

新竹市第四十三屆中小學科學展覽會

作品說明書

科 別：物理科

組 別：國中甲組

作品名稱：水火箭行為建模、模擬器與空氣阻力係數之研究

關 鍵 詞：水火箭數學模型、模擬器、空氣阻力係數

編 號：

目錄

| | |
|--------------------------------|---|
| 摘要..... | 1 |
| 壹、 研究動機..... | 1 |
| 一、 前言..... | 1 |
| 二、 低軌衛星簡介與其衍生問題..... | 1 |
| 三、 相關教學單元..... | 2 |
| 貳、 研究目的..... | 3 |
| 一、 研究範圍與目的..... | 3 |
| 二、 參考文獻分析..... | 3 |
| 參、 研究設備及器材..... | 5 |
| 一、 二級水火箭載具、發射設備與量測設備..... | 5 |
| (一)、二級水火箭載具..... | 5 |
| (二)、載具發射相關設備與量測設備..... | 5 |
| 二、 水火箭行為模型化論證之量測設備..... | 6 |
| (一)、亨利定律-加壓氣體之水中溶氧量百分佔比實驗..... | 6 |
| (二)、波以耳定律-水火箭噴發加壓氣壓變化實驗..... | 6 |
| 三、 水火箭空氣阻力量測實驗設備..... | 6 |
| (一)、水火箭載具風洞實驗..... | 6 |
| (二)、第一代:定滑輪組..... | 7 |
| (三)、第二代:秤盤組..... | 7 |

| | |
|--------------------------------|----|
| (四)、第三代:槓桿十倍放大組..... | 7 |
| 肆、 研究過程與方法..... | 8 |
| 一、 水火箭數學模型與模擬器之整體流程..... | 9 |
| (一)、水火箭運動行為一階數學模型推導..... | 9 |
| (二)、水火箭運動行為一階數學模擬器..... | 10 |
| (三)、一階數學模擬結果比對..... | 11 |
| (四)、結論、檢討與改善..... | 12 |
| 二、 水火箭載具動態二階數學模型:改善一階模型..... | 13 |
| (一)、動態二階數學模型..... | 13 |
| (二)、研究模擬結果與比對..... | 14 |
| (三)、結論、檢討與改善..... | 15 |
| 三、 水火箭空氣阻力係數量測之研究流程..... | 15 |
| (一)、空氣阻力係數簡介..... | 15 |
| (二)、水火箭載具風洞實驗..... | 17 |
| (三)、空氣阻力係數實驗一:第一代-定滑輪組..... | 17 |
| (四)、空氣阻力係數實驗二:第二代-秤盤組..... | 18 |
| (五)、空氣阻力係數實驗三:第三代-槓桿十倍放大組..... | 18 |
| (六)、結論、檢討與改善..... | 19 |
| 伍、 研究結果..... | 19 |
| 一、 水火箭載具二階模型..... | 19 |

| | |
|--------------------------------|----|
| (一)、亨利定律-加壓氣體溶解度實驗..... | 19 |
| (二)、波以耳定律-水火箭噴發氣壓實驗..... | 20 |
| (三)、水火箭質量流率測試實驗..... | 21 |
| (四)、水火箭載具二階模型飛行參數比對..... | 22 |
| 二、空氣阻力係數實驗..... | 23 |
| (一)、量測空氣阻力係數方法一(定滑輪組) | 23 |
| (二)、量測空氣阻力係數方法二(秤盤組) | 24 |
| (三)、量測空氣阻力係數方法三(槓桿十倍放大組) | 26 |
| 三、水火箭飛行特徵量測實驗..... | 27 |
| (一)、水火箭裝填不同液體噴發研究..... | 27 |
| 陸、討論與未來研究..... | 28 |
| 柒、結論..... | 29 |
| 捌、參考資料..... | 29 |

圖目錄

| | | |
|------|---|----|
| 圖 1 | 低軌衛星發射成本分析[5]..... | 2 |
| 圖 2 | 水火箭行為數學模型化之實驗流程圖..... | 8 |
| 圖 3 | 水火箭運動行為一階數學模擬器..... | 10 |
| 圖 4 | 澳洲水火箭專家模擬器之程式頁面[9]..... | 11 |
| 圖 5 | 本水火箭運動行為一階數學模擬器模擬結果對比澳洲水火箭專 家模擬器..... | 11 |
| 圖 6 | 本水火箭一階數學發射速度模擬結果對應裝載不同水量..... | 12 |
| 圖 7 | 本水火箭一階數學飛行高度模擬結果對應裝載不同水量..... | 12 |
| 圖 8 | 本水火箭一階數學模擬結果對比澳洲水火箭專家模擬器(對應不 同水火箭裝水量)..... | 13 |
| 圖 9 | 原始一階數學演算法邏輯..... | 13 |
| 圖 10 | 動態簡單微積分觀念之二階數學演算法邏輯..... | 14 |
| 圖 11 | 對比一階與二階模型之重要參數演算結果..... | 14 |
| 圖 12 | 二階數學演算法之運算結果..... | 15 |
| 圖 13 | 空氣阻力係數研究: 三代改善過程流程圖..... | 16 |
| 圖 14 | 三種不同風速下之火箭風洞流體實驗..... | 17 |
| 圖 15 | 空氣阻力係數實驗一: 第一代定滑輪組..... | 18 |
| 圖 16 | 空氣阻力係數實驗二: 第二代秤盤組..... | 18 |
| 圖 17 | 空氣阻力係數實驗三: 第三代槓桿十倍放大組..... | 19 |

| | |
|------------------------------------|----|
| 圖 18 結果對比: 本二階模型、澳洲專家模擬器與實測結果..... | 22 |
| 圖 19 水火箭載具搭配感測器採樣之實測結果分析..... | 23 |
| 圖 20 第一代空氣阻力係數實驗誤差比例..... | 24 |
| 圖 21 第二代空氣阻力係數實驗誤差比例..... | 26 |
| 圖 22 第三代空氣阻力係數實驗誤差比例..... | 26 |

表目錄

| | | |
|------|-----------------------------|----|
| 表 1 | 本研究與相關教學單元關聯..... | 2 |
| 表 2 | 本研究相關參考文獻..... | 4 |
| 表 3 | 本研究相關研究設備及器材之一..... | 5 |
| 表 4 | 本研究相關研究設備及器材之二..... | 6 |
| 表 5 | 本研究相關研究設備及器材之三..... | 6 |
| 表 6 | 本研究模擬結果與澳洲水火箭專家模擬器相比..... | 11 |
| 表 7 | 水火箭加壓氣體溶解量百分比..... | 20 |
| 表 8 | 水火箭噴發瓶內氣壓差之誤差百分比..... | 21 |
| 表 9 | 水火箭質量流率測試實驗..... | 21 |
| 表 10 | 第一代(定滑輪組)空氣阻力係數量測結果..... | 23 |
| 表 11 | 第一代(定滑輪組)優缺點及注意事項..... | 24 |
| 表 12 | 第二代(秤盤組)空氣阻力係數量測結果..... | 25 |
| 表 13 | 第二代(秤盤組)優缺點及注意事項..... | 25 |
| 表 14 | 第三代(槓桿放大十倍組)空氣阻力係數量測結果..... | 26 |
| 表 15 | 水火箭裝填不同液體噴發實驗..... | 27 |

水火箭行為建模、模擬器與空氣阻力係數之研究

摘要

本研究整體方向探討低軌衛星飛行載具行為推理與失能低軌衛星回收機制，而此作品主要涵蓋水火箭載具數學模型化、預測模擬器設計及空氣阻力係數測量方法。首先，推導水火箭噴發的一階數學模型，並以動作感測器比對預測結果與實測數據，再與國外模擬器進行差異分析。隨後，對模型進行修正，加入空氣阻力及側風速等多維度參數，並應用簡單微積分概念進行疊代運算，提高預測精度，提出動態二階模型。為精確測量水火箭的空氣阻力，我們設計了三代實驗裝置，其中，使用槓桿十倍放大阻力裝置最為準確並展現其精準度優勢。最後，根據飛行公式推演及資料搜尋，發現不同液體對水火箭飛行參數（如衝力、速度、加速度及飛行高度）有規律上變化，並提出新假說。

壹、研究動機

一、前言

課程提到速度、加速度與牛頓三大運動定律等知識，我們十分感興趣，並在中央大學物理演示實驗室的科學影片上發現：在相同起點與終點，利用斜面與曲面路徑，滾動球居然曲線比斜面還來的快[7](因為重力加速致此)，於是開啟對加速度上研究興趣。在數理課程中學習的理論知識激發了我們對低軌衛星發射與回收技術的興趣。考慮到實驗安全性與可行性，我們選擇水火箭作為初步研究工具。儘管當前的火箭發射技術包括固態燃料、氫氣推進、液態燃料過氧化氫助燃推進器研究等，但水火箭數理推演仍具有挑戰性。經指導老師鼓勵，我們決定突破困境，針對水火箭的推力、速度、加速度、飛行高度及最佳裝水量等進行系統研究，並開發模擬器以提升預測精度。

二、低軌衛星簡介與其衍生問題

衛星依照高度不同分為四種[3]，低軌衛星位於 300-500 公里的軌道，廣泛應用於通訊領域。隨著星鏈計畫推動，低軌衛星發射與回收技術為關鍵課題[1-6]。低軌衛星使用年限為 2-3 年，90 分鐘繞行地球一圈，當其繞行地球速度低於宇宙第一速度即 7.9 公里/秒時，將墜回地球，不管其墜回或失去動力滯留皆產生太空垃圾。因此，如何有效回收失能衛星並降低發射成本與降低對燃料的依賴性，成為未來的重要挑戰。2030 年台灣發展第一具乘載低軌衛星的入軌火箭發射器，其目標載重 200 公斤低軌衛星，發射至 400 公里太空軌道，但火箭為了要投射 200 公斤的衛星，卻要負擔 50 公噸總重(其中為大量燃料)[6]。以一顆 200 公斤低軌衛星而言，若發射 42,000 顆，SpaceX 目前發射成本每公斤約為 2719 美金(一公斤費用攤提約 84,300 台幣)[5]，42,000 顆低軌衛星光發射成本就高達超過 7000 億元，還不含低軌衛星生產成本，其可見圖 1。因此，發展回收技術與降低發射成本，對於低軌衛星的可持續發展至關重要。

| | 單次發射價格 (億美元) | 每公斤運送成本 (美元) |
|-------------------|-----------------|-----------------|
| 美國NASA太空梭 | 4.5 | 19824 |
| 歐洲太空總署Ariane 5 | 1.65 | 10313 |
| 俄羅斯聯盟號-FG | 0.5 | 7246 |
| 日本H-IIB火箭 | 1.35 | 7104 |
| 中國長征三號乙 | 0.7 | 5833 |
| 印度極軌衛星運載火箭 | 0.15 | 3947 |
| SpaceX獵鷹9號 | 0.62 | 2719 |

資料來源：各家火箭2020年發射報價

圖 1：低軌衛星發射成本分析 [5]

三、相關教學單元

本研究涵蓋學科內容廣，除涵蓋運動學與濃度計量知識外，還需要具備功跟能、簡單機械與槓桿原理，尚需學習亨利定律與給呂薩克-理想氣體體積定律(熱學)，部分流體動力知識與空氣阻力係數的觀念，我們將之列表如下表 1:

表 1: 本研究與相關教學單元關聯

| 編號 | 級別 | 相關課程 |
|----|----|---|
| 1 | 高二 | 給呂薩克-理想氣體體積定律 $PV=nRT$ |
| 2 | 高二 | 氣體溶解度-亨利定律 $P=k \cdot xC_M$ |
| 3 | 國二 | 質量百分濃度/體積百分濃度/百萬分之一濃度/莫耳濃度 |
| 4 | 國二 | 原子量/分子量/莫耳數 |
| 5 | 國二 | 水壓力 |
| 6 | 國二 | 速度，速率，加速度計算 |
| 7 | 國二 | 等加速度三大公式 |
| 8 | 國二 | 拋物線等加速度運動、自由落體等重力加速度運動 |
| 9 | 國二 | 牛頓三大運動定律 |
| 10 | 國三 | 施力作功/動能/位能計算 |
| 11 | 國三 | 能量守恆定律 |
| 12 | 高一 | 動量守恆定律 |
| 13 | 高二 | 白努力原理與公式: $\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + p = \text{定值}$ |
| 14 | 高二 | 白努力原理中的托里切利公式 $V = \sqrt{\frac{2 \times (P_1 - P_2)}{\rho}}$ |
| 15 | 高二 | 流體動力學中質量流率與水衝力計算 |
| 16 | 高二 | 波以耳定律: $P_1 V_1 = P_2 V_2$ |
| 17 | 高三 | 空氣阻力與空氣阻力係數: $F = \frac{1}{2} \times C \times \rho \times A \times V^2$ |
| 18 | 國三 | 基本電學與電學焊接量測技巧 |
| 19 | 國三 | 電解水製氫氧氣與莫耳產量計算 |
| 20 | 國三 | 簡單機械與槓桿原理 |

貳、研究目的

一、研究範圍與目的

本研究涵蓋水火箭載具的數學建模、飛行模擬、空氣阻力係數測量及回收系統開發，具體研究範圍包括：

1. **數學模型與模擬**：建立火箭載具的二階數學模型，並利用飛行模擬器預測飛行行為，結合加速度、衝力與高度感測器數據進行驗證，比對真實量測與國外模擬器結果。
2. **多維度模型優化**：在一階數學模型基礎上，加入空氣阻力估計與側風修正等參數，通過簡單微積分觀念來進行疊代運算，以提高預測精度。
3. **空氣阻力係數測量**：設計三代實驗設備，提高火箭空氣阻力係數測量的準確性。
4. **液體對飛行影響研究**：探索不同液體(非有蒸汽壓如氣泡水液體)對水火箭飛行參數(如衝力、速度、加速度與高度)的影響，發現了尚未被發現的研究結果。

