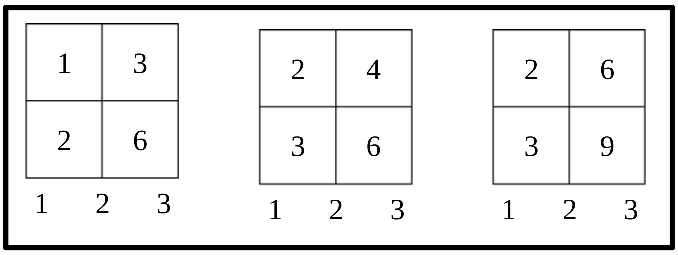
(二)探究 2×2 棋盤的數字組合與優勢方

我們研究發現候選數 1～3 時，乘積數有 1、2、3、4、6、9，共 6 個數字。從 6 個乘積數中選 4 個數字放入 2x2 的棋盤，考量可以改變數字排列順序的話，我們使用組合計算網站計算，依據 2x2 棋盤的 4 種排列組合來計算，共 60 種棋盤組合（15x4）。我們先按照數字由小到大排列，發現可以組成表 1。而其中只有圖 4 中的 4 種 2×2 棋盤，是先手必勝的結果，其他組合則是可能和局，後手完全沒有獲勝的機會！因為不管後手先下哪一個數，只能佔住棋盤中的 1 個位置，都無法阻擋先手的第 2 個數，與其第 1 個數連線！例如：圖 4 左，先手下 1(1×1)，後手下 3(1×3)，先手不管是下 2(1×2)或 4(2×2 或 1×4)，均可連線而獲勝。

(表 1)2×2 不同棋盤乘積數組合彙整表
紅色的數字為導致此局為和局的數

1、2、3、4（可能和局）	1、2、4、6（可能和局）	1、3、4、6（可能和局）	1、4、6、9（一定和局）	2、3、6、9（先手必勝）
1、2、3、6（先手必勝）	1、2、4、9（一定和局）	1、3、4、9（一定和局）	2、3、4、6（先手必勝）	2、4、6、9（可能和局）
1、2、3、9（可能和局）	1、2、6、9（可能和局）	1、3、6、9（可能和局）	2、3、4、9（可能和局）	3、4、6、9（可能和局）

我們發現：只要 2×2 棋盤中的四個乘積同時有 2、3、6，這個棋盤就一定是先手必勝的棋盤。所以 2×2 棋盤先手必勝或和局，對戰遊戲沒有挑戰性。



(圖 4) 先手必勝的 3 種的 2×2 棋盤(自行繪製)

(三)探究 3×3 棋盤的數字組合與優勢方

候選數 1～4，乘積數有 1、2、3、4、6、8、9、12、16，共 9 個數字，剛好可以組成 3×3 的棋盤。如果可以改變棋盤上的數字大小排列順序，以階乘計算機網站計算（9×8×7×⋯×3×2×1），得出可以變化出 362880 種棋盤組合。因可能性過多，後續我們只探究乘積數由小到大排列的棋盤，將其組成如圖 5 所示的 3×3 棋盤。

我們嘗試用這個棋盤來對戰，得到如表 2 所示的幾種可能結果。從表 2 中可看到 3×3 的棋盤對戰，先手以類似井字遊戲的策略，搶佔中間的 6 較佔優勢。

1	4	9
2	6	12
3	8	16

1 2 3 4

(圖 5) 3×3 棋盤(自行繪製)

(表 2) 3×3 棋盤對戰過程紀錄彙整表

示例局數	先手	後手	先手	後手	先手	後手	先手	後手	先手	結果
1	6	2	1	3	9	12	16			先手勝
2	6	3	1	4	16					先手勝
3	6	3	1	2	4	8	16			先手勝
4	6	4	8	2	1	3	9	12	16	先手勝
5	6	4	8	12	16					和局
6	6	4	8	16	12	9	3	1		後手勝
7	6	8	16	4	1					先手勝
8	6	8	16	12	9	3	1			先手勝
9	6	9	12	16	8	2	4			先手勝
10	6	9	12	16	8	4	2			先手勝
11	6	12	9	3	1	2	4	8	16	先手勝

(四)探究 4×4 棋盤的數字組合

在候選數 1～5 時，只有 14 個乘積數（1、2、3、4、5、6、8、9、10、12、15、16、20、25），無法放滿 4×4 棋盤的 16 個格子，但可以取 9 個數放入 3×3 棋盤。我們利用組合計算機的網站資源，計算從 14 個數中取 9 個數，共有 2002 種棋盤組合。

當候選數是 1～6 時，乘積數有：1、2、3、4、5、6、8、9、10、12、15、16、18、20、24、25、30、36，共 18 個。可選擇其中 16 個來放入 4×4 棋盤格子中，我們利用組合計算機的網站資源，並按照數字大小排列，計算出可變化 153 種不同的棋盤排列。圖 6 示例其中一種 4×4 的棋盤組合。

1	5	10	18
2	6	12	20
3	8	15	24
4	9	16	25

1 2 3 4 5 6

(圖 6) 一種 4×4 的棋盤(自行繪製)

我們發現：若候選數能乘出的總乘積數大於棋盤格子，容易造成和局的現象（例如：2x2、4x4 棋盤）。從觀察 3x3 到 4x4 棋盤組合數多到無法研究，想必 5x5、6x6 棋盤的組合數一定更高，在沒有規律的情況下，考量棋盤的組合可能性較多，我們便不再研究不同棋盤組合的優勢方了。

(五)探究 5×5 和 6×6 的棋盤數字組合

候選數 1～7 時，乘積數有：1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、12、14、15、16、18、20、21、24、25、28、30、35、36、42、49，共 25 個，剛好可以放入 5x5 的棋盤的 25 個格子中（如圖 7 所示）。

1	6	12	20	30
2	7	14	21	35
3	8	15	24	36
4	9	16	25	42
5	10	18	28	49

1　2　3　4　5　6　7

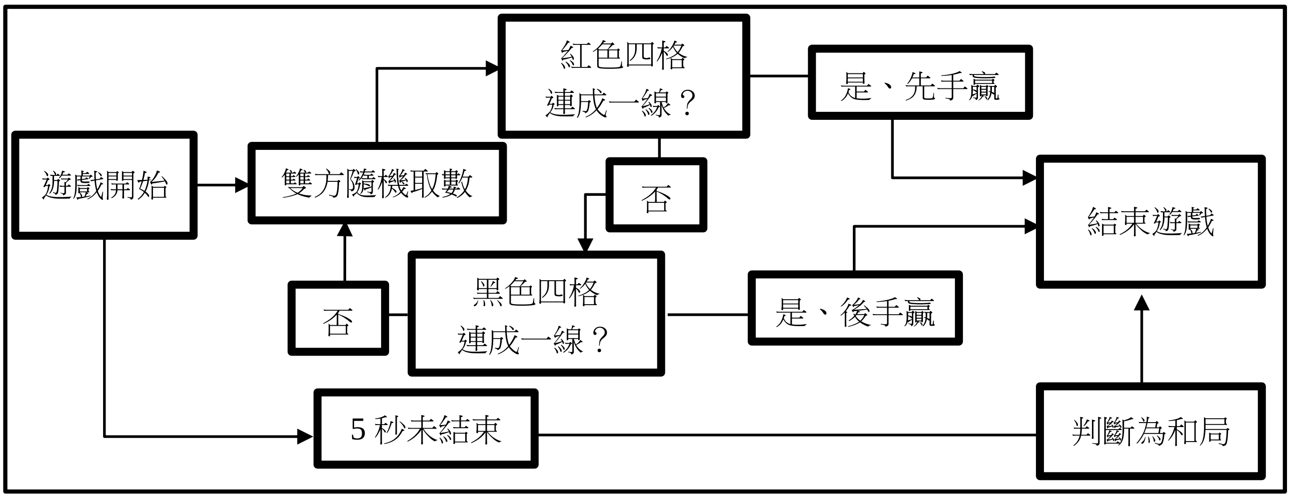
(圖 7) 5x5 的棋盤(自行繪製)

候選數 1～9 有 36 個乘積數，剛好可以組成我們最初玩的 6×6 乘法賓果棋盤（圖 1）。因為較大棋盤的對戰結果變化較多，我們便直接研究 6×6 的棋盤對戰。

二、探究 6×6 棋盤電腦隨機下棋雙方的勝率

(一) 用 Scratch 寫程式讓電腦隨機下棋

1.程式的流程圖見圖 8。



(圖 8)電腦對戰程式設計流程圖(自行繪製)

2.程式碼

(1)遊戲開始、結束（見下頁圖 9）：

①一開始隨機取 2 數作為候選數。

②如超過 5 秒則結束遊戲。（約 4 秒後就有勝負）

(2)雙方輪流隨機取數下棋（見下圖 10）：

①隨機選一顆棋。

②把棋移到另一個隨機的位置，計算兩棋乘積。

(圖 9)遊戲開始與結束的程式碼

(圖 10)雙方輪流隨機取數的程式碼

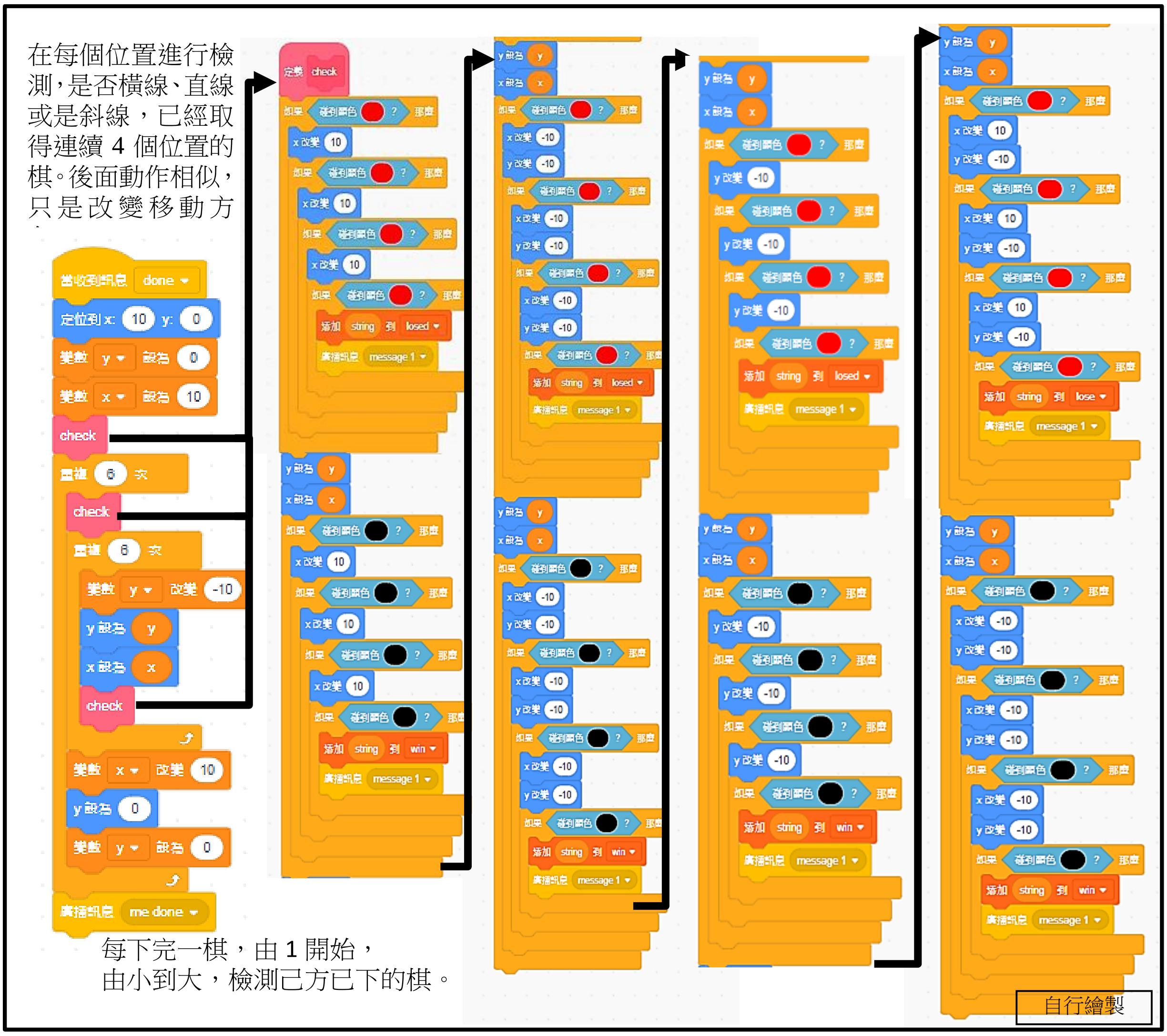
③如果乘積有在下棋紀錄裡面的話，就重選。重複①、②，直到有可以下的棋。

④在到對應的位置下棋，並記錄到是紅色（先手）或黑色（後手）的棋。

(3)判斷紅色、黑色四格同色是否連成一線（見下頁圖 11）：

①每下完一棋，由 1 開始，依照由小到大的順序移動，檢測己方已下的棋。

②在每個位置進行檢測是否橫線、直線或是斜線，已經取得連續 4 個位置的棋。

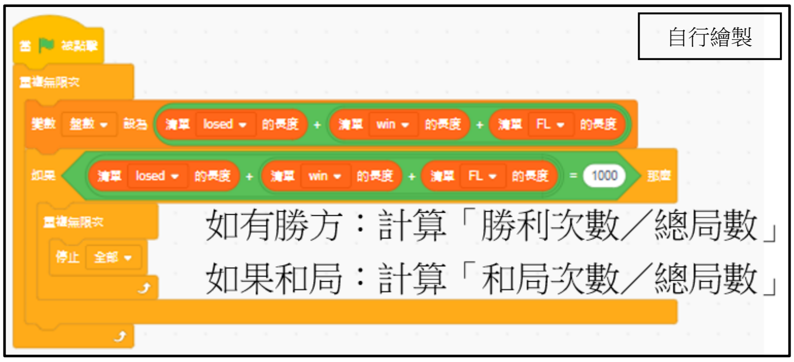


(圖 11)判斷任一方是否已經 4 數連線獲勝的程式碼

(4)判斷雙方勝率（見圖 12）：

①如有獲勝方：在該角色的獲勝次數+1，並計算「勝利次數／總局數」。

②如果和局：則在和局次數+1，並計算「和局次數／總局數」。



(圖 12)顯示對戰結果勝率的程式碼(自行製圖)

3.對戰結果分析

以圖 13 來示例一局電腦自行模擬對戰的結果。左上角第 1 格的 1 代表這個格子原本的數字、(25)代表第 25 步棋、1×1 代表該數的候選數組成。

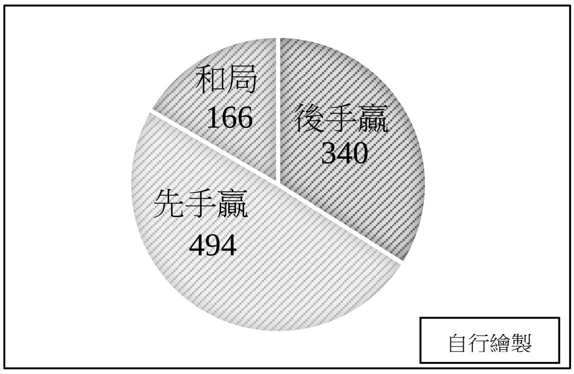
1(25) 1×1	7(24) 1×7	15(29) 3×5	25(27) 5×5	36(12) 4×9	54
2	8(1) 1×8	16(20) 2×8	27(10) 3×9	40(7) 5×8	56
3(17) 1×3	9(18) 3×3	18(9) 3×6	28(13) 4×7	42	63(23) 7×9
4(4) 1×4	10(28) 2×5	20(5) 4×5	30(8) 5×6	45(6) 5×9	64(2) 8×8
5(26) 1×5	12(16) 2×8	21(14) 3×7	32(3) 4×8	48	72(11) 8×9
6(19) 2×3	14(21) 2×7	24(15) 3×8	35(22) 5×7	49	81