對於未來整體研究，還設計自動開傘降落器與飛行回收系統(無人機結構)，並結合 1.5 匹馬達增速技術，提升火箭初速。針對低軌衛星回收系統，包含自動太陽能追蹤與水分解製氫氧燃料推進系統。

二、參考文獻

工欲善其事，必先利其器。首先，我們針對我們預估會遇到的問題，與實驗當中遇到困難所找尋的文獻、進行分類與了解，除了讓我們的實驗更順利外，對於設計與架設實驗器材的準備也會更有方向，最後，也可以為後來研究這個相關議題的學弟妹，老馬識途地為他們指引出清楚的研究方向。我們將研究相關方向定位為三個主要的查詢方向並說明如下：

1. 水火箭與其他火箭類文獻:[10,21-22,24,25-32,35-37]

查詢火箭可能之數學模型運算式，並了解不同火箭科展方向，並如何搭配動作感測器比對預測結果與真實量測結果。目前對照文獻相比，我們的二階數學模型在文獻中均無人提出。

2. 亨利定律之氣體溶體度文獻: [13,20]

計算水火箭行為運算時，若打氣會造成氣體大量溶入水中，運算就更困難。水火箭發射時，水中的溶氣產生額外蒸氣壓，蒸氣壓讓每次噴發階段都要思考到當下溶出的氣壓，所以我們要證明：在水火箭系統中，打氣所造成的溶氣量微乎其微，模型運算過程可忽略不計。

3. 空氣阻力係數相關文獻: [11-12,14-19,25,33-34]

火箭載具空氣阻力估算，火箭文獻內空氣阻力係數皆查詢資料非真實量測，我們參考文獻並改善三代實驗來提升火箭空氣阻力係數的量測精準度，文中，可了解各代演進與解決的問題，並提出前所未有的實驗設計，可放大空氣阻力十倍增加準確度，並證明量測穩定性極佳。

以下，我們將各文獻與參考的期刊文章表列如表二：

表 2: 本研究相關參考文獻

| 編號 | 研究相關性 | 類別 | 題目 | 學校 | 簡介 | 獎項 | 亮點 |
|------------|-------|----------------------------|--------------------------------------|---------|------------------------|-------------------|----------------|
| 1 [10] | 火箭 | 2022 年臺灣國際科學展覽會-物理與天文組 | 「氣」雲直上-影響氫氣火箭飛行的各項因子探討 | 基隆市中正國中 | 研究多項因子對氫氣火箭的影響 | 優勝 | 控因變因清楚，變因豐富完整 |
| 2 [11] | 空氣阻力 | 2017台灣國際科學展覽會-物理與天文組 | 圓周運動變形之摩擦力與物理建模之探討 | 台北市北一女中 | 透過實驗及程式分析阿特午機 | 大會獎一等獎 | 呈現超物理現象多 |
| 3 [12] | 空氣阻力 | 中華民國第34屆中小學科學展覽會-高中物理組 | 速率越大阻力就越大嗎-流體阻力的探討 | 台中市台中女中 | 利用光電元件對流體阻力研究 | 第三名 | 流速低液體阻力與速度成正比 |
| 4 [13] | 亨利定律 | 2007年台灣國際科學展覽會-高中化學組 | 告訴你「拉午耳」「亨利」的壓力有多大 | 高雄市高雄女中 | 利用電阻膜測定氣壓，方法簡單明確 | 第一名 美國國際科展正選代表 | 不同測亨利係數的方法 |
| 5 [14] | 空氣阻力 | 中華民國第59屆中小學科學展覽會-高中物理與天文學組 | I sink therefore I am | 彰化縣彰化女中 | 探討氣泡在液體中的阻力 | 第二名 | 氣泡運動不一定是上升 |
| 6 [15] | 空氣阻力 | 中華民國第27屆中小學科學展覽會-高中物理組 | 球狀落體運動速度的測定與空氣阻力的探討 | 彰化縣彰化女中 | 利用光電及微電腦量測球速與阻力 | 第二名 | 新穎的方法測阻力 |
| 7 [16] | 空氣阻力 | 中華民國第46屆中小學科學展覽會-國中物理組 | 降落傘阻力大追查 | 花蓮縣國風國中 | 研究降落傘阻力最佳因子 | 第三名 | 自製風洞實驗設備 |
| 8 [17] | 空氣阻力 | 中華民國第57屆中小學科學展覽會-國小物理組 | 「破風而行」－風阻的探討 | 嘉義縣太保國小 | 研究形狀與排列對阻力影響 | 第二名 | 具有系統性研究 |
| 9 [18] | 空氣阻力 | 中華民國第58屆中小學科學展覽會-國中物理組 | 隨波「阻」流—液體中物體運動研究 | 新北市永和國中 | 液體中阻力變因研究 | 佳作 | 液體中阻力呈線性 |
| 10 [19] | 空氣阻力 | 中華民國第54屆中小學科學展覽會高中物理組 | 運用抽吸效應(suction effect)減阻之研究 | 台北市麗山高中 | 抽氣減少氣流邊界曾降低阻力 | 團隊合作獎 | 自製低速風洞，控制抽氣速度 |
| 11 [20] | 亨利定律 | 中華民國第37屆中小學科學展覽會-高中化學組 | 亨利在手知多少 | 屏東縣屏東高中 | 自製高準度壓力計測亨利常數 | 第三名 | 數據可信賴性高，報告內容佳作 |
| 12 [21] | 火箭 | 中華民國第60屆中小學科學展覽會-國中物理組 | 你可以再瞄準一點—旋轉火箭 | 台中市四育國中 | 火箭旋轉飛行來減少風阻 | 團隊合作獎 | 物理概念淺易，但團隊合作佳 |
| 13 [22] | 火箭 | 屏東縣第64屆中小學科學展覽會-國小物理組 | 與時推移~水火箭發射推力探討 | 屏東縣復興國小 | 探討推力與水量、發射角度關係 | 佳作 | 水氣噴發階段有最大推力 |
| 14 [23] | 空氣阻力 | 2022年台灣國際科學展覽會 | 風場下圓柱氣孔導管抽吸對風阻係數影響 | 台北市麗山高中 | 孔洞抽氣控制氣流邊界層減少阻力 | 優勝 | 可利用於風力發電 |
| 15 [24] | 火箭 | 2022年台灣國際科學展覽會-工程學組 | 10 公斤級聚甲基丙烯酸甲酯-氣態氣混合式火箭引擎混合效率提升之初步探討 | 台北市建國中學 | 固態燃料火箭推力研究 | 二等獎 美國ISEF正選代表 | 寫作佳，可學習該文獻 |
| 16 [25] | 火箭 | 屏東縣第63屆中小學科學展覽會-國小物理組 | 只剩一張「嘴」~水火箭噴嘴對飛行直線穩定性探討 | 屏東縣復興國小 | 噴嘴改良致飛行穩定研究 | 第三名 | 噴嘴改良可供參考 |
| 17 [26] | 火箭 | 中華民國第61屆中小學科學展覽會-高中物理與天文學組 | 針筒火箭發射機制與飛行探究 | 雲林縣正心高中 | 針筒推力研究跟推論 | 未知 | 推論過程可學習 |
| 18 [27] | 火箭 | 中華民國第57屆中小學科學展覽會-國小物理組 | 男人夢想的小老婆-探討水火箭車發射動力之研究 | 桃園市僑愛國小 | 水火箭車最佳因子研究 | 未知 | 可多考慮液體噴發角度 |
| 19 [28] | 火箭 | 中華民國第60屆中小學科學展覽會-國小物理組 | 看誰最神「氣」探討影響水火箭拋射距離 | 台中市軍功國小 | 空氣/水/洗衣粉水飛行高度研究 | 未知 | 洗衣粉水濃度越高飛行高度越高 |
| 20 [29] | 火箭 | 中華民國第46屆中小學科學展覽會-國小自然組 | 疾風飛馳，衝！衝！衝！~探討陸海空「氣壓水箭」的射遠動力之分析研究 | 新北市永和國小 | 水火箭射遠因子研究 | 未知 | 多種水火箭設計 |
| 21 [30] | 火箭 | 嘉義縣第52屆中小學科學展覽會-國小物理組 | 水火箭電梯~水火箭載重能力探討 | 未公告 | 水火箭載重能力因子研究 | 未知 | 第一次看到水火箭載人 |
| 22 [31] | 火箭 | 嘉義縣53屆中小學科學展覽會-國中物理組 | 強力水火箭—175 公尺的最佳紀錄 | 未公告 | 配重/尾翼數/噴嘴改善射遠目標 | 未知 | 研究射遠可參考 |
| 23 [32] | 火箭 | 台東縣第61屆中小學科學展覽會-國小物理組 | 夢想升空-探討不同水溶液之水火箭與拋射距離之研究 | 台東縣忠孝國小 | 不同液體對飛行距離研究 | 未知 | 不同液體噴發研究可參考 |
| 24 [33] | 空氣阻力 | 中華民國第55屆中小學科學展覽會-國小物理組 | (風)情萬種的模型跑車-模型跑車水平阻力與抬升阻力的探討 | 高雄市光榮國小 | 不同車身對空氣阻力研究 | 未知 | 外觀研究可參考 |
| 25 [34] | 空氣阻力 | 嘉義縣第56屆中小學科學展覽會-國中物理組 | 降落吧！我的自由年代！ | 未公告 | 自由落體時間/阻力研究 | 未知 | 阻力跟形狀與速度仍有關 |
| 編號 | 研究相關性 | 期刊名 | 題目 | 作者 | 期數 | 頁數 | 亮點 |
| 1 [35] | 火箭 | 天文館期刊 | 水火箭的世界 | 包舜華 | 第八期 | 第19-25頁 | 水火箭行為推論 |
| 2 [36] | 火箭 | 科學教育月刊 | 翻轉水火箭教學—電土火箭 | 江建昌 | 第380 期 中華民國104 年7 月 | 第42-48頁 | 乙炔火箭研究 |
| 3 [37] | 火箭 | 科學教育月刊 | 氫氣燃料水火箭 | 張凱翔 | 第399 期 中華民國106 年6 月 | 第24-27頁 | 電解水製氫氣燃料火箭 |

參、研究設備及器材

表 3: 本研究相關研究設備及器材之一

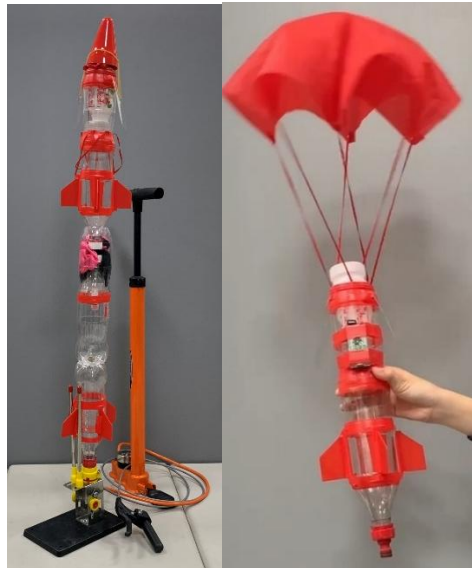

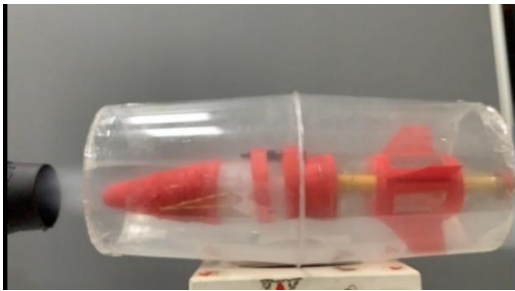


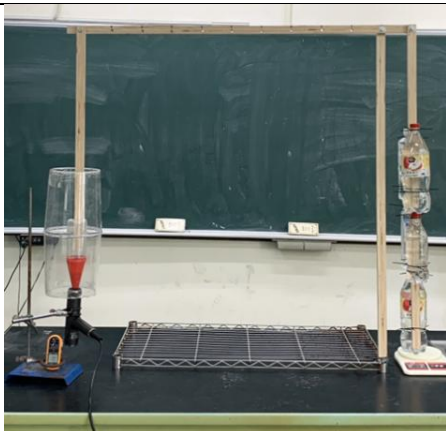
| 一、實驗用二級水火箭載具、載具發射相關設備與量測設備 | | | |
|--------------------------------------|---------------|----------------------|--|
| A | 二級水火箭載具 | | |
| | 材料 | 裝置照 | |
| | 1 | 600ml 可樂 PET 瓶 數瓶 |  |
| | 2 | 一、二級連接管 X1 | |
| | 3 | 尾翼板 X8 | |
| | 4 | 紅色水電膠帶 數個 | |
| | 5 | 噴嘴 X2 | |
| | 6 | 第一級水火箭腔體連接螺絲 X1 | |
| | 7 | 降落傘 X2 | |
| | 8 | 76mm 直徑火箭頭 數個 | |
| | 9 | PET 透明塑膠片 X1 | |
| | 10 | 養樂多空罐 X1 | |
| | 11 | 市售發射架 X1 (B 部分詳述) | |
| | 12 | 測試用打氣裝置 (不準但可試飛) | |
| 實驗設計說明 | | | |
| 1. 設計可供測試之穩定飛行水火箭載具，須避免漏氣，供後續量測實驗使用。 | | | |
| B | 載具發射相關設備與量測設備 | | |
| | 材料 | 裝置照 | |
| | 1 | 市售發射架 X1 |  |
| | 2 | 數位控制之打氣機 (可至 150psi) | |
| | 3 | 類似煞車把手之發射器 X1 | |
| | 4 | 廢棄之 2000ml 裝水罐 數個 | |
| | 5 | 連結火箭載具噴嘴座 X1 | |
| | 6 | 量杯與漏斗 X1 | |
| | 7 | 火箭載具發射支撐鋁條 X2 | |
| | 8 | 秤盤 X1 (一般型，圖中未呈現) | |
| | 9 | 運動感測器 X1 (於圖中尾翼板處) | |
| | 10 | 葉片式風速計 X1 | |
| | 11 | 無人機主機板、馬達與螺旋翼 | |
| | 12 | 無人機遙控機板 X1 | |
| | 13 | 回收機構雷射切割設計圖 | |
| | 14 | 控制中心之控制盒 X1 | |
| 實驗設計說明 | | | |
| 1. 設計可供水火箭載具發射設備，須避免漏氣，供後續穩定量測實驗使用。 | | | |