(圖 13)電腦隨機對戰和局過程示例圖(自行繪製)

由電腦自行隨機下棋時 1000 盤棋，結果（見圖 14）：後手 340 勝，先手 494 勝，和局為 166 次，先手的勝率較高，勝率大約接近 5 成。

同樣的用電腦模擬在 5×5 棋盤上隨機對戰，結果顯示若規則為 4 格連成一線才賓果，則和局較多。若 3 格連成一線就賓果，則勝率與 6×6 棋盤差不多，也是先手勝率較高。

所以從電腦隨機下棋的結果可以得知：先手勝率比較高。但是，若是雙方都有使用策略來下棋時，還是先手的勝率較高嗎？



(圖 14)電腦隨機 1000 局雙方獲勝局數圓餅圖(自行繪製)

三、探究 6×6 棋盤可使用的對戰策略

(一) 42 策略

經過我們多次嘗試對戰，發現取得棋盤上乘積數 42 的一方，較容易獲勝。所以我們將先取得 42 一數的策略稱為「42 策略」。但是 42 策略並非能確保必勝，還是要考慮下面的各種條件來應戰：

1. 42 策略中，先手贏的機率雖大，但不一定先手必贏。以圖 15 為例，先手均取得 42，但後手仍有贏的機會。在圖 15 的兩個例子中，勝方皆取得了因數較多的數（18 或 24）。

1 (14) 1×1	7	15 (6) 5×3	25	36	54
2 (10) 1×2	8 (15) 1×8	16	27	40 (5) 5×8	56
3 (8) 3×1	9 (9) 1×9	18 (7) 3×6	28 (17) 4×7	42 (1) 6×7	63
4 (13) 1×4	10 (11) 2×5	20	30 (2) 6×5	45 (3) 5×9	64
5 (12) 5×1	12	21	32 (16) 8×4	48	72
6	14	24	35 (4) 5×7	49	81

1	7	15	25 (13) 5×5	36	54
2	8	16 (15) 2×8	27	40	56
3	9 (10) 9×1	18 (2) 6×3	28 (8) 7×4	42 (1) 6×7	63 (9) 7×9
4	10 (14) 5×2	20 (4) 5×4	30 (3) 6×5	45 (12) 9×5	64
5	12	21 (6) 3×7	32	48	72
6	14	24 8×3	35 (5) 5×7	49 (7) 7×7	81 (11) 9×9

(圖 15) 42 策略對戰結果示例（左：先手獲勝；右：後手獲勝）(自行繪製)

2. 若先達到三個連成一條線，且前後兩數都有共同因數，勝率則會提升，這樣的數字組和 42 有關的有：（18、20、21）和（56、63、64）。所以使用 42 策略時，若對手有下 18，己方應取得 21。若 18 和 21 均被對方搶走，取得 42 的一方，如後續想取得連線的機會，就會被侷限於棋盤右側，較不利於發展。如圖 15 右先手取得 42，連線機會被後手的 18 和 21 兩數阻擋，最終輸掉此局。

3. 42 戰術中，最好要搭配先搶同一直欄（如圖 15 左紅色框）的 49、36、45，這樣「聽」的數：48、40（有公因數 8），只要候選數有 8，就可以取得其中任 1 數而獲勝。所以 42 搭配搶 49、36、45，可提高獲勝機會。

(二) 25 策略

25 策略是指以取得乘積數 25(5×5)為基礎，後續發展的策略。以圖 16 為例，來討論後續可行的對戰策略。

1	7	15	25	36	54
2	8	16	27	40	56
3	9	18	28	42	63
4	10	20	30	45	64
5	12	21	32	48	72
6	14	24	35	49	81

(圖 16) 25 策略可變換的乘積數位置對照圖(自行繪製)

在圖 16 中，先手下了 25 後，對手可下的乘積數，是剩下的 5 的倍數：5、10、15、20、30、40、45、35，其中 5、35 兩數離 25 很遠，下了對先手的連線不具影響力，所以是對手不太會選擇接連要下的數。在不考慮後手下這兩數的可能性下，探究後續要如何去因應。

1. 若對手下 15：大原則就是去搶 40。因為 40 鄰近 25，從 40 可以擴散到 8 的倍數，對連線較有發展性；下 10、20、45 對連線沒什麼幫助。最理想狀態是如表 3 所示，結果先手可獲勝。

(表 3) 25 策略因應對手搶 15 的理想走法
(方框數字為賓果組合，灰底字為平方數)

輪數	1	2	3	4	5	6
先手	25(5×5)	$\boxed{40(5×8)}$	$\boxed{27(3×9)}$	$\boxed{16(2×8)}$	28(4×7)	$\boxed{56(7×8)}$
後手	15(3×5)	45(5×9)	18(2×9)	8(2×4)	21(3×7)	

2. 若對手下 40：大原則就是去搶 15。理由同 40，因為 15 鄰近 25，且下 15 能夠向外發展 3 的倍數（18、9、27），有利於快速連出多組賓果連線的可能性。最理想狀態是如下頁表 4 所示，結果先手可獲勝。

(表 4) 25 策略因應對手搶 40 的理想走法

(方框數字為賓果組合，灰底字為平方數)

輪數	1	2	3	4	5	6	7
先手	25(5×5)	$\boxed{15(3×5)}$	36(4×9)	$\boxed{18(2×9)}$	9(3×3)	$\boxed{16(4×4)}$	$\boxed{20(4×5)}$
後手	40(5×8)	45(5×9)	54(6×9)	27(3×9)	12(3×4)	28(4×7)	

3. 若對手下 10：大原則還是去搶 15。因為 15 有利於快速連出多組賓果連線的可能性。最理想狀態是如表 5 所示，不管對手最後是下 32 還是 48，先手都會贏。

(表 5) 25 策略因應對手搶 10 的理想走法

(方框或灰底數字為賓果組合，灰底字為平方數)

輪數	1	2	3	4	5	6
先手	25(5×5)	$\boxed{15(3×5)}$	12(3×4)	36(4×9)	30(5×6)	$\boxed{27(3×9)}$
後手	10(2×5)	9(3×3)	8(2×4)	20(4×5)	18(3×6)	6(2×3)

輪數	7	8	9	10	11
先手	16(2×8)	45(5×9)	81(9×9)	$\boxed{64(8×8)}$	28(4×7)或 $\boxed{42(6×7)}$
後手	40(5×8)	54(6×9)	72(8×9)	32(4×8)或 48(6×8)	

我們在多次使用 25 策略對戰，觀察比較後續的幾種可能走法後，有下列幾點心得與發現：

1. 25 策略的原則，主要是搭配搶 15，如果對手搶了 15，則要搶 40。因為 15 可向外延伸到 3 的倍數，取得賓果連線的可能性最多。40 則是可以延伸到 8 的倍數，較有利於賓果連線。
2. 把已經下過的乘積數的因數組合盡量下完，例如表 2 集中下在 5、4、9 這幾個數的倍數，表 1 集中在 3、5、8、9 的倍數，會使對手無可下的乘積數而走投無路，被迫選擇無法讓自己連線的數。
3. 觀察表 1、表 2 和表 3，使用 25 策略的先手，都比後手取得較多的平方數。

四、6×6 棋盤上各乘積數的性質分析

(一)乘積數中的平方數

乘積數中的平方數，可分為「多候選數」和「少候選數」兩種類型：

1. 「多候選數」的平方數：有 4、9、16、36 等，共有 4 個乘積數。
2. 「少候選數」的平方數：有 1、25、49、64、81 等，共有 5 個乘積數。

「少候選數」的平方數，是兩個一樣的候選數互乘，選擇這類型的乘積數，有好處也有壞處：

- 壞處：如果選擇下「少候選數」的平方數，等於只封鎖了一個候選數，對要阻擋對方的連線上，影響效益不大。
- 好處：若平方數周圍有許多與平方數有相同候選數（公因數）的乘積數，例如：16 周圍有 8、28，則對手無法破壞己方其中一條路線，就有機會突破對方的封鎖而成功延伸出賓果連線。

平方數也適合作為一個對戰策略的起始點。例如：25 策略就是其中一例。25 的周圍有 2 個平方數（16、36）和 1 個立方數（27）與之相鄰、且形成賓果的連線，很適合己方發展連線，而不易被對方阻擋。這或許可以解釋為何 25 策略易使己方獲勝。

(二)乘積數的候選數個數分析

我們將棋盤上的每個乘積數，找出有哪些候選數可以取得它，發現可以將乘積數分成下列 4 種：

1. 1 個候選數的乘積數：1、25、49、64、81，共有 5 個乘積數。
2. 2 個候選數的乘積數：2、3、5、7、10、14、15、20、21、27、28、30、32、35、40、42、45、48、54、56、63、72，共有 22 個乘積數。
3. 3 個候選數的乘積數：有 4、9、16、36 等，共有 4 個乘積數，同時也都是平方數。
4. 4 個候選數的乘積數：有 6（1×6、2×3）、8（1×8、2×4）、12（2×6、3×4）、18（2×9、3×6）、24（3×8、4×6）等，共有 5 個乘積數。

我們發現在對戰時，取得有 3 個或 4 個候選數的乘積數（我們將之稱為「多候選數的乘積數」），會較容易提高獲勝機會。

因為若一方只要再取得上面列出的「多候選數的乘積數」任一數，就連成一條賓果線，則會導致對手不能下的候選數增加，便可以封鎖對手的連線，而提高己方的勝算。

以圖 17 為例：若一方「聽」時只缺上面列出的「多候選數的乘積數」中的 4，則對手為了不讓對方取得 4、且自己下一步也不可能取得 4 時，便不能使用 1、2、4 這 3 個紫色的候選數，也就要避開「一定會使用到」這 3 個紫色候選數的乘積數（圖 17 中的藍色數字）。對手只能選擇下剩餘黑色的候選數，便大幅縮小了能下的乘積數範圍。

1	**7**	15	25	36	54
2	**8**	**16**	27	40	56
3	9	18	**28**	42	63
4	**10**	**20**	30	45	64
5	**12**	21	**32**	48	72
6	**14**	24	35	49	81

1 **2** 3 **4** 5 6 7 8 9

(圖 17)避開多因數乘積數 4 的封鎖情形(自行繪製)

我們發現選擇「多候選數的乘積數」，在對戰中可以產生下面的影響力：

1. 因為「多候選數的乘積數」有更多種的候選數，可以變化出較多的乘積數，在進攻想取得可連線的乘積數時，較不易被對方封鎖。
2. 選擇了「多候選數的乘積數」，會讓對手的進攻方式會變得單一，因為對手怕讓己方連線，會有許多乘積數不能下，可讓己方的防守變得更加容易。
3. 假設己方封鎖 4（如圖 17），對手只能使用 3、5、6、7、8、9 等候選數拼湊出的乘積數，只要將這些候選數能拼湊出的乘積數都下完，或趁自己有優勢時多搶幾個乘積數，就很有機會獲勝。

(三)探究乘積數的賓果組合

我們試著將棋盤上可以以連成賓果的 4 個乘積數組合列出來，彙整成表 6，總共有 54 種組合。

(表 6) 乘積數的賓果組合彙整表

1、2、3、4	5、12、21、32	9、18、28、42	16、18、20、21	24、35、49、81
1、7、15、25	5、10、18、27	9、20、32、49	16、27、40、56	25、27、28、30
1、8、18、30	6、14、24、35	10、20、30、45	16、28、45、72	27、28、30、32
2、3、4、5	6、12、20、28	10、18、27、36	18、20、21、24	28、30、32、35
2、8、16、27	7、8、9、10	12、21、32、48	18、28、42、63	36、40、42、45
2、9、20、32	7、15、25、36	12、20、28、40	18、30、48、81	40、42、45、48
3、4、5、6	7、16、28、45	14、24、35、49	20、30、45、64	42、45、48、49
3、9、18、28	8、9、10、12	14、21、30、42	20、28、40、54	54、56、63、64
3、10、21、35	8、16、27、40	15、16、18、20	21、32、48、72	56、63、64、72
4、9、16、25	8、18、30、48	15、25、36、54	21、30、42、56	63、64、72、81
4、10、20、30	9、10、12、14	15、27、42、64	24、32、45、63	

(四)乘積數的賓果組合相關性質分析

我們將各個乘積數可能會影響獲勝機會的性質，一一列出來，利用 EXCEL 統計數量，以便做為後續分析對戰策略的研究資料。

下頁表 7 為各乘積數的賓果組合相關性質分析，包含有：賓果組合數、可賓果的乘積數、可賓果的乘積數否連跳／或不可連跳的個數…等。因為可賓果的乘積數（表 7 中的 C 欄），如果可以連跳（表 7 中的 D 欄），就有機會被對手阻擋，而不可連跳的賓果數（表 7 中的 E 欄），對手無法在下一步直接阻擋，所以我們將「不可連跳／阻擋的賓果數 E」減去「可連跳／被阻擋的賓果數 D」，再除以「全部的可賓果乘積數 C」，當成此乘積數的「賓果係數」。

(表 7) 各乘積數的賓果組合相關性質分析表

乘積數	賓果組合(橫+直+斜)	A.賓果組合個數	B.可賓果的乘積數 (紅色是可連跳乘賓果的乘積數)	C.可賓果的乘積數個數	D.可連跳成賓果的乘積數個數	E.不可連跳成賓果的乘積數個數	賓果係數 $\frac{E-D}{C}$
1	1+1+1	3	**2 3 4 7 8** 15 18 25 30	9	5	4	-0.11
2	1+2+1	4	**1 3 4 5 8 9 16** 20 27 32	10	7	3	-0.40
3	1+3+1	5	**1 2 4 5 6 9** 10 **18 21** 28 35	11	8	3	-0.45
4	1+3+1	5	**1 2 3 5 6 9 10 16 20** 25 30	11	9	2	-0.64
5	1+2+1	4	**2 3 4 6 10** 12 18 21 27 32	10	5	5	0.00
6	1+1+1	3	**3 4 5 12 14** 20 **24** 28 35	9	6	3	-0.33
7	2+1+1	4	**1 8 9** 10 15 16 25 **28** 36 45	10	4	6	0.20
8	2+2+2	6	**1 2 7 9 10 12 16 18** 27 30 **40 48**	12	10	2	-0.67
9	2+3+3	8	**2 3 4 7 8** 10 **12** 14 16 **18** 20 25 28 32 42 49	16	7	9	0.13
10	2+3+3	8	3 **4 5** 7 **8** 9 **12 14 18 20** 21 27 **30 35** 36 **45**	16	10	6	-0.25
12	2+2+2	6	5 **6 8 9 10 14 20 21 28 32** 40 48	12	10	2	-0.67
14	2+1+1	4	**6** 9 **10 12 21** 24 30 **35 42 49**	10	7	3	-0.40
15	3+1+1	5	1 7 16 **18 20 25 27** 36 42 54 64	11	4	7	0.27
16	3+2+3	8	**2 4** 7 **8** 9 15 **18 20** 21 25 27 **28** **40** 45 **56 72**	16	9	7	-0.13
18	3+3+5	11	1 **3** 5 **8 9 10 15 16** 20 **21 24 27** 28 **30 36 42 48 63 81**	19	15	4	-0.58
20	3+3+5	11	2 **4** 6 9 **10 12 15 16** 18 21 **24 28** **30 32 40 45** 49 54 64	19	11	8	-0.16
21	3+2+3	8	**3** 5 10 **12 14** 16 **18** 20 **24** 30 32 **35** **42** 48 **56** 72	16	8	8	0.00
24	3+1+1	5	**6** 14 **18 20 21 32** 35 45 49 63 81	11	5	6	0.09
25	3+1+1	5	1 4 7 9 **15** 16 27 28 **30** 36 54	11	2	9	0.64
27	3+2+3	8	2 5 8 10 **15** 16 **18** 25 28 30 32 **36** 40 42 56 64	16	3	13	0.63
28	3+3+5	11	3 6 **7** 9 **12 16** 18 **20** 25 27 30 **32** **35** 40 **42** 45 54 **63** 72	19	8	11	0.16
30	3+3+5	11	1 4 8 **10** 14 **18 20** 21 **25** 27 28 32 **35 42 45 48** 56 64 81	19	8	11	0.16
32	3+2+3	8	2 5 9 **12 20** 21 **24** 27 **28** 30 35 45 **48** 49 63 **72**	16	6	10	0.25
35	3+1+1	5	3 6 **10 14 21** 24 **28 30** 32 **49** 81	11	6	5	-0.09
36	2+1+1	4	7 10 15 **18** 25 **27** 40 **42 45 54**	10	5	5	0.00
40	2+2+2	6	**8** 12 **16 20** 27 28 36 42 **45 48** 54 **56**	12	6	6	0.00
42	2+3+3	8	9 **14** 15 **18 21** 27 **28 30 36** 40 45 **48** **49 56 63** 64	16	10	6	-0.25
45	2+3+3	8	7 **10** 16 **20** 24 28 **30** 32 **36 40** 42 48 49 **63** 64 **72**	16	7	9	0.13
48	2+2+2	6	**8 12 18** 21 **30 32 40 42** 45 49 **72** 81	12	8	4	-0.33