表 4: 本研究相關研究設備及器材之二

| 二、水火箭行為模型化論證之量測設備 | | |
|----------------------------------|-----------------------|------------------------|
| A | 亨利定律-加壓氣體之水中溶氣量百分佔比實驗 | |
| | 材料 | 裝置照 |
| | 1 | 水火箭用 600ml 可樂 PET 瓶 X1 |
| | 2 | 精密磅秤 X1 (精度至 1mg) |
| | 3 | 量杯與漏斗 X1 (水容量秤重確認) |
| | 4 | 數位控制之打氣機 (可至 150psi) |
| | 5 | 噴嘴與直接打氣噴嘴座 X1 |
| | 6 | 延長線座 X1(連接精密磅秤用) |
| 實驗設計說明 | | |
| 1. 根據亨利定律，量測與證明水火箭加壓氣體溶氣量可以忽略不計。 | | |
| B | 波以耳定律-水火箭噴發加壓氣壓變化實驗 | |
| | 材料 | 裝置照 |
| | 1 | 水火箭用 600ml 可樂 PET 瓶 X1 |
| | 2 | 數位控制之打氣機 (可至 150psi) |
| | 3 | 量杯與漏斗 X1 (水容量秤重確認) |
| | 4 | 噴嘴與直接打氣噴嘴座 X1 |
| | 5 | 精密胎壓計 X1 (可量至 100psi) |
| | 6 | 磅秤 X1 |
| 實驗設計說明 | | |
| 1. 實驗量測證明水火箭噴發階段，其瓶內氣壓變化遵守波以耳定律。 | | |

表 5: 本研究相關研究設備及器材之三

| | | | |
|---------------------------------------|-------------------|---------------------|--|
| | 三、水火箭空氣阻力係數量測實驗設備 | | |
| A | 水火箭載具風洞實驗 | | |
| | 材料 | | 裝置照 |
| | 1 | 80cmx30cm 壓克力垃圾桶 X2 |  |
| | 2 | 發煙機與煙油 X1 | |
| | 3 | 壓克力膠 X1 | |
| | 4 | 強力風扇(最大風速:30m/s) X1 | |
| | 5 | 待測火箭載具 | |
| | 6 | 支撐載具架 X1 | |
| 實驗設計說明 | | | |
| 1. 風洞裝置在穩定氣流下，不同風速，不被干擾地觀察與量測流體運作與阻力。 | | | |

| | | | |
|--|--------------|--------------------|--|
| B | 第一代: 定滑輪組 | | |
| | 材料 | 裝置照 | |
| | 1 | 實驗 A 之壓克力風洞組 X1 |  |
| | 2 | 木條與漆包線 X1 | |
| | 3 | 定滑輪 X2 | |
| | 4 | 風扇或強力風扇(可定速) X1 | |
| | 5 | 風速計(最高量測 30m/s) X1 | |
| | 6 | 秤盤 X1 | |
| | 7 | 2000ml 汽水罐 X1 | |
| | 8 | 待測火箭載具 | |
| 9 | 支撐架(畫架) X1 | | |
| 實驗設計說明 | | | |
| 1. 控制在相同變因條件下，改變風速變因，得到風阻係數常數的應變變因。 | | | |
| C | 第二代: 秤盤組 | | |
| | 材料 | 裝置照 | |
| | 1 | 紙箱紙板 X1 |  |
| | 2 | 可定速之強力風扇 X1 | |
| | 3 | 燒杯 X2 (僅找可供實驗的固定物) | |
| | 4 | 待測火箭載具 | |
| | 5 | 秤盤 X1 | |
| | 6 | 固定強力風扇位置用的試管架 | |
| | 7 | 風速計 X1 | |
| | 8 | 維持風速計高度用紙杯 X1 | |
| 實驗設計說明 | | | |
| 1. 改善第一代待測物受風不穩定與量測不精準問題，得到更穩定風阻係數常數。 | | | |
| D | 第三代: 槓桿十倍放大組 | | |
| | 材料 | 裝置照 | |
| | 1 | 木條 X4 |  |
| | 2 | 可定速之強力風扇 X1 | |
| | 3 | 待測火箭載具 | |
| | 4 | 現有鐵力士架底座 X1 | |
| | 5 | 大螺絲與螺帽 X3 | |
| | 6 | 束帶與熱溶膠/槍 | |
| | 7 | 實驗 A 之壓克力風洞組 X1 | |
| | 8 | 固定強力風扇位置用的試管架 | |
| 9 | 風速計 X1、秤盤 X1 | | |
| 10 | 載重物(汽水罐組) X1 | | |
| 實驗設計說明 | | | |
| 1. 改善一、二代待測物受風不穩定與量測不精準問題，得到更穩定風阻係數常數。 | | | |

肆、研究過程與方法

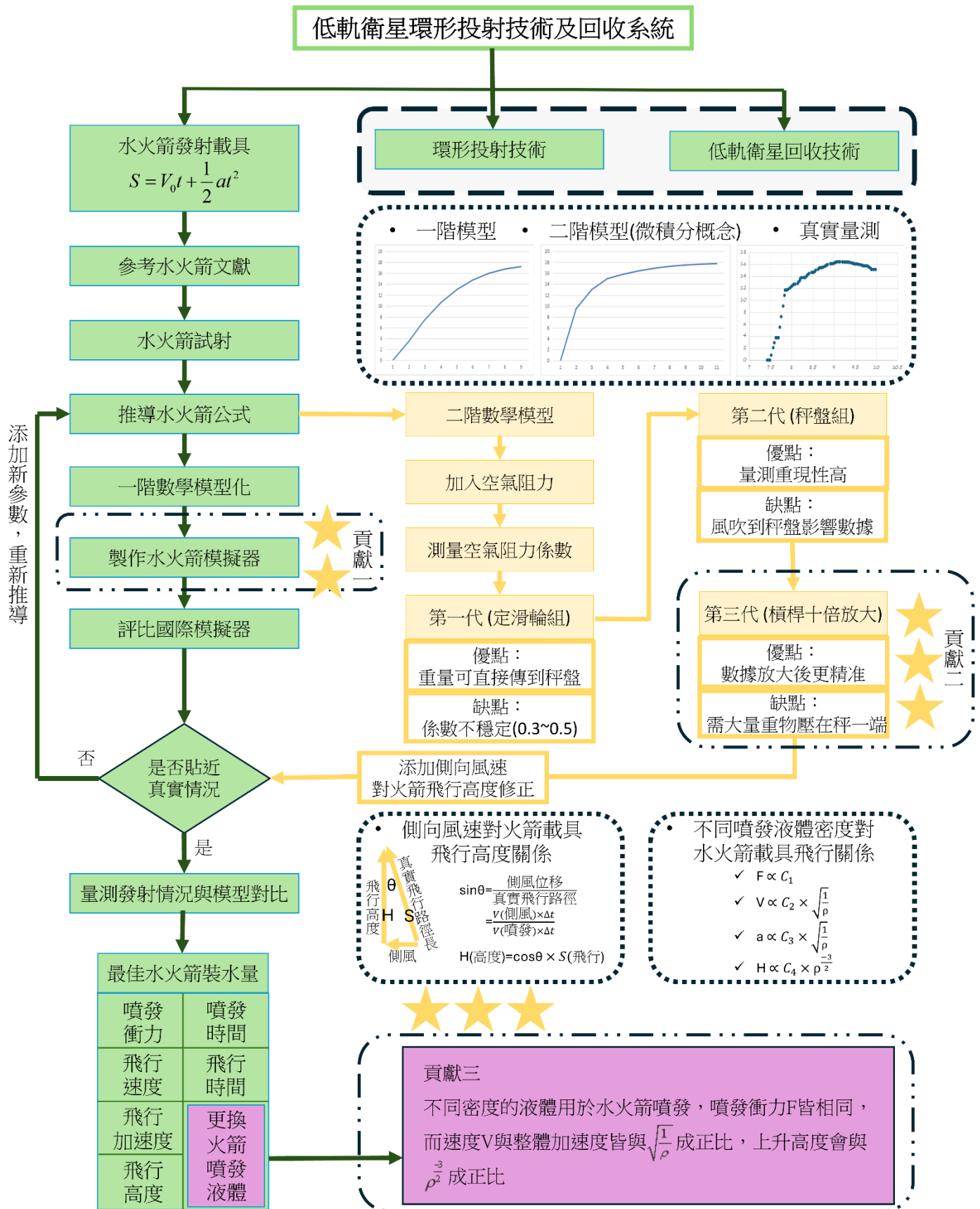


圖 2：水火箭行為數學模型化之實驗流程圖

一、水火箭載具行為數學模型與模擬器之整體流程

本研究範圍包含火箭載具的數學行為二階模型化、火箭載具的飛行模擬器來預測飛行資訊、具備飛行加速度、衝力與高度感測器判讀、火箭空氣阻力與空氣阻力係數的量測，再者包含自行設計火箭載具自動開傘降落器與飛行回收器(無人機結構)。本文獻呈現之整體流程圖如上頁圖 2 所示。整體的思路歷程首先呈現一階水火箭物理行為並將之數學模型化，藉著對比實際量測資料與國外水火箭模擬器後，我們發現我們的公式很靠近上述兩者，但是水火箭噴發每個時間點其噴發氣壓與衝力都不同且遞減，我們於一階模型上尚未考慮微積分的公式推演，故進而修改為二階簡單微積分模型，並導入空氣阻力與空氣阻力係數的影響因子，並思考在載具發射當下，側風速度會導致飛行高度誤差而以為我們模型錯誤，進而修正，此整體研究在歷年各種科學展覽會均無人提及，我們的貢獻一具備研發新穎性。

對於飛行當中的空氣阻力參數，參考數個文獻後發現皆依參考資料數據代入，也發現得獎作品有誤算錯的地方，所以自己研發設計更穩定精準的空氣阻力係數的量測方法，參照表 2 各大科學展覽會參考文獻後，我們提出為無人提及之新方法，此為創新貢獻二。

最後，我們念頭一轉心想：“那如果我們把水火箭的液體由水換成不同密度液體時，我們能得到什麼結論？，這個動機居然讓我們得到了一個前所未有的結論，此為貢獻三，我們也私下稱之”水火箭彤彤假說”。

(一)、水火箭運動行為一階數學模型推導

我們將每個階段水火箭噴發當下的物理、化學變化以數學模型示之，當我們選定用一已知容積 660ml 水火箭空瓶裝填 100ml 水後，打氣壓力為 100psi，這時我們要思考當火箭發射時瓶內氣壓的變化量-當罐內裝 100ml 水，空氣容量即為 560ml，當水噴發光後，罐內空氣空間變化為 660ml，我們依波以耳定律[40](單元 4-理想氣體與分壓定律)可知：

$$P_1 = 100\text{psi} = 6.8\text{atm}$$

$$\because P_1 V_1 = P_2 V_2 = nRT$$

$$\therefore 6.8 \times \frac{660 - 100}{1000} = P_2 \times \frac{660}{1000}$$

$$\therefore P_2 = 5.77\text{atm}$$

故水火箭一開始以 100psi(6.8atm)噴發至水噴完後，瓶內氣壓降至 5.77atm，之後噴氣。

我們再利用白努力原理中托里切利的公式[39] (第 7 章-流體力學)可得水噴發的速度為：

$$V_{\text{噴}} = \sqrt{\frac{2 \times (P_1 - P_2)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \times (6.8 \times 101325 - 1 \times 101325)}{1000}} = 34.29 \text{ m/s}$$

再利用質量流率公式[39] (第 7 章-流體力學)來計算出質量流率 m^* ：

(ρ 為水密度 1000kg/m^3 , A 為噴嘴直徑 1cm 之面積)

$$m^* = \rho \times A \times V_{\text{噴}} = 1000 \times 0.0000785 \times 34.29 = 2.69 \text{ kg/s}$$