（下頁續）

(表 7) 各乘積數的賓果組合相關性質分析表(續)

乘積數	賓果組合(橫+直+斜)	A.賓果組合個數	B.可賓果的乘積數 (紅色是可連跳乘賓果的乘積數)	C.可賓果的乘積數個數	D.可連跳成賓果的乘積數個數	E.不可連跳成賓果的乘積數個數	賓果係數 $\frac{E-D}{C}$
49	2+1+1	4	9 **14** 20 24 32 **35** **42** 45 48 81	10	3	7	0.40
54	1+1+1	3	15 20 25 28 **36** 40 56 **63** 64	9	2	7	0.56
56	1+2+1	4	**16** **21** 27 30 **40** **42** 54 **63** **64** **72**	10	7	3	-0.40
63	1+3+1	5	**18** 24 **28** 32 **42** **45** **54** **56** 64 **72** **81**	11	8	3	-0.45
64	1+3+1	5	15 20 27 30 42 45 54 **56** 63 **72** 81	11	2	9	0.64
72	1+2+1	4	**16** 21 28 **32** **45** **48** **56** **63** **64** **81**	10	8	2	-0.60
81	1+1+1	3	**18** 24 30 35 48 49 **63** 64 **72**	9	3	6	0.33

「賓果係數」愈高，代表愈不容易被對手阻擋、可得到賓果的機會愈大。觀察比較表 7 的「賓果係數」，可以發現賓果係數最高是 0.64，乘積數分別是 25 和 64，這兩數恰巧也都是平方數。這和我們在研究四、(一)中的發現：**平方數也適合作為一個對戰策略的起始點**一致。但是其餘平方數的賓果係數為何不高？為何我們之前不覺得 64 是個好的對戰策略？

我們再將表 7 的 A.賓果組合個數彙整到棋盤上，以便觀察乘積數的賓果組合相關性質，和在棋盤排列位置之間的關係。圖 18 左為賓果組合數量、右為「賓果係數」。

1(3)	7(4)	15(5)	25(5)	36(4)	54(3)
2(4)	8(6)	16(8)	27(8)	40(6)	56(4)
3(5)	9(8)	18(11)	28(11)	42(8)	63(5)
4(5)	10(8)	20(11)	30(11)	45(8)	64(5)
5(4)	12(6)	21(8)	32(8)	48(6)	72(4)
6(3)	14(4)	24(5)	35(5)	49(4)	81(3)

1(-0.11)	7(0.20)	15(0.27)	25(0.64)	36(0.00)	54(0.56)
2(-0.40)	8(-0.67)	16(-0.13)	27(0.63)	40(0.00)	56(-0.40)
3(-0.45)	9(0.13)	18(-0.58)	28(0.16)	42(-0.25)	63(-0.45)
4(-0.64)	10(-0.25)	20(-0.16)	30(0.16)	45(0.13)	64(0.64)
5(0.00)	12(-0.67)	21(0.00)	32(0.25)	48(-0.33)	72(-0.60)
6(-0.33)	14(-0.40)	24(0.09)	35(-0.09)	49(0.40)	81(0.33)

(圖 18)各乘積數的賓果相關性質對照圖(自行繪製)

（左：賓果組合個數；右：賓果係數）

從圖 18 左可以發現：

1. 賓果組合個數，在棋盤上位置有對稱性。我們只要找出位於左上角九宮格的 9 個乘積數各有幾種賓果組合，就可以推算出位於另外 3 塊九宮格的乘積數的賓果組合個數了。

2. 愈靠近棋盤中央位置的乘積數，賓果組合個數愈多，理論上獲勝機會愈大。但是還要考慮被對手在下一步阻礙取得賓果獲勝的機會。所以還要將賓果係數一起列入考慮。

從圖 18 右可以發現：賓果係數最高的 25，可與其賓果連線的乘積數，賓果係數明顯比其他乘積數更多為非負數的情形。而另一個賓果係數最高的 64，其可賓果的乘積數就比較 25 有較多的負數。所以，從賓果係數可以解釋 25 策略為何是較容易獲勝的策略。

(五)可連跳的乘積數相關性質分析

表 8 則是與各乘積數可變化（連跳）的乘積數相關性質分析，包含有：候選數組合、可連跳的乘積數（有公因數）、可連跳的乘積數個數、可連跳「成賓果／不可賓果的」乘積數及個數。

(表 8)可連跳的乘積數相關性質分析表

乘積數	候選數組合	候選數個數	可連跳的乘積數(有公因數) 紅色是可連跳且賓果	F.可連跳的乘積數個數	D.可連跳且賓果的乘積數個數	G.可連跳無法賓果的乘積數個數
1	1×1	1	**2** **3** **4** 5 6 **7** **8** 9	8	5	3
2	1×2	2	**1** **3** **4** **5** 6 7 **8** **9** ~~4~~ ~~6~~ ~~8~~ 10 12 14 **16** 18	13	7	6
3	1×3	2	**1** **2** **4** **5** **6** 7 8 **9** ~~6~~ ~~9~~ 12 15 **18** **21** 24 27	14	8	6
4	1×4 2×2	3	**1** **2** **3** **5** **6** 7 8 **9** ~~8~~ 12 **16** **20** 24 28 32 36 ~~2~~ ~~6~~ ~~8~~ **10** ~~12~~ 14 ~~16~~ 18	18	9	9
5	1×5	2	1 **2** **3** **4** **6** 7 8 9 **10** 15 20 25 30 35 40 45	16	5	11
6	1×6 2×3	4	1 2 **3** **4** **5** 7 8 9 **12** 18 **24** 30 36 42 48 54 ~~2~~ ~~4~~ ~~8~~ 10 ~~12~~ **14** 16 ~~18~~ ~~3~~ ~~9~~ ~~12~~ 15 ~~18~~ 21 ~~24~~ 27	22	6	16
7	1×7	2	**1** 2 3 4 5 6 **8** **9** 14 21 **28** 35 42 49 56 63	16	4	12
8	1×8 2×4	4	**1** **2** 3 4 5 6 **7** **9** **16** 24 32 **40** **48** 56 64 72 ~~2~~ ~~4~~ ~~6~~ **10** **12** 14 ~~16~~ **18** ~~4~~ ~~12~~ ~~16~~ 20 ~~24~~ 28 ~~32~~ 36	23	10	13
9	1×9 3×3	3	1 **2** **3** **4** 5 6 **7** **8** **18** 27 36 45 54 63 72 81 ~~3~~ ~~6~~ **12** 15 ~~18~~ 21 24 ~~27~~	20	7	13
10	2×5	2	2 **4** 6 **8** **12** **14** 16 **18** **5** 15 **20** 25 **30** **35** 40 **45**	16	10	6