質量流率算出後，即可得到水噴發的衝力(F)為：

$$F = m^* \times V_{\text{噴}} = 2.69 \times 34.29 = 92.3N$$

已知水火箭衝力 F 後，再利用牛頓第二運動定律 $F=ma$ ，求得水火箭噴發加速度為：

$$\therefore F = m \times a$$

$$\therefore 92.3 = \frac{20}{1000} \times a$$

$$\therefore a = 769.24 \text{ m/s}^2$$

當我們求得水火箭噴發時間，即可用等加速度公式求出最大噴發速度為：

$$\therefore m^* = 2.69 \text{ m/s}$$

$$\therefore t_{\text{噴發}} = \frac{100/1000}{2.69} = 0.03714s$$

$$\therefore V_2 = V_1 + at$$

$$\therefore V_{\text{max}} = 0 + (769.24 - 9.8) \times 0.03714 = 28.21 \text{ m/s}$$

當水噴光後，先前說明空氣密度遠小於水，故水火箭主要衝力是在水噴發階段，當到達最快速度，即失去衝力，接著做慣性運動上升至最高點(此時速度等於 0)所以我們可利用等加速度公式算出上升慣性時間與慣性升高高度，兩者總和就是水火箭發射最高高度 H_{max} 為：

$$\therefore V_3 = V_{\text{max}} + at(a = -9.8 \text{ m/s}^2)$$

$$\therefore 0 = 28.21 - 9.8 \times t_g$$

$$\therefore t_g = 2.8788s$$

$$H_{\text{max}} = 41.133m$$

| index | value | unit | index | value | unit |
|-------|---------|-------------|-------|-------|-----------------|
| 2 | Pmax | 100 psi | 10 | t_m* | 0.037148492 s |
| 3 | Ve | 660 cc | 11 | Vmax | 28.21237043 m/s |
| 4 | Vw | 100 cc | 12 | t_g | 2.878813309 s |
| 5 | Density | 1000 kg/m^3 | 13 | Hmax | 41.13309725 m |
| 6 | r | 1 cm | | | |
| 7 | Mb | 20 g | | | |
| 8 | Mw | 100 g | | | |
| 9 | g | 9.8 m/s^2 | | | |

| Results | F | A_rocket | Vmax | Hmax |
|---------|---------|-----------|----------|----------|
| 25 | 92.3098 | 2051.33 | 18.9599 | 18.4288 |
| 50 | 92.3098 | 1318.712 | 24.312 | 30.3827 |
| 75 | 92.3098 | 971.68 | 26.799 | 37.0165 |
| 100 | 92.3098 | 769.2486 | 28.21237 | 41.133 |
| 125 | 92.3098 | 636.6195 | 29.10675 | 43.9 |
| 150 | 92.3098 | 542.999 | 29.7113 | 45.86666 |
| 175 | 92.3098 | 473.38375 | 30.1375 | 47.3199 |
| 200 | 92.3098 | 419.59 | 30.446 | 48.425 |

圖 3：水火箭運動行為一階數學模擬器

(二)、水火箭運動行為一階數學模擬器

如圖 3 所示，我們首先利用 Excel 程式將計算水火箭衝力、速度、加速度、高度的公式編寫入表格運算式中，試算表中，只要填入或修改左側黃色的參數數值就可計算出右側黃底估計的火箭發射數值。先前都是用 Excel 試算表進行模擬器運算，目前準備使用 Matlab 這一套專業數學軟體來練習編寫程式與變成可以直接在電腦執行的檔案當成下一版本模擬器。

(三)、一階數學模擬結果比對

結果我們與國外澳洲的水火箭模擬器相比[9]，我們發現與別人的模擬器結果非常靠近，詢問指導老師們發現一般水火箭都是使用大學的工程數學來求解，我們能用很淺顯易懂的方式來預估，估計的結果還相差不遠，已經很難得，但我們還想著如何能讓模擬結果更靠近真實發射結果。我們將研究出的水火箭運動行為一階數學模擬器與該澳洲專家模擬器結果相比，其分別預估結果如下表 6 與圖 4。

澳洲水火箭專家模擬器連結[9]: <https://cjh.polyplex.org/rockets/simulation/>

| | | |
|-----------------------------------|------|--|
| Rocket volume: | 0.66 | (litres) |
| Water volume: | 0.1 | * (litres) |
| Pressure: | 100p | (in Kpa, append 'b' for bars, 'p' for PSI) |
| Nozzle size: | 10 | * (millimeters) |
| Nozzle loss factor: | 0.16 | * (0.05-0.3ish) |
| Bottle diameter: | 73.5 | (millimeters) |
| Coefficient of Drag: | 0.35 | (typical range 0.1-0.5) |
| Dry mass: | 20 | * (grams) |
| Initial speed (for second stage): | 0 | (metres/second) |
| Launch tube length: | 0 | (millimetres) |
| Launch tube diameter: | 0 | (millimetres, zero means same as nozzle) |
| Water density: | 1 | * (kg/litre) |
| Submit Simulation | | |

圖 4: 澳洲水火箭專家模擬器之程式頁面[9]

我們將原始我們運算的設定填入對方網站後，除了我們一階模型沒有思考空氣阻力係數外，也沒有大學工程數學背景知識，但我們列出兩者的結果如下表 6:

表 6: 本研究模擬結果與澳洲水火箭專家模擬器相比

| 本水火箭運動行為一階數學模擬器 | 澳洲水火箭專家模擬器 |
|--------------------------------|------------------------------|
| 水火箭衝力=92.3N | 水火箭衝力=95.7N |
| 水火箭加速度=769.249m/s ² | 水火箭加速度=787.9m/s ² |
| 水火箭噴發時間=0.037s | 水火箭噴發時間=0.039s |
| 飛行最高高度=41.133m | 飛行最高高度=41.12m |

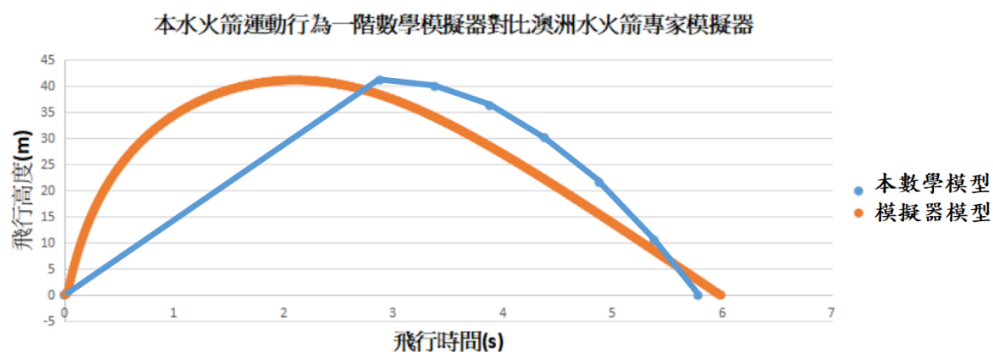


圖 5: 本水火箭運動行為一階數學模擬器模擬結果對比澳洲水火箭專家模擬器

由表 6 可以發現到，我們研究的演算法數學模型，在飛行高度誤差小於 1%、噴發時間約 5%、衝力約 3.5%、加速度約 2.4%，此調雖不中亦不遠，但是我們發現於圖 5 中，我們衝力估計低於國外模擬器，但是到達最高點的時間居然比較慢，這表示演算法內還有一些我們沒思考到的，所以我們繼續尋找一階模型不理想的部分，如圖 6 與圖 7，我們計算出不同裝水量的速度與高度結果，想找到最佳裝水量時，但我們發現最佳水量似乎沒有收斂，最後，我們發現到問題為何，並於下節說明。

水火箭數學模型-水火箭發射最快速度 versus 不同水量比對

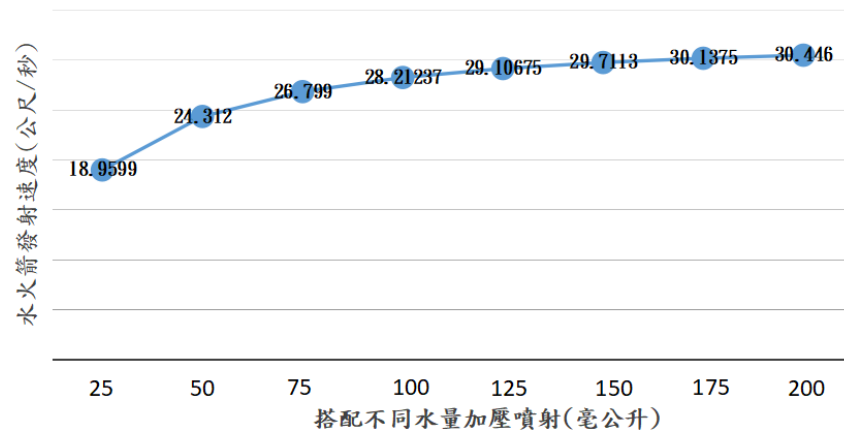


圖 6: 本水火箭一階數學發射速度模擬結果對應裝載不同水量

水火箭數學模型-發射高度 versus 不同水量比對

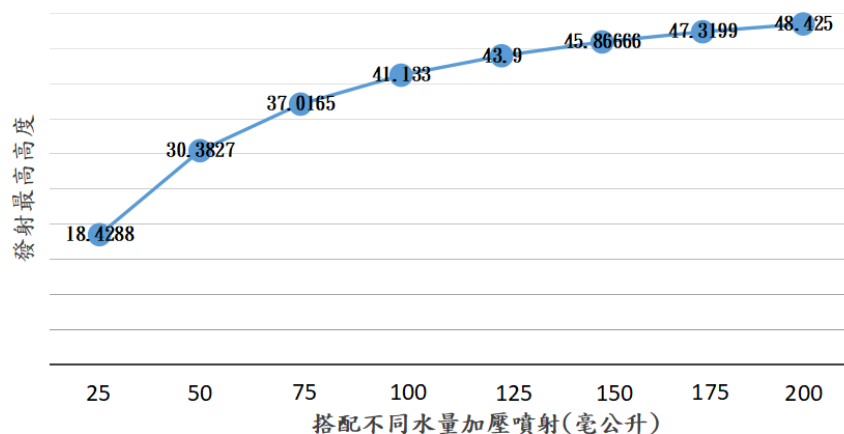


圖 7: 本水火箭一階數學飛行高度模擬結果對應裝載不同水量

(四)、結論、檢討與改善

水火箭建模之基本方程最主要需要於實驗中證明兩個重點: (1) 水火箭打氣之氣體溶入水中比例應低於 1%，我們即可忽略噴發時之亨利定律回補之蒸氣壓，單純依循波以耳定律分壓即可。 (2) 水火箭噴發階段皆應遵循波以耳分壓定律。此兩論點我們於下章實驗結果中將展示推論無誤。我們將一階模擬器與國外模擬器針對不同的裝水量，就飛行最高高度而言，我們使用 660ml 可樂罐裝水 125ml，依國外模擬器為最佳解(可見下圖 8)，我們卻無法收斂，反思演算法，察覺火箭如每噴出 5ml 水量後，其氣壓與衝力會遞減，對於不同裝水量，當衝力小於當下物重，結果將會反轉下墜，所以模型必須每噴發一小單位後，就必須重新計算當下結果，再疊代入下一個運算內，依此，我們提出動態簡單微積分觀念之二階數學模型。

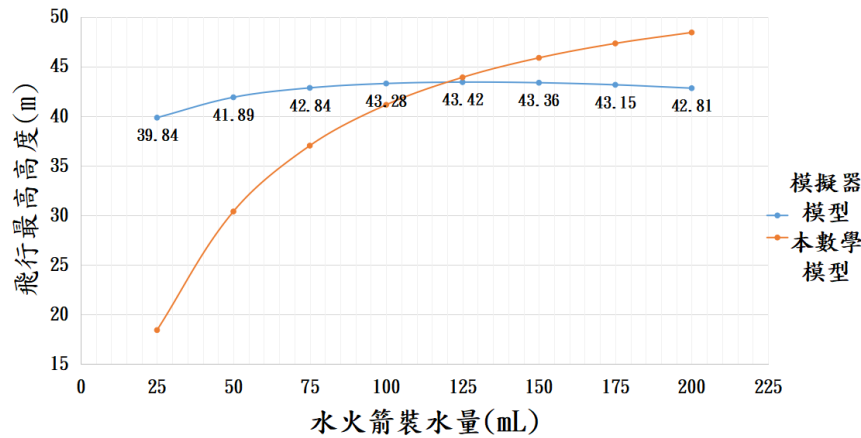


圖 8: 本水火箭一階數學模擬結果對比澳洲水火箭專家模擬器
(對應不同水火箭裝水量)

二、水火箭載具動態二階數學模型:改善一階模型

(一)、動態二階數學模型

我們將二階模型的想法，請教指導老師們後，學習嘗試用程式邏輯來運算，就簡單說明: 當我們依每 0.01 秒計算一次，可以用流量流率乘上 0.01 秒，就知道會噴發多少液體，然後瓶內氣壓降為多少，也就可以算出當下衝力，並利用扣除當下液體的重量，可得加速度與飛行高度差。這個時候我們再加入空氣阻力(運用當下的飛行速度算出)，飛行速度並參考側風速 0.5m/s，利用簡單的正弦($\sin \theta$)與餘弦定理 ($\cos \theta$)，就可以得到較真實的解，依此，我們對比一階與動態簡單微積分觀念之二階數學模型如圖 9 與下頁圖 10。

Initial :

$$P_1 = P_{\max} = 100(\text{psi}) = 6.8(\text{atm})$$

$$P_2 = 1(\text{atm})$$

Begin :

$$V_{\text{burst}} = \sqrt{\frac{2 \times (P_1 - P_2)}{\rho_{\text{water}}}}$$

$$m^* = \rho_{\text{water}} \times A \times V_{\text{burst}}$$

$$F = m^* \times V_{\text{burst}}$$

$$t_{\text{burst}} = \frac{V_{\text{water}}}{m^*}$$

$$a = \frac{F}{m_0 - (m_{\text{water}})}$$

$$v_{\max} = a \times t_{\text{burst}}$$

$$t_{\text{rise}} = \frac{v_{\max}}{g}$$

$$H_{\text{total}} = \frac{v_{\max} \times (t_{\text{burst}} + t_{\text{rise}})}{2}$$

plot $P(t), F(t), v(t), a(t), H(t)$

Done

圖 9: 原始一階數學演算法邏輯

Initial :

```

t = 0
Δt = 0.001
vt = 0
at = 0
Ft = 0
Ht = 0
Pt = Pmax = 100(psi) = 6.8(atm)
Pt+1 = 1
mt* = 0
ΔVt = Vw
C = 0.37
A = 0.00332
ρ = 1.23
Vwind = 0.5

```

loop1:

```

Vt+1 = √(2 × (Pt - Pt+1) / ρwater)
mt+1* = ρwater × A × Vt+1
mt+1 = mt - mt+1* × (Δt)
ΔVt+1 = ΔVt - (mt+1 / ρwater)
Pt+1 = Pt × (Vb - ΔVt) / (Vb - ΔVt+1)
Ft+1 = mt+1* × Vt+1
ft+1 = (1/2) × C × ρ × A × Vt+12
F't+1 = Ft+1 - ft+1
at+1 = F't+1 / mt+1
vt+1 = vt + at+1 × (Δt)
sinθ = Vwind / vt+1, find cosθ
Ht+1 = Ht + (vt+1 × (Δt) + (1/2) × at+1 × (Δt)2) × cosθ
if ΔVt+1 < 0, then ΔVt+1 = 0, jump to loop2
else, then t = t + 1, jump to loop1

```

loop2:

```

trise = vt+1 / g
Htotal = Ht+1 + vt+1 × (trise) - (1/2) × g × (trise)2
done
plot P(t), F(t), v(t), a(t), H(t)
done

```

圖 10: 動態簡單微積分觀念之二階數學演算法邏輯

(二)、研究模擬結果與比對

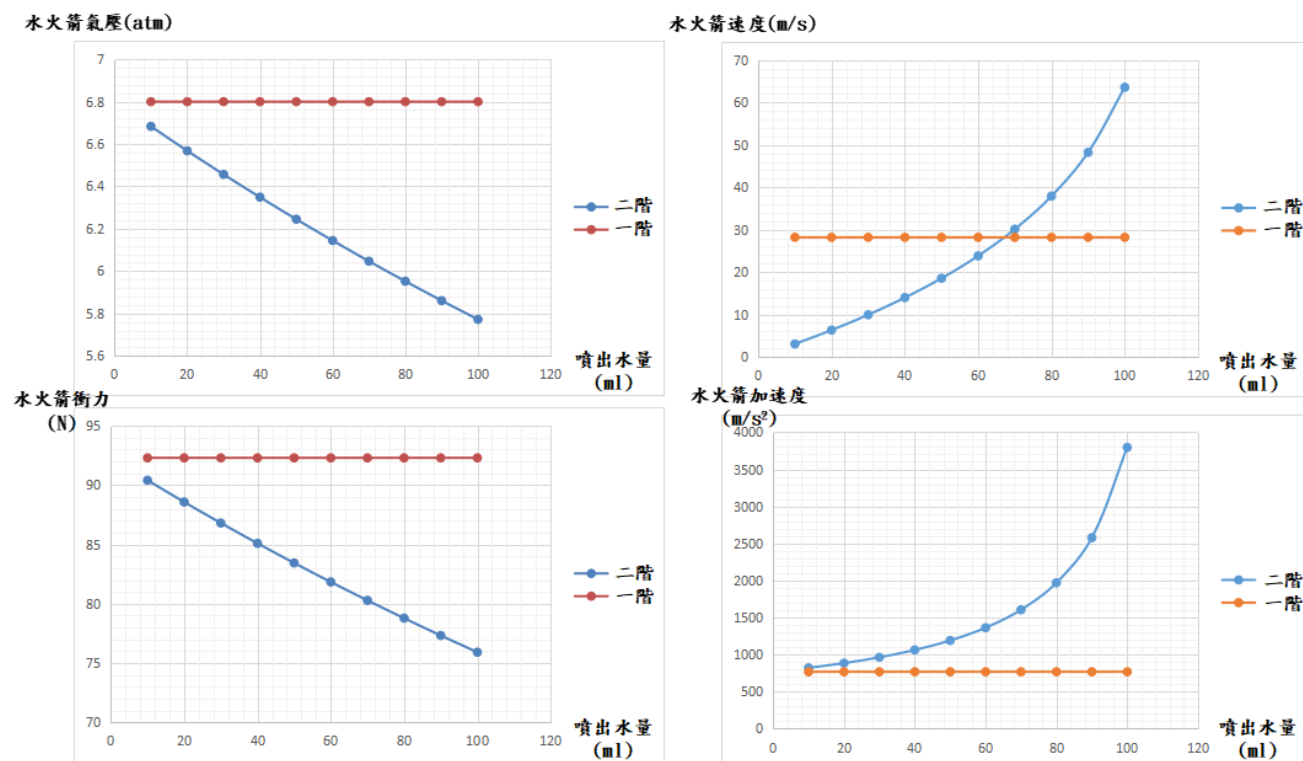


圖 11: 對比一階與二階模型之重要參數演算結果

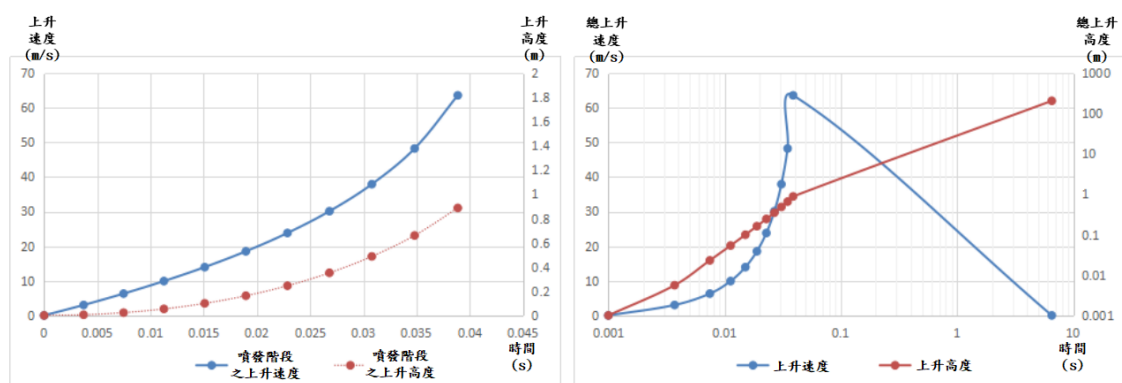


圖 12:二階數學演算法之運算結果

(三)、結論、檢討與改善

針對圖 11 之結果，我們可以看到一階結果對於每噴出不同水量時，其結果都是定值，但二階就能較細節的描繪出變化，就簡單說明：我們也就可以觀察到噴發階段更仔細的結果，如圖 12 右邊，噴發階段的高度差與速度差就非常清楚，可以更細微地模擬出國外模擬器看不到的噴發階段細節，我們再回頭比對圖 5，我們可以看到在國外模擬器飛行至最高處間，應該要看到兩段高度變化：第一段為噴水階段，此時斜率應最斜，後續是為慣性運動，以圖 5 來看，是看不到此關係，此處，我們在實驗結果再行呈現。

四、水火箭空氣阻力係數量測之研究流程圖

(一)、空氣阻力系數簡介

聽到空氣阻力當下，以為阻力就是用秤量出來就好，了解後才知道空氣阻力跟發射水火箭的當下速度呈二次方正比，也與受風面積正比，而且跟物體形狀有關，我們可以表示如下：

$$\text{空氣阻力} = \frac{1}{2} \times \text{空氣阻力係數} \times \text{空氣密度} \times \text{受風面積} \times \text{速度平方}$$

我們將公式標示成：

$$f = \frac{1}{2} \times C \times \rho \times A \times V^2。$$

其中公式所需要帶入的數值為：

- f: 空氣阻力(單位為牛頓，換算方法 1 公斤重=9.8 牛頓)，所以如果量到 10 克要先除以 1000 再成上 9.8。
- C: 空氣阻力係數(只是倍數沒有單位)
- ρ : 空氣密度 (1.23 公斤/立方公尺)
- A: 受風面積 (單位:平方公尺) 火箭直徑為 7.6 公分，所以受風面積為 0.00453 平方公尺。
- V: 火箭受風速度(單位:公尺/秒)

以火箭頭造型而言，一般文獻建議空氣阻力係數為 0.3-0.5 間，查詢後一般約使用 0.35 當成常態值，而以空氣阻力係數而言，魯伯特之淚空氣阻力係數最小約 0.04。

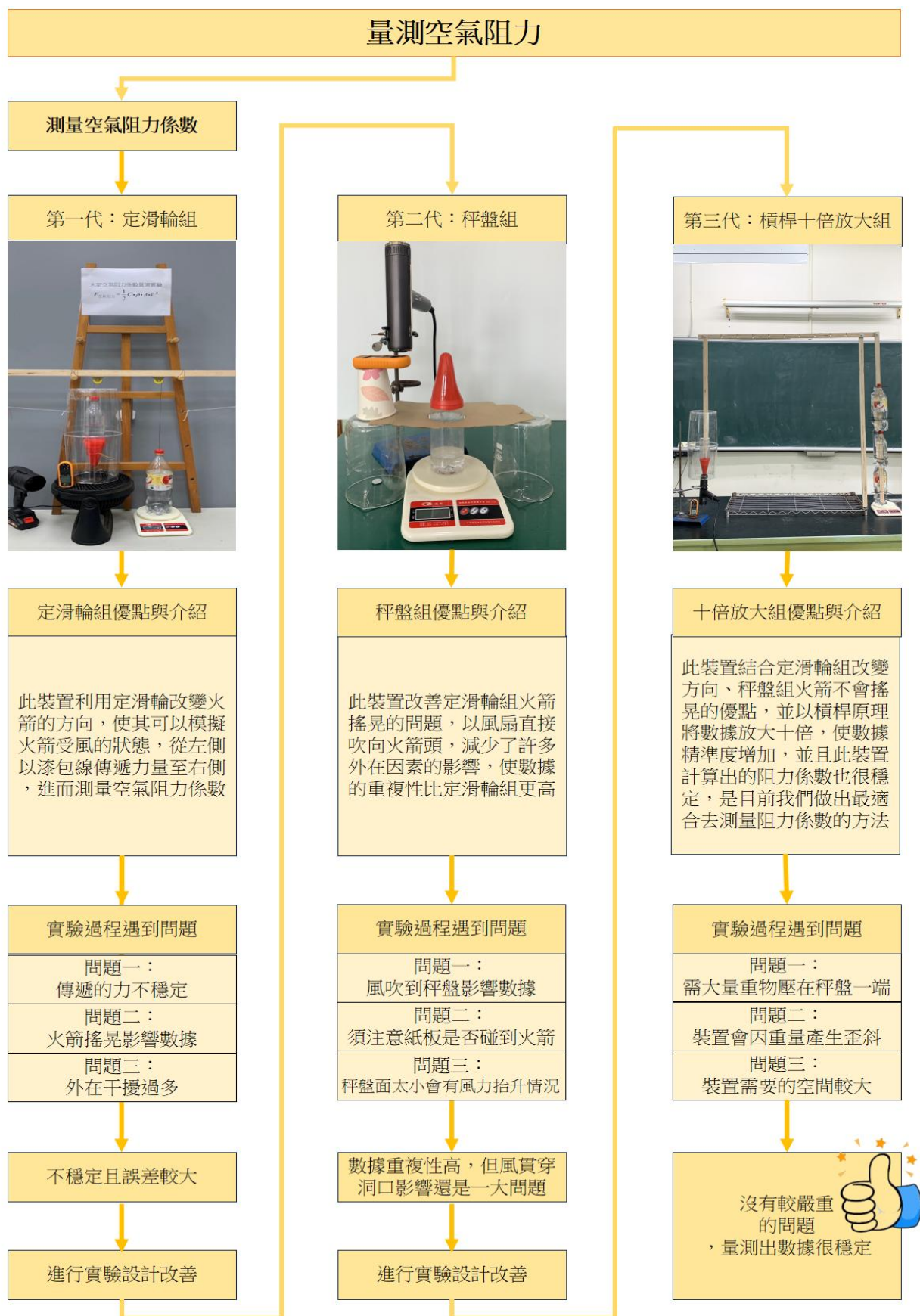


圖 13:空氣阻力係數研究: 三代改善過程流程圖

(二)、水火箭載具風洞實驗

火箭飛行中，全程受到空氣阻力的影響而降低飛行速度，我們設計可以在一個穩定氣流腔體內觀察水火箭遇到氣流的一個風洞。搭配使用發煙機與強力風扇，藉著氣流的速度變化來觀察氣流風阻的影響，由下圖 14 可知。經查詢，原來影響飛行阻力因素的不僅是空氣阻力還有一個叫空氣黏力的因素，飛行器造型可以使空氣阻力變小，但是桶身與尾翼造型會有空氣流體下壓力而黏力大於變小的阻力，結果反而阻力越大，未來我們也可以研究看看。