（下頁續）

(表 8)可連跳的乘積數相關性質分析表(續)

乘積數	候選數組合	候選數個數	可連跳的乘積數(有公因數) 紅色是可連跳且賓果	F.可連跳的乘積數個數	D.可連跳且賓果的乘積數個數	G.可連跳無法賓果的乘積數個數
12	2×6 3×4	4	2 4 **6** **8** **10** **14** 16 18 ~~6~~ ~~18~~ 24 30 36 42 **48** 54 3 ~~6~~ **9** 15 ~~18~~ **21** ~~24~~ 27 ~~4~~ ~~8~~ ~~16~~ **20** ~~24~~ **28** **32** ~~36~~	22	10	12
14	2×7	2	2 4 **6** 8 **10** **12** 16 18 7 **21** 28 **35** **42** **49** 56 63	16	7	9
15	3×5	2	3 6 9 12 **18** 21 24 **27** 5 10 **20** **25** 30 35 40 45	16	4	12
16	4×4 2×8	3	**2** **4** 6 **8** 10 12 14 **18** ~~8~~ 24 32 **40** 48 **56** 64 **72** ~~4~~ ~~8~~ ~~12~~ **20** ~~24~~ **28** ~~32~~ 36	18	9	9
18	3×6 2×9	4	2 4 6 **8** **10** 12 14 **16** **9** **27** **36** 45 54 **63** 72 **81** **3** ~~6~~ ~~9~~ ~~12~~ **15** **21** **24** ~~27~~ ~~6~~ ~~12~~ ~~24~~ **30** ~~36~~ **42** **48** ~~54~~	23	15	8
20	4×5	2	**4** 8 **12** **16** **24** **28** **32** 36 5 **10** **15** 25 **30** 35 **40** **45**	16	11	5
21	3×7	2	**3** 6 9 **12** 15 **18** **24** 27 7 **14** 28 **35** **42** 49 **56** 63	16	8	18
24	4×6 3×8	4	3 **6** 9 12 15 **18** **21** 27 8 16 **32** 40 48 56 64 72 4 ~~8~~ ~~12~~ ~~16~~ **20** 28 ~~32~~ 36 ~~6~~ ~~12~~ ~~18~~ 30 ~~36~~ 42 ~~48~~ 54	23	5	18
25	5×5	1	5 10 **15** 20 **30** 35 40 45	8	2	6
27	3×9	2	3 6 9 12 **15** **18** 21 24 ~~9~~ ~~18~~ **36** 45 54 63 72 81	14	3	11
28	4×7	2	4 8 **12** **16** **20** 24 **32** 36 **7** 14 21 **35** **42** 49 56 **63**	16	8	8
30	5×6	2	5 **10** 15 **20** **25** **35** 40 **45** 6 12 **18** 24 36 **42** **48** 54	16	8	8
32	4×8	2	4 8 **12** 16 **20** **24** **28** 36 ~~8~~ ~~16~~ ~~24~~ 40 **48** 56 64 **72**	13	6	7
35	5×7	2	5 **10** 15 20 25 **30** 40 45 7 **14** **21** **28** 42 **49** 56 63	16	6	10
36	4×9 6×6	3	4 8 12 16 20 24 28 32 9 **18** **27** **45** **54** 63 72 81 6 ~~12~~ ~~18~~ ~~24~~ 30 **42** 48 ~~54~~	20	5	15
40	5×8	2	5 10 15 **20** 25 30 35 **45** **8** **16** 24 32 **48** **56** 64 72	16	6	10
42	6×7	2	6 12 **18** 24 **30** **36** **48** 54 7 **14** **21** **28** 35 **49** **56** **63**	16	10	6
45	5×9	2	5 **10** 15 **20** 25 **30** 35 **40** 9 18 27 **36** 54 **63** **72** 81	16	7	9
48	6×8	2	6 **12** **18** 24 **30** 36 **42** 54 **8** 16 ~~24~~ **32** **40** 56 64 **72**	15	8	7
49	7×7	1	7 **14** 21 28 **35** **42** 56 63	8	3	5
54	6×9	2	6 12 18 24 30 **36** 42 48 9 ~~18~~ 27 ~~36~~ 45 **63** 72 81	14	2	12
56	7×8	2	7 14 **21** 28 35 **42** 49 **63** 8 **16** 24 32 **40** 48 **64** **72**	16	7	9

（下頁續）

(表 8)可連跳的乘積數相關性質分析表(續)

乘積數	候選數組合	候選數個數	可連跳的乘積數(有公因數) 紅色是可連跳且賓果	F.可連跳的乘積數個數	D.可連跳且賓果的乘積數個數	G.可連跳無法賓果的乘積數個數
63	7×9	2	7 14 21 **28** 35 **42** 49 **56** 9 **18** 27 36 **45** **54** **72** **81**	16	8	8
64	8×8	1	8 16 24 32 40 48 **56** **72**	8	2	6
72	8×9	2	8 **16** 24 **32** 40 **48** **56** **63** 9 18 27 36 **45** 54 **63** **81**	16	8	8
81	9×9	1	9 **18** 27 36 45 54 **63** **72**	8	3	5

將表 7、表 8 中的 D.可連跳且可賓果的乘積數數量（有被對手下一步阻擋的可能性－對己方有害），以及表 8 中的 G.可連跳無法賓果的乘積數數量（對手下一步不會阻礙到己方的此數賓果可能性－對己方無害），整理到棋盤上（見下頁圖 19 左和圖 19 右），以便觀察各乘積數可連跳變化的特性，和棋盤位置之間的關係。在後續的研究進行分析。

1(5)	7(4)	15(4)	25(2)	36(5)	54(2)
2(7)	8(10)	16(9)	27(3)	40(6)	56(7)
3(8)	9(7)	18(15)	28(8)	42(10)	63(8)
4(9)	10(10)	20(11)	30(8)	45(7)	64(2)
5(5)	12(10)	21(8)	32(6)	48(8)	72(8)
6(6)	14(7)	24(5)	35(6)	49(3)	81(3)

1(4)	7(6)	15(7)	25(9)	36(5)	54(7)
2(3)	8(2)	16(7)	27(13)	40(6)	56(3)
3(3)	9(9)	18(4)	28(11)	42(6)	63(3)
4(2)	10(6)	20(8)	30(11)	45(9)	64(9)
5(5)	12(2)	21(8)	32(10)	48(4)	72(2)
6(3)	14(3)	24(6)	35(5)	49(7)	81(6)

(圖 19)各乘積數可連跳的相關性質對照圖(自行繪製)

（左：可連跳且賓果的乘積數個數；右：可連跳但不可賓果的乘積數數量）

(六)探討 25 策略和 42 策略與乘積數相關性質之間的關係

從圖 19 左可以發現，在圖 18 右賓果係數最大的 25 和 64，也是可連跳成賓果的乘積數個數最少的乘積數，代表對手下一步要阻擋其賓果的選擇可能性最少。而從圖 19 右來思考 25 策略的可行性，可以發現：使用 25 策略時，對手下一步有很大的可能性，是無法阻擋掉 25 的賓果機會。至於圖 19 右中，可連跳但不可賓果乘積數個數最多的 28 和 30，因為在圖 19 左中被對手下一步阻擋賓果的可能性也很大，所以選擇 28 和 30 可賓果的機會便相對減少了。