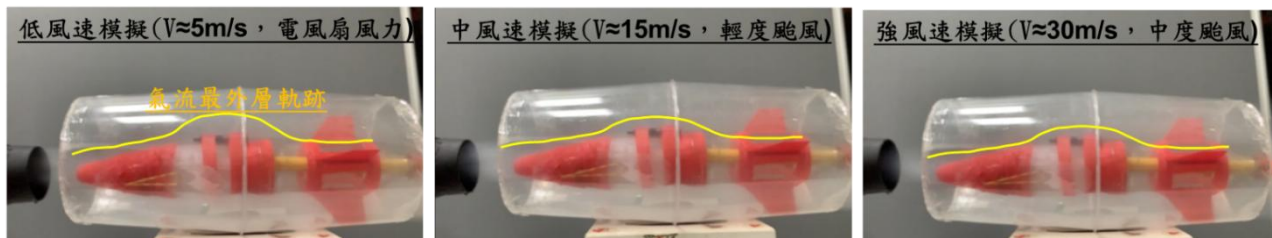


圖 14:三種不同風速下之火箭風洞流體實驗

就前頁之圖 13，我們呈現空氣阻力係數研究之三代改善過程流程圖。起因緣由水火箭二階模型需添加空氣阻力考量，參考文獻後才發現，多數研究均直接採用書本定義之空氣阻力係數，但光就錐形火箭頭而言，其造型不同導致空氣阻力係數可由 0.3 到 0.5 皆有可能，故啟發我們自己量測的實驗，一開始，我們覺得不就吹個風，量一下秤盤數值，反推導出空氣阻力係數不就好了，但過程中才發現其不然而且不簡單成功，所以我們經過了三代改良，推出新穎的一款具備可以放大十倍阻力差值量測之創新，並可縮小十倍誤差雜訊干擾，我們可以表示如圖 13。簡述其過程之結論為：(1) 第一代量測時發現高速風速下，火箭頭一直搖晃，且定滑輪線材一直因為太硬或延展或摩擦力太高導致所測量出之空氣阻力係數不穩，約在 0.3-0.5 間。(2) 於是改善上述問題研發第二代秤盤組，其量出的空氣阻力係數改善在 0.34-0.41 間，且火箭頭受風搖晃問題被解決，但是因為風力會貫穿遮風罩而使誤差產生，所以研發出第三代。(3) 第三代在參考文獻間皆無人使用過，創新性與精準度佳，我們利用簡單機械中的槓桿原理，採用等臂天秤概念，並改成 10:1 的力臂，這意味著火箭所受的空氣阻力會被放大十倍，精準度更好，而且裝置所發生的摩擦力或力矩差可以在反推公式時被除以 10，這表示量測雜訊誤差被縮小 10 倍而不影響結果，這個是我們很值得驕傲的地方，其所算出的空氣阻力係數在低、中、高三種風速下皆會收斂在 0.37。

(三)、量測空氣阻力係數實驗一：第一代-定滑輪組

圖 15 即為我們初步所設計之量測空氣阻力係數的實驗，定滑輪為一個僅改變施力方向的原件，但在整組實驗架好後實驗發現誤差很大，其來自於火箭本身晃動、滑輪所使用的線材太剛硬或具有延展性而淘汰(我們試過綿線、釣魚線、風箏線、鐵線，最後以漆包線最佳)。其圖中間部份我們將這個裝置的等效力學圖點出誤差原因來自於摩擦力與火箭晃動所造成的力矩差異，其圖下面部分我們列出公式來說明誤差寄生於何處，右半部則提醒後來研究者避免再次錯誤。第一代量測時發現高速風速下，火箭頭一直搖晃，且定滑輪線材一直因為太硬或延展或摩擦力太高導致所測量出之空氣阻力係數不穩，約在 0.3-0.5 間。

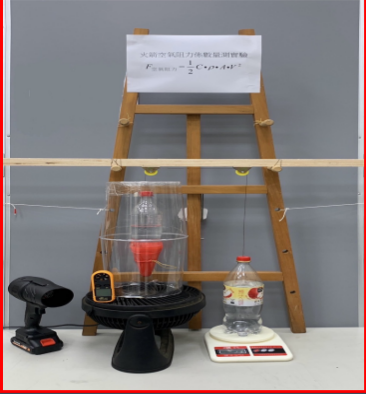
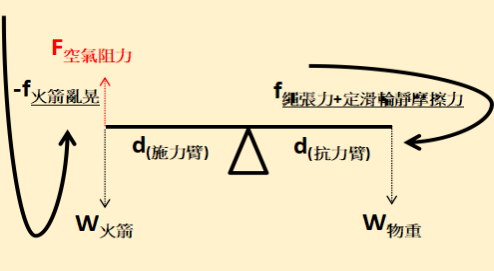
| 第一代：定滑輪組 | | 注意事項與量測誤差來源 |
|---|--|--|
|  | <p>◆等效力學裝置圖</p>  | <ol style="list-style-type: none"> 1. 建議將裝置架設在平穩兩個獨立的平面。ex：防震桌 2. 需注意火箭受風搖晃，以免數據產生誤差。 3. 此實驗線材適合使用柔軟且剛性強之線材，我們嘗試過釣魚線、棉線、鐵絲、風箏線與漆包線，以漆包線最佳。 4. 誤差常來自於線材延展、線材太硬或過軟致摩擦力生成、火箭受風搖晃與滑輪摩擦力。 |
| $F_{\text{空氣阻力}} = (f_{\text{秤盤數值差}} + f_{\text{繩張力+定滑輪靜摩擦力}} + f_{\text{火箭風晃}})$ | | |

圖 15:空氣阻力係數實驗一: 第一代定滑輪組

(四)、量測空氣阻力係數實驗二: 第二代-秤盤組


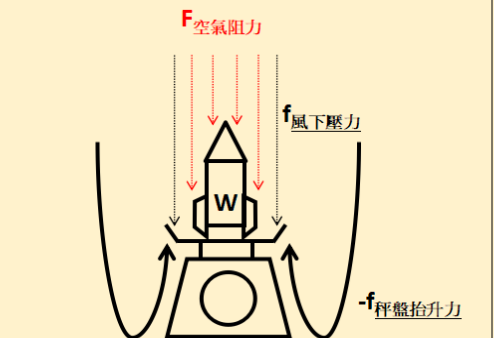
| 第二代：秤盤組 | | 注意事項與量測誤差來源 |
|---|--|--|
|  | <p>◆等效力學裝置圖</p>  | <ol style="list-style-type: none"> 1. 須設立擋風板且注意擋風紙板是否碰到火箭本體，會導致量測誤差。 2. 風力會貫穿擋風板空隙，導致秤盤面受風力影響，使數據上升而誤差。 3. 風力有時會使秤盤產生反作用抬升力，而讓量測數據變小產生誤差。 |
| $F_{\text{空氣阻力}} = (f_{\text{秤盤數值差}} + f_{\text{下壓力}} - f_{\text{秤盤抬升力}})$ | | |

圖 16:空氣阻力係數實驗二: 第二代秤盤組

圖 16 即為我們改善所設計之量測空氣阻力係數的第二代實驗，其目的要避免火箭搖晃問題與避免使用線材的影響。其遮風罩的用意在於避免風貫穿洞口而加壓至秤盤面導致數值變高，但發現還是會有些微透風，其等效力學裝置圖可以看出誤差來自於風貫穿的下壓力與在精密磅秤下，風反而會造成一個反彈的秤盤抬升力讓數值變小，右半部則提醒後來研究者避免再次錯誤。其量出的空氣阻力係數改善在 0.34-0.41 間。

(五)、量測空氣阻力係數實驗三: 第三代-槓桿十倍放大組

圖 17 即為我們最具有成就感的設計，所設計之量測空氣阻力係數的第三代實驗，其目的要利用施力臂與抗力臂相差 10 倍，讓受到低、中、高速風時皆能有效得到秤盤差值，並減輕

10 倍來自於力矩誤差或支點因為太重而產生之轉動摩擦力，但此裝置需要比較熟練槓桿力矩計算經驗，其因還要考慮被寄生的施力臂端木條重與總力矩運算，其等效力學裝置圖與公式可以發現第三代比前兩代運算更複雜，但是精準度非常高，值得被推薦使用，其所算出的空氣阻力係數在低、中、高三種風速下皆會收斂在 0.37。

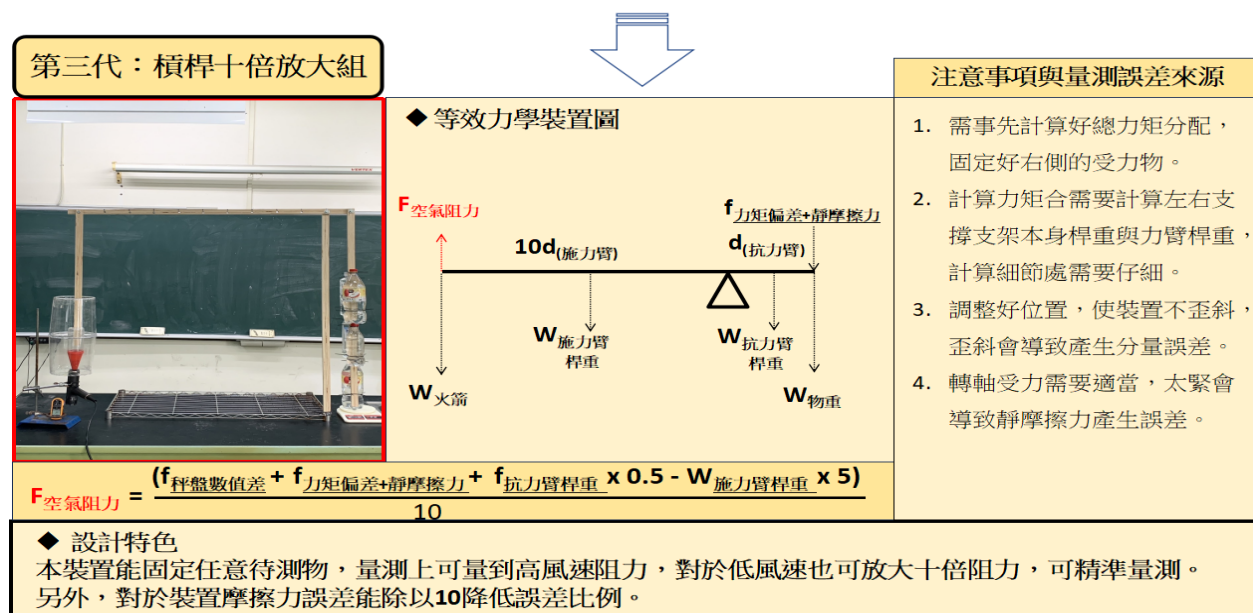


圖 17:空氣阻力係數實驗三: 第三代槓桿十倍放大組

(六)、結論、檢討與改善

對比我們三代的實驗設計，第一代量測時發現高速風速下，火箭頭一直搖晃，且定滑輪線材一直因為太硬或延展或摩擦力太高導致所測量出之空氣阻力係數不穩，約在 0.3-0.5 間。第二代實驗，其目的要避免火箭搖晃問題與避免使用線材的影響，其貫穿洞口而加壓至秤盤面的誤差與其風造成一個反彈的秤盤抬升力的誤差，還是會讓空氣阻力係數產生變異，由其是在中高風速。其量出的空氣阻力係數改善在 0.34-0.41 間。我們改善之量測空氣阻力係數的第三代實驗，其目的要利用施力臂與抗力臂相差 10 倍，讓受到低、中、高速風時皆能有效得到秤盤差值，並減輕 10 倍來自於力矩誤差或支點因為太重而產生之轉動摩擦力，其所算出的空氣阻力係數在低、中、高三種風速下皆會收斂在 0.37。

伍、研究結果

一、水火箭載具二階模型

(一). 亨利定律-加壓氣體溶解度實驗

實驗目的: 證明水火箭加壓噴發，溶於水之氣體量與瓶內氣體之比例低於 1%，蒸氣壓可忽略。

實驗需求: 架設遵循亨利定律之實驗測試設備(如表四-A 實驗)，其可參考台大化學系講義[38]

控制變因: 1.固定 100ml 水量，2.固定打氣氣壓 100psi(6.8atm)，3.控制將氣壓放至 1atm 秤總重。

操作變因: 操作液面上方氣壓反覆為 6.8atm 至 1atm。

應變變因: 水中溶氣量莫耳數占比瓶內空氣莫耳數百分比。

實驗結論: 水中溶氣量莫耳數占比瓶內空氣莫耳數百分比為 0.25%，證明可忽略不考慮蒸氣壓。

說明:

表 7: 水火箭加壓氣體溶解量百分比

| 亨利定律之量測氣體溶解度實驗 | | | | | | |
|----------------|---------------|-----------------|--------------------|-------------------|------------------------|---------------|
| 裝水量 | 1atm 總重(g) | 100psi 總重(g) | 洩壓至 1atm 下總重(g) | 推論之溶解 量/空氣重(g) | 氣體溶解 莫耳數(m) | 溶解量 百分比(%) |
| 100.263ml | 142.573 | 147.174 | 142.524 | 0.0114/4.601 | 3.958×10^{-4} | 0.24778 |
| | 142.420 | 146.933 | 142.444 | 0.0114/4.513 | 3.958×10^{-4} | 0.25260 |
| | 142.444 | 146.890 | 142.307 | 0.0114/4.446 | 3.958×10^{-4} | 0.25641 |
| | 142.307 | 146.720 | 142.302 | 0.0114/4.413 | 3.958×10^{-4} | 0.25833 |
| | 142.302 | 146.680 | 142.320 | 0.0114/4.378 | 3.958×10^{-4} | 0.26039 |
| | 142.320 | 146.726 | 142.317 | 0.0114/4.406 | 3.958×10^{-4} | 0.25874 |
| | 142.317 | 146.692 | 142.321 | 0.0114/4.375 | 3.958×10^{-4} | 0.26057 |
| | 142.321 | 146.740 | 142.334 | 0.0114/4.419 | 3.958×10^{-4} | 0.25798 |