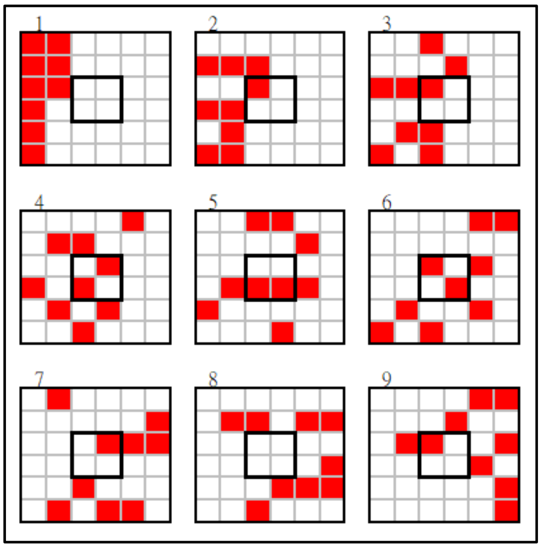
至於 42 策略為何可行？觀察表 7、表 8 和圖 18、圖 19 中乘積數 42 的各項性質，賓果組合數次多、賓果係數為負值（但是也不是特別差）、可連跳且賓果的乘積數個數（對手下一步阻擋賓果可能性）次多、可連跳不可賓果的個數（對手下一步無法阻擋賓果組合）大約是居中。我們認為也可以從中得到解釋：42 策略可連跳的乘積數很多，進攻便利。雖然對手下一不可以阻擋賓果的機會也多，但是也容易從對手沒注意到的地方突破阻擋，而向外延伸出其他賓果組合的機會。因為策略不是一兩步的事情，需要剛好的棋盤位置才能實現，42 策略，同樣也可能沒注意到對手的進攻而被打敗，仍需要多方注意、小心應對。就如圖 15 的示例，使用 42 策略的先手，有可能獲勝，也可能一不小心就輸了。

相較於 42 策略，25 策略不易被對手阻擋（可連跳且賓果的數值最小），且容易進攻（賓果係數最高），對後手下的每一顆棋都可以有效防守。加上 25 策略附近有許多賓果係數高且與之賓果的乘積數（7、9、15、27、28），且 25 策略的兩個可繼續發展的乘積數（15、40）的候選數中有 3、8：

1. 與前述賓果係數高的乘積數之候選數多有重疊，可輕易下到這些數上。加上其中有些直接可與 15、25、40 連線，有些數可以幫助己方在下一步連線，所以 25 策略明顯佔較多的優勢。
2. 40 可過渡到 42 策略。

(七)探討優勢策略與棋盤位置間的關係

圖 20 為候選數 1～9 的倍數在棋盤上的分布圖，其中框框部分為最重要的賓果連線乘積數，因為在同一橫、直或斜排的 6 個格子內，所有的賓果組合都一定會包含位於中間的兩數，所以框框部分也是圖 18 左中賓果組合數量最多的乘積數。只要能掌握位於框框內的乘積數能夠大幅提升連線的機率。



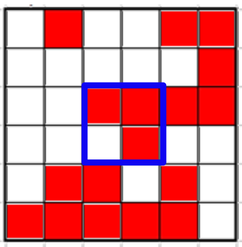
(圖 20)各候選數倍數（紅色）分布圖

(自行繪製)

觀察圖 20 可以發現：

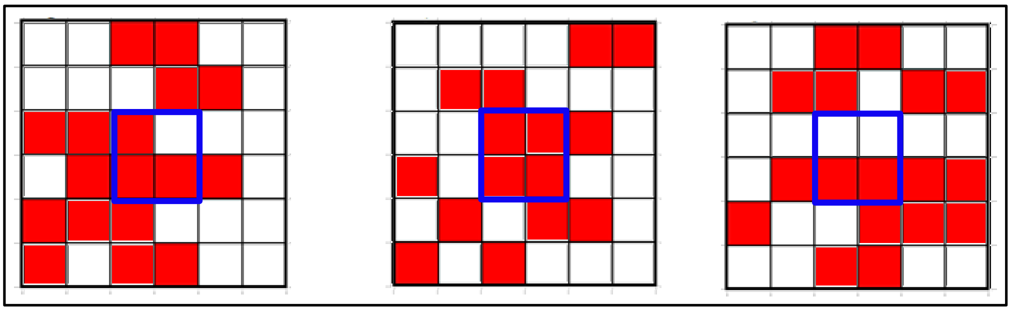
1. 候選數 5、6 都有兩個倍數是位於中心方框區域，而候選數 5、6 剛好是組成乘積數 42、25 的候選數，且這兩個候選數又都可與中心方框區域的乘積數連線，這也是 25 和 42 的另一個優勢。
2. 候選數 5 的分布圖，可以看到在第 4 橫列的中間段，連續排列成賓果的情形。從這個分布圖，可以解釋為何 25 策略是個優勢策略。因為若使用 25 策略，可確保必能取得在這一個賓果組合中的乘積數，而阻擋對方在此 4 個位置上賓果連線機會，達到防守的效果。

將候選數 6 和 7 的倍數重疊之後，得到圖 21。此圖可以看出 42 策略的發展可能，其中有 3 數均位於中心方框，所以由此可以看出 42 是個容易向外發展連線的乘積數。



(圖 21)6、7 倍數重疊圖
(自行製圖)

我們再把 3 和 5 的倍數重疊成圖 22 左，把 5 和 8 的倍數重疊成圖 22 中，把 5 和 8 的倍數重疊成圖 22 中，以便探討 25 策略搶 15（表 3）和 25 策略搶 40（表 4）的優勢策略。



(圖 22)的倍數重疊圖(自行繪製)
（左：3 疊 5、中：4 疊 6、右：5 疊 8）

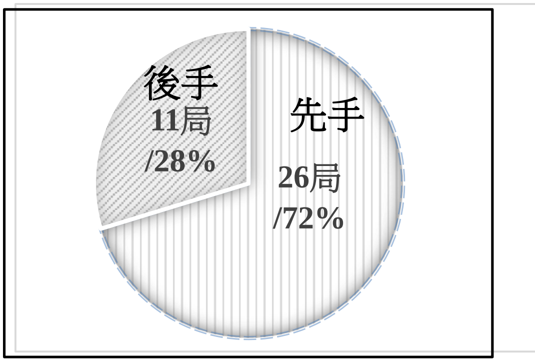
我們嘗試疊合 1～9 其他候選數，發現如果把 4 和 6 的倍數重疊成圖 22 右，可以填滿中心方框區域。雖然從圖 18 可以看到 24 的賓果組合個數只有 5 個、賓果係數只有 0.09，觀察圖 19 的「可連線且賓果個數 5」及「可連線但不可賓果個數 6」都不高，或許也是一個發展性良好的優勢策略，先手還是可以試試使用 24 策略！

五、探究 6×6 棋盤使用策略對戰時的雙方勝率

(一)雙方都使用策略對戰的勝率

我們經過研究之後，雙方各自採用有利策略的形式，比如 42 策略、25 策略、28 策略、或 81 策略（這些策略是依照先手第一顆棋的位置來命名）……等等，，隨機應變來對戰，分出勝負之後，記錄對戰的棋局數與勝方。

到研究報告整理完為止的統計結果，如圖 23 所示：沒有和局！先手獲勝次數較多，先手勝率約是 72%、後手 28%，先手的勝率，比雙方沒有使用策略、電腦隨機對戰接近 5 成（見圖 13）的勝率大幅提升。



(圖 23) 使用策略對戰結果圓餅圖(自行繪製)

如果繼續使用策略對戰、增加局數，雙方勝率的統計結果，可能會跟著變動。不過，我們相信還是先手的勝率較大！因為先手可以依照下棋習慣選擇對他有利的數，後手只能隨機應變。