亨利定律為推論加壓氣體溶於水之溶解量，其公式為:

$P = K \times C_M$ 其中，P 為液面上氣壓；K 為亨利定律常數； C_M 為溶於水空氣之莫耳濃度。

以本研究而言，反覆加壓由 1 大氣壓(1atm)至 100psi(6.8atm)再洩壓至 1 大氣壓量測，其中使用精密磅秤測得裝水量為 100.263ml。然而空氣之亨利定律常數可依空氣中氮氧莫耳分率與氮氧之亨利常數推論，其推論如下:

$$K_{N_2} = 1639.34 \text{ \& } K_{O_2} = 769.2, \therefore K_{\text{空氣}} = \frac{4}{5} \times 1639.34 + \frac{1}{5} \times 769.2 = 1463.31 \left(\frac{\text{atm} \times l}{\text{mole}} \right)$$

$$\therefore \text{空氣溶解量} = \frac{\Delta P}{K_{\text{空氣}}} \times 0.100263(l) \times 28.8(\text{空氣分子量}) = 0.0114(g)(0.0003958 \text{ mole})$$

台大化學系之亨利定律實驗講義[38]，我們本來要在釋壓至 1atm 後秤重，然後再充分搖晃後瓶內因氣體釋放至瓶中所以氣壓會再上升，由於 (1)氣壓回壓氣壓差極小，難以用 $PV=nRT$ 算出，胎壓計難以分辨，(2)水加壓後會跨越三態臨界點會有些許變成氣態，所以釋放氣壓會造成水量減少，實驗到底是空氣減輕還是水變少會測不準，往後需要更高準度器材方可做出。

上表 7 最後欄位顯示:8 次連續實驗皆顯示空氣溶解量對於空氣總量百分比皆低於 1%(統計上低於 1%可忽略不計)，約 0.25%，也就是證明出”水火箭噴發僅考慮後續波以耳分壓定律即可，不需要考慮溶解氣體釋放的氣壓差”。

(二). 波以耳定律-水火箭噴發氣壓實驗

實驗目的: 證明水火箭噴發，其瓶內氣壓變化遵循波以耳分壓定律。

實驗需求: 架設遵循波以耳定律之實驗測試設備(如表四-B 實驗)

控制變因: 1.固定打氣氣壓 100psi(6.8atm)，2.控制將水釋放空後量氣壓。

操作變因: 操作不同水量釋放光，不可釋放到氣體。

應變變因: 瓶內氣壓差(應遵循波以耳定律)。

實驗結論: 證明水火箭噴發瓶內氣壓差遵循波以耳分壓定律。

說明:

波以耳定律為推論理想氣體下(何謂理想氣體不贅述[40])，體積變化與氣壓變化規律，上頁論證已證明可忽略不考慮氣體溶解之氣壓，只遵循波以耳定律即可，其公式為： $P_1V_1=P_2V_2$ 。

以表 8 中 125ml 水量而言，可樂瓶總容量為 660ml，運算式為：

$$6.8(atm) \times (0.66ml - 0.125ml) = P_2 \times 0.66ml, \text{波以耳推論氣壓為 } P_2 \times 14.7psi = 84.8psi$$

表 8: 水火箭噴發瓶內氣壓差之誤差百分比

| 波以耳定律之水火箭噴發瓶內氣壓差實驗 | | | | | | |
|--------------------|-----------------|-----------------|---------------|-----------------|-------------|--------------|
| 裝水量 (ml) | 1atm 下 總重(g) | 100psi 總重(g) | 排開水 後總重(g) | 排開水 後氣壓(psi) | 波以耳 推論氣壓 | 誤差 百分比(%) |
| 125 | 177 | 182 | 57 | 80 | 84.8 | 1.36 |
| 100 | 152 | 161 | 61 | 84 | 81.1 | 0.94 |
| 75 | 126 | 132 | 58 | 89 | 88.6 | 0.45 |
| 50 | 102 | 108 | 58 | 92.5 | 92.4 | 0.11 |

以此實驗結果可知，水火箭噴發階段皆遵循波以耳定律，其與公式推論之誤差約 1%，但文獻[22]指出：“水量排出臨界之氣液噴發階段衝力最大”，以此論點，我們未來可以再加

以研究在氣液噴發階段是否仍遵循波以耳定律。

(三). 水火箭質量流率測試實驗

實驗目的: 證明水火箭噴發階段之質量流率遵循二階模型推論。

實驗需求: 架設可量測質量流率之實驗測試設備(如表三-B 實驗)

控制變因: 1.固定打氣氣壓 100psi(6.8atm)，2.固定發射角度與無側風影響因素。

操作變因: 操作不同水量噴發。

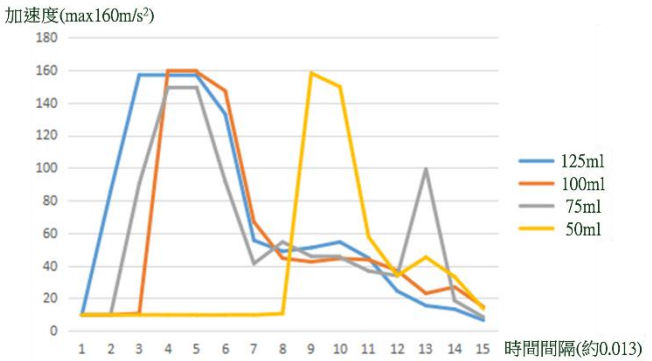
應變變因: 噴發時間推論質量流率。

實驗結論: 證明水火箭噴發瓶內液體依循二階模型之質量流率推論。

說明:

表 9: 水火箭質量流率測試實驗

| 水火箭噴發質量流率測試實驗 (二階模型模擬值 vs 澳洲專家值 vs 真實測量值) | | | |
|---|-------------|--------------|-----------|
| 水量 (ml) | 實測值 (s) | 專家模 擬值[9] | 模型模 擬值 |
| 125 | 0.039~0.052 | 0.05s | 0.04553s |
| 100 | 0.039~0.052 | 0.039s | 0.03877s |
| 75 | 0.026~0.039 | 0.029s | 0.02877s |
| 50 | 0.013~0.026 | 0.019s | 0.01893s |



質量流率如 4-1-1 章節所言，為推論功能守恆下，氣壓做功應為液體質量流率[37](第 7 章流體力學)。質量流率如為 2kg/s，指 100ml 的水應在 0.05 秒噴發完(0.1/2)，本實驗使用加速度計測量加速時間，最大加速期間將液體噴發完，但加速度計測量最大值僅 $160m/s^2$ ，故我們僅

觀察最大加速度維持時間，除以總水量推估，如表 9 所示，並與模擬結果相較。

由於感測器紀錄時間不夠仔細，所以僅以約略時間紀錄，觀察最大加速度值維持時間，此質量流率時間關係與我們二階模型關係近似，並接近澳洲專家模擬值，佐證公式無誤。

(四). 水火箭載具二階模型飛行參數比對

實驗目的: 證明水火箭二階模型估計準確性。

實驗需求: 架設可量測水火箭飛行高度之實驗測試設備(如表三-B 實驗)

控制變因: 1.固定打氣氣壓 100psi(6.8atm)，2.固定水量 100ml，3.空阻係數 0.37，4.總重相同。

操作變因: 更換不同模擬器模型。

應變變因: 觀察飛行圖、噴發時間、總飛行時間、最高高度。

實驗結論: 證明水火箭噴發瓶內噴發衝力依循二階模型之推論。

說明:

本實驗結果以水量 100ml，加裝運動感測器後空載具重 160 克，側風速依當時發射所測的之 0.5m/s，以水為液體，在 100psi 氣壓下所得之對比，依下圖 18 中，我們所提出的二階模型非常接近真實量測值，其最高高度在 16.016 公尺，實驗結果為 16.425 公尺，澳洲水火箭專家結果為 20.6104 公尺；到達最高點時間為：

本二階模型為 1.626 秒、實測為 1.579 秒、澳洲專家則為 2.019 秒。總飛行時間: 本研究為 3.428 秒、實測為 3.988 秒、澳洲專家為 4.129 秒。

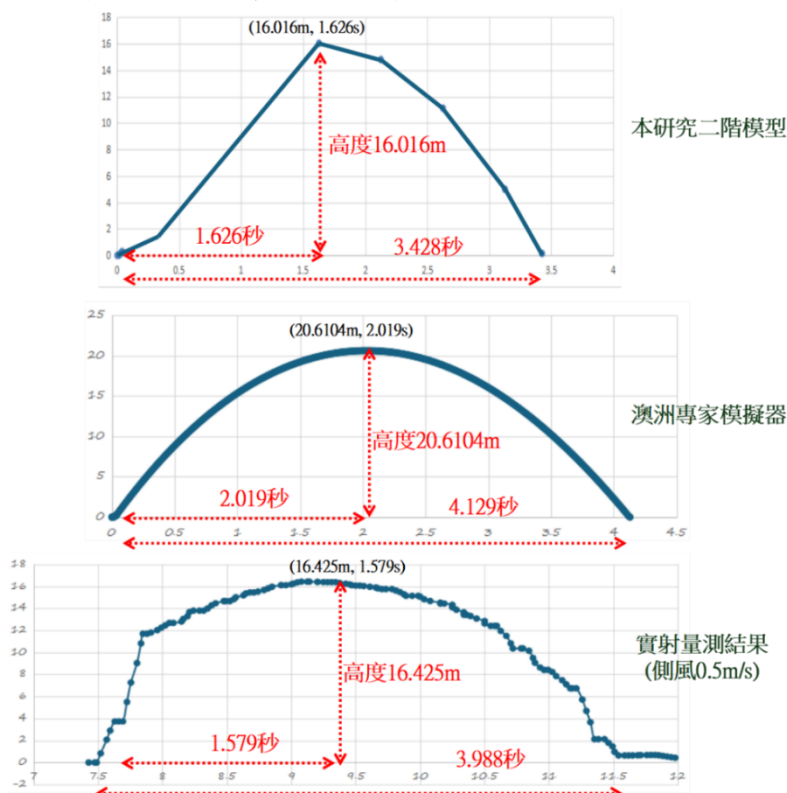


圖 18:結果對比: 本二階模型、澳洲專家模擬器與實測結果

下圖 19 中，我們猜測實測真實時間應該是很靠近我們研究的模型，但因為怕感測器摔壞，都會安裝降落傘，導致總體時間延後，但最高高度時間雷同。特別是實測結果上，可看出載具噴飛衝力階段有兩段，我們覺得很有趣，未來我們可以針對這邊多做研究，我們結論如下：

此兩段施力可能為第一段為噴液體階段，第二段衝力為液氣共噴階段，於我們所參考文獻中，國小物理組的得獎團隊有作其分析稱”液氣階段衝力最強” [22]。

第二種可能是第一段為噴嘴還沒脫離噴座，所以需抵抗此最大靜摩擦力後，才能以最大衝力噴射。

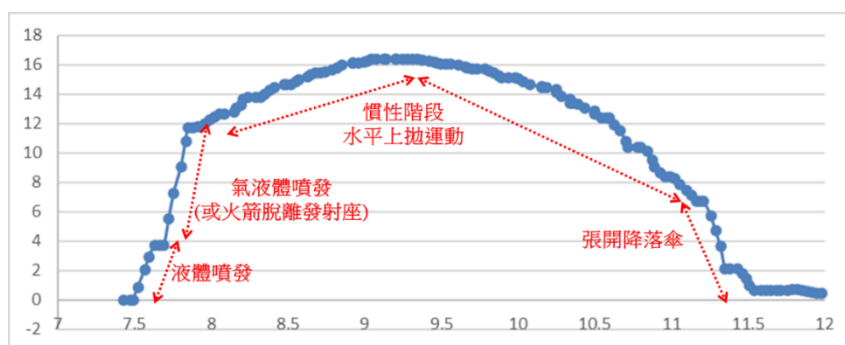


圖 19:水火箭載具搭配感測器採樣之實測結果分析

二、空氣阻力係數實驗

測量空氣阻力係數的實驗，我們共改進了三版，並舉出各方法的優缺點。

實驗目的: 量測出較穩定精準之空氣阻力係數。

實驗需求: 架設可量測水火箭受風空氣阻力與係數之實驗測試設備(如表五-A~D 實驗)

控制變因: 1.固定相同水火箭載具。

操作變因: 更換不同風速。

應變變因: 觀察磅秤重量減輕值，推論空氣阻力係數值與量測穩定性。

實驗結論: 證明第三代-槓桿十倍放大組量測空氣阻力係數最佳與最穩定。

說明:

(一). 測量空氣阻力係數方法一(定滑輪組)

將電風扇調整風速為最大檔(4.7m/s)，電風扇上方放置風洞實驗的外殼，使氣流不會擴散到外界而穩定氣流；並重複實驗十五次。

表 10: 第一代(定滑輪組)空氣阻力係數量測結果

| 風速 4.7m/s | | | | |
|-----------|----------|-----------|----------|------------|
| 次數 | 原始 數值 | 吹風後 數值 | 秤盤 差值 | 空氣阻力 係數 |
| 1 | 487 | 489 | 2 | 0.34 |
| 2 | 485 | 487 | 2 | 0.34 |
| 3 | 483 | 485 | 2 | 0.34 |
| 4 | 484 | 487 | 3 | 0.51 |
| 5 | 485 | 487 | 2 | 0.34 |
| 6 | 484 | 486 | 2 | 0.34 |
| 7 | 483 | 485 | 2 | 0.34 |
| 8 | 487 | 489 | 2 | 0.34 |

| | | | | |
|----|-----|-----|---|------|
| 9 | 482 | 485 | 3 | 0.51 |
| 10 | 484 | 487 | 3 | 0.51 |
| 11 | 487 | 490 | 3 | 0.51 |
| 12 | 487 | 489 | 2 | 0.34 |
| 13 | 482 | 485 | 3 | 0.34 |
| 14 | 485 | 488 | 3 | 0.51 |
| 15 | 484 | 486 | 2 | 0.34 |

實驗數據表 10 指出火箭受風後的重量差值都等於 2 或 3(由於磅秤最小精準度為 1 克)，就算提高磅秤精準度，也會因為火箭受風搖晃而量測數值不穩定而跳動，空氣阻力係數呈現不穩定，但能可知大多在 0.3~0.5 之間(可見圖 20，但誤差率達 33.3%)，可確定空氣阻力係數的範圍。我們嘗試過更換不同的線，例如釣魚線、鐵線等，線才要求需要夠軟，剛性足、貼合定滑輪、並無延展性的線，最後以漆包線最佳。根據第一代實驗，我們整理出下表的優缺點，並指出定滑輪傳遞的力不穩定，水火箭因晃動拉扯漆包線因而影響數據，所以進行改良第二代測量空氣阻力的方法。下表 11 為第一代測量空氣阻力係數實驗的優缺點及注意事項。

表 11: 第一代(定滑輪組)優缺點及注意事項

| | | | |
|------|-----------------|---------------|-----------------|
| 優點 | 可模擬火箭受風情況 | 火箭受到的力可直接傳至另端 | 可改變施力方向 |
| 缺點 | 火箭傳遞的力不穩定 | 火箭搖晃拉扯線而影響數據 | 外在干擾過多導致數據重現性不高 |
| 注意事項 | 須放在平穩的平面上 ex.地板 | 須注意水火箭是否搖晃 | 實驗中不可移動、觸碰裝置 |

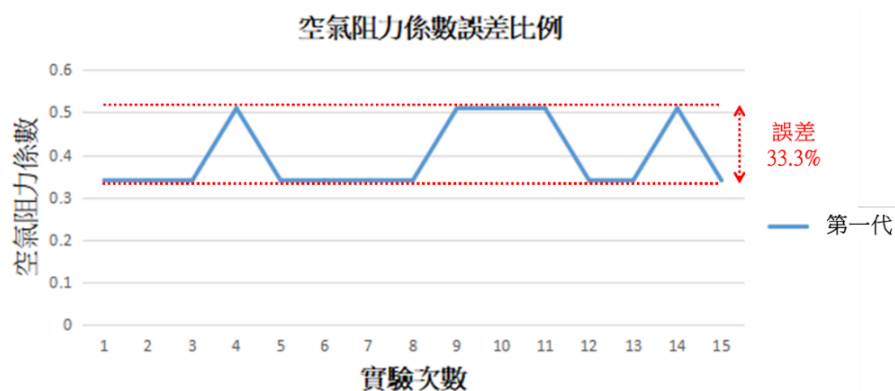


圖 20:第一代空氣阻力係數實驗誤差比例

(二).測量空氣阻力係數方法二(秤盤組)

將火箭放在秤盤中央，在秤盤兩邊放置等高物，並在上方黏貼恰微大於火箭直徑之遮風罩，再固定風速計與強力風扇，此處要注意風速計與強力風扇的距離要等高於火箭頭，風速才能準確判讀，操作變因分成三檔風速，各風速重複二十次，實驗時只需轉動強力風扇支撐架，可以大大減少人為誤差，下表 12 即為實驗結果。

表 12: 第二代(秤盤組)空氣阻力係數量測結果

| 風速強 | | | | 風速中 | | | | 風速弱 | | | |
|-----|------|----|--------|-----|------|----|--------|-----|------|----|--------|
| | 風速 | 阻力 | 空氣阻力係數 | | 風速 | 阻力 | 空氣阻力係數 | | 風速 | 阻力 | 空氣阻力係數 |
| 1 | 17.8 | 28 | 0.42 | 1 | 17.0 | 20 | 0.33 | 1 | 14.4 | 17 | 0.39 |
| 2 | 20.3 | 30 | 0.35 | 2 | 17.6 | 22 | 0.34 | 2 | 13.8 | 15 | 0.38 |
| 3 | 19.4 | 31 | 0.40 | 3 | 16.9 | 23 | 0.39 | 3 | 14.4 | 16 | 0.37 |
| 4 | 20.2 | 32 | 0.38 | 4 | 17.5 | 22 | 0.34 | 4 | 14.4 | 15 | 0.35 |
| 5 | 20.1 | 27 | 0.32 | 5 | 16.6 | 22 | 0.38 | 5 | 14.6 | 15 | 0.34 |
| 6 | 20.4 | 29 | 0.33 | 6 | 17.2 | 22 | 0.36 | 6 | 13.5 | 15 | 0.40 |
| 7 | 20.7 | 28 | 0.31 | 7 | 17.2 | 22 | 0.36 | 7 | 12.8 | 14 | 0.41 |
| 8 | 20.8 | 29 | 0.32 | 8 | 16.5 | 21 | 0.37 | 8 | 13.2 | 16 | 0.44 |
| 9 | 19.2 | 31 | 0.40 | 9 | 16.1 | 21 | 0.39 | 9 | 14.0 | 15 | 0.37 |
| 10 | 20.2 | 29 | 0.34 | 10 | 16.6 | 22 | 0.38 | 10 | 14.1 | 15 | 0.36 |
| 11 | 19.8 | 29 | 0.36 | 11 | 16.6 | 21 | 0.36 | 11 | 13.5 | 16 | 0.42 |
| 12 | 20.4 | 29 | 0.33 | 12 | 17.3 | 21 | 0.34 | 12 | 14.5 | 14 | 0.32 |
| 13 | 19.7 | 28 | 0.35 | 13 | 16.9 | 22 | 0.37 | 13 | 13.6 | 15 | 0.39 |
| 14 | 19.8 | 29 | 0.36 | 14 | 17.0 | 21 | 0.35 | 14 | 14.3 | 15 | 0.35 |
| 15 | 19.8 | 27 | 0.33 | 15 | 15.8 | 21 | 0.40 | 15 | 13.1 | 15 | 0.42 |
| 16 | 19.8 | 28 | 0.34 | 16 | 17.3 | 22 | 0.35 | 16 | 14.7 | 15 | 0.33 |
| 17 | 19.7 | 28 | 0.35 | 17 | 17.5 | 22 | 0.34 | 17 | 13.5 | 16 | 0.42 |
| 18 | 19.8 | 27 | 0.33 | 18 | 16.2 | 22 | 0.40 | 18 | 12.1 | 15 | 0.49 |
| 19 | 19.0 | 28 | 0.37 | 19 | 16.8 | 22 | 0.37 | 19 | 14.6 | 16 | 0.36 |
| 20 | 19.6 | 28 | 0.35 | 20 | 16.1 | 23 | 0.43 | 20 | 14.3 | 16 | 0.38 |

我們發現空氣阻力係數量測更穩定，範圍約在 0.35~0.4 之間，誤差明顯變小(表示如下頁圖 21)，但在強風情況下，空氣阻力係數有時更高，猜測是強風灌入秤盤面影響。我們將此裝置的優缺點整理成下表 13，我們發現如果改用較精準的磅秤測量會導致數值差變負數，推論是因為強風灌入遮風罩而撞及底面而抬升秤面，使之無法準確測量數據，並且因為紙板的洞口尺寸和火箭寬度仍有縫隙，容易使風吹到秤盤上導致數據有誤差，因此我們改良了第三個測量空氣阻力的方法。

表 13: 第二代(秤盤組)優缺點及注意事項

| | | | |
|------|--------------|----------------|--------------------|
| 優點 | 火箭不會搖晃而影響數據 | 重現性較高 | 可直接移動燒杯架效率高 |
| 缺點 | 紙板容易碰到火箭 | 風吹到秤盤使數據有誤 | 數據在秤盤成負數 |
| 注意事項 | 須注意紙板是否接觸到火箭 | 用燒杯架固定吹風機能漸少誤差 | 使用面積較大的秤盤風才不會形成抬升力 |

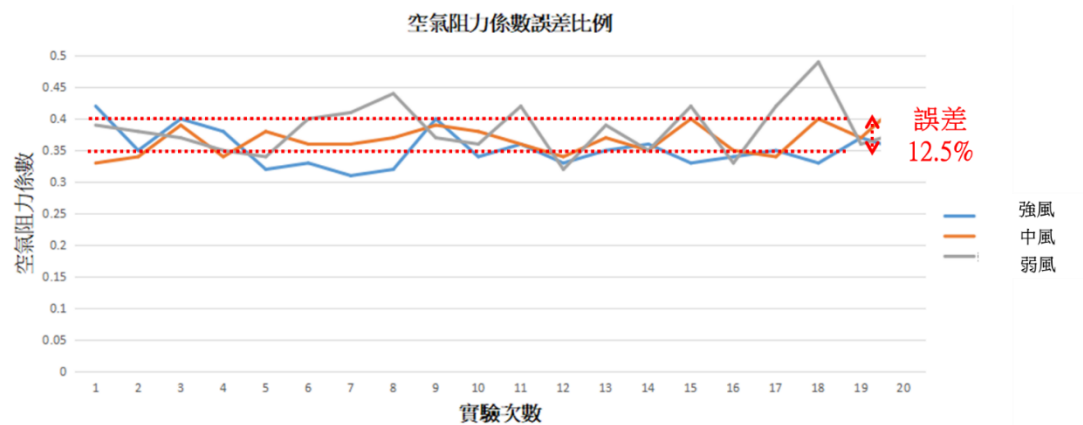


圖 21:第二代空氣阻力係數實驗誤差比例

(三).測量空氣阻力係數方法三(槓桿十倍放大組)

如同圖 17 所言，左木棍尾端固定火箭，並在火箭外圍固定風洞；右木棍固定重物，須注意重量與力矩是否足夠讓右木棍底部碰到秤盤(右側重量大於左側)，並以三種風速測量其增加的數值，各組重複二十次並將結果表列如下頁表 14。

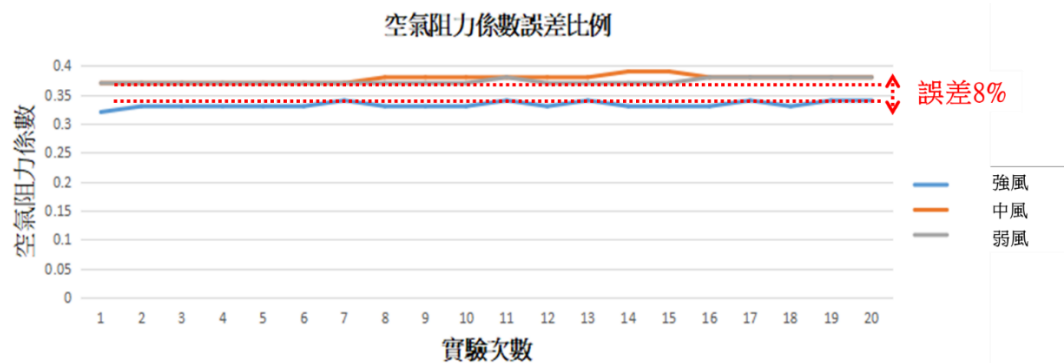


圖 22:第三代空氣阻力係數實驗誤差比例

同圖 17 與圖 22 所示，本創新之槓桿放大十倍組確實將空氣阻力係數確認在 0.37，誤差由 33.3%、12.5%降低至 8%，其中比較奇怪的部分在於高風速下，偏離中低風速數值，我們檢討後發現可能風力太強，讓槓桿產生些微角度，以致阻力衰減。若將此阻力回歸，其阻力係數為 0.37，誤差也降至 5%。本實驗也證明以此雷諾數下，阻力與風速是為平方倍。目前結果沒有參考文獻[12]所言之低風速下成線性關係結果。

表 14: 第三代(槓桿放大十倍組)空氣阻力係數量測結果

| 項目 | 風速 20.1(強) | | | | | 風速 16.5(中) | | | | | 風速 14.6(弱) | | | | |
|----|---------------|-----|-----|------|------|---------------|-----|----|------|------|---------------|-----|----|------|------|
| | 始值 | 末值 | 差值 | 阻力 | C 值 | 始值 | 末值 | 差值 | 阻力 | C 值 | 始值 | 末值 | 差值 | 阻力 | C 值 |
| 1 | 760 | 886 | 126 | 27.1 | 0.32 | 808 | 896 | 88 | 20.8 | 0.37 | 823 | 886 | 63 | 16.3 | 0.37 |
| 2 | 761 | 892 | 131 | 27.6 | 0.33 | 808 | 898 | 90 | 21.0 | 0.37 | 825 | 888 | 63 | 16.3 | 0.37 |
| 3 | 766 | 897 | 131 | 27.6 | 0.33 | 809 | 899 | 90 | 21.0 | 0.37 | 824 | 889 | 