(二)優勢策略的案例分析

我們從雙方都使用策略來對戰的過程，試著分析哪一種策略，在對戰時較能搶得先機。

以下頁的圖 24 為例，先手使用了 42 策略，還有 25 策略和前文沒有討論到的其他策略。因為輸棋的後手，沒辦法避開先手「聽」數的因數。先手第 19 步下乘積數 10（候選數 2×5）、聽 12、32、40、48。後手的應對有下列幾種可能：

1(12) 1×1	7(14) 1×7	15	25	36(7) 4×9	54
2(13) 1×2	8(11) 1×8	16	27(8) 3×9	40(20) 5×8	56
3(10) 1×3	9(17) 3×3	18	28(2) 4×7	42(1) 6×7	63(15) 7×9
4	10(19) 2×5	20	30	45(5) 5×9	64
5	12	21(16) 3×7	32(21) 4×8	48	72
6(18) 2×3	14	24(9) 3×8	35(4) 5×7	49(3) 7×7	81(6) 9×9

先手

後手

(圖 24) 先手 42 策略獲勝棋局示例（自行製圖）

1. 後手的候選數如果選擇保留 2：

(1) 後手選擇的乘積數除了 2x6=12 以外，先手都可以下 2x6=12 而獲勝。

(2) 後手如果選擇下 2x6=12 的話，先手可以下 6x8=48 而獲勝。

2. 後手的候選數如果選擇保留 5：

(1)後手選擇的乘積數除了 5x8=40 以外，先手都可以下 5x8=40 而獲勝。

(2) 後手如果選擇下 5x8=40 的話，先手可以下 6x8=48 而獲勝。

綜合如上所述，先手可以獲勝主要原因為：先手取得聽數較多的局面，而後手自己的連線機會被阻斷、只能被動阻擋，但又無法避開先手聽數的因數（候選數），因為和先手聽數無關的候選數（因數）的倍數，已經所剩不多了。

所以先手若能使用 42 策略，有利於快速進攻，後手的防守也多數可以忽略。當聽的候選數有重複、也就是有公因數時（如 6x8 和 6x5），與 42 在同一直排，即便對手阻擋還是可以獲勝（如對手下 48，己方便下 40 而獲勝），因而能使對方不能下的候選數增加，既能阻擋對手連線機會，又能為己方增加賓果組合優勢，搶占獲勝先機、提高勝率！

(三)乘法賓果有沒有必勝方與必勝策略

除去 3×3 棋盤之外，沒有必勝策略。因為當先手下了第 1 個乘積數，後手選擇的乘積數最多會有 16 種可能，因為下的乘積數皆是兩個候選數相乘，會有一個

候選數控制在對手的手上，對手有可能會用來阻斷己方的連線，不一定能確保自己能搶到想要的乘積數。所以沒有必勝方，也就沒有必勝策略，但是還是有優勢方——先手。

和其它各種棋類遊戲（例如：圍棋、五子棋）一樣，先手較占優勢的原因，是乘法賓果先手的第一顆棋，除了能任意選擇位置（候選數）之外，還能保證先手永遠比後手快 1 步。後手接下來除了要被動應對先手早他一步的佈局謀算，一方面也無法確保自己能佔領到所有對自己有利的乘積數，所以後手略為吃虧。

舉例來說，假設在這回合剛開始時，雙方同時在搶 49 這個乘積數，代表候選數之一一定必須要有 7，那麼先手就一定可以搶在後手前先佔領到 49。所以先手的優勢和勝率才會較後手高。

未來可以嘗試在電腦程式中加入我們發現到的策略，再模擬使用策略對戰，增加與實體下棋的相似度，得知更精準的勝率，以驗證我們先手優勢的結論。

肆、結論

我們一開始選擇從 2×2、3×3、4×4、5×5 棋盤開始研究，依序研究他們的可填入乘積數，改變棋盤排列，和各棋盤優勢方等，再專門針對 6×6 棋盤來深入推敲其中的規律。得到的研究結果有：

一、探究 2×2～5×5 的棋盤組合與優勢方：

(一) 2×2 棋盤：不管如何改變數字排列，都是先手必勝或和局，沒有挑戰性。

(二) 3×3 棋盤：候選數 1～4，乘積數由小到大排列，可以組成一種棋盤。先手先手的 1 步下 6 的勝率極高，除去和局之外，後手只有一種可能會獲勝。

(三) 4×4 棋盤：因為候選數 1～4，乘積數由小到大，可以變化出 17 種棋盤組合。因為候選數能乘出的總乘積大於棋盤格子，所以很容易和局。

(四) 5×5 棋盤：候選數 1～7，乘積數由小到大排列，可以組成一種棋盤。用電腦模擬隨機對戰的結果是先手勝率較高。

二、6×6 棋盤對戰勝率：

(一)電腦模擬隨機對戰：先手勝率較高，接近一半，後手勝率較低，約$\frac{1}{3}$，其餘為和局。

(二)雙方都使用有利策略來對戰：先手勝率較高，約 70%，後手勝率較低，約 30%，沒有和局。

三、6×6 棋盤的優勢策略：有 42 策略、25 策略、平方數策略等。

四、6×6 棋盤上各乘積數的性質分析：

(一)乘積數中的平方數：.

1.棋盤中有 9 個乘積數是平方數，其中有 4 個多候選數（4、9、16、36），5 個少候選數（1、25、49、64、81）。

2. 若平方數周圍有許多與平方數有相同候選數（公因數）的乘積數，則較有機會突破對手的封鎖。

3.平方數適合作為一個對戰策略的起始點，例如 25 策略。

(二)乘積數中的候選數：

1.各乘積數的組成候選數個數，分別有 1～4 個，其中 3 個候選數的乘積數（4、9、16、36）同時也是平方數。

2. 對戰時，取得具有 3 個或 4 個候選數的乘積數，會較容易提高獲勝機會。

(三)賓果組合相關性質分析：

1.總共有 54 種不同的賓果組合。棋盤上不同位置的乘積數，其賓果組合數量可劃分成 4 個對稱的九宮格區域。

2.越靠近棋盤中央位置的乘積數，賓果組合數量越高。

3.可賓果的乘積數中，如果可以連跳，就有機會被對手阻擋；不可連跳的賓果數，對手無法在下一步直接阻擋。

4.「賓果係數」＝「可賓果但不可連跳的乘積數個數」減去「可賓果且可連跳的成績數個數」，再除以「所有可賓果乘積數個數」。

5.賓果係數愈高，代表愈不容易被對手阻擋、可得到賓果的機會愈大。

6.賓果係數最高的乘積數，是平方數中的 25 和 64，

(四)可連跳相關性質分析：

1.可連跳成賓果的乘積數個數最少的乘積數，代表對手下一步要阻擋其賓果的選擇可能性最少。

2.使用 42 策略時，可連跳的乘積數很多，進攻便利。雖然對手下一步可以阻擋賓果的機會也多，但是也容易從對手沒注意到的地方突破阻擋，而向外延伸出其他賓果組合的機會。

3.使用 25 策略時，對手下一步有很大的可能性，是無法阻擋掉 25 的賓果機會。所以 25 策略比 42 策略戰較多優勢。

(五)優勢策略與棋盤位置間的關係：

1.位於棋盤最中央 4 個位置的乘積數，為賓果組合數量最多的乘積數，也是最重要的賓果連線乘積數。

2.從候選數的倍數分布，可以找出 25 策略和 42 策略的優勢理由，並能解釋 25 策略為何優於 42 策略。

五、6×6 棋盤優勢方與應用案例分析，可以驗證我們的研究發現：

(一)使用各種對自己有利的策略能夠大幅提升勝率。

(二) 25、42 是能讓自己容易贏的乘積數。

(三)雖然先手較能搶佔獲勝先機，但是無法確保必勝，還是要多方考慮、小心應對才能獲勝。

伍、參考資料

1.組合計算機網站。https://miniwebtool.com/zh-tw/combination-calculator/。

2.階乘計算機網站。https://miniwebtool.com/zh-tw/factorial-calculator/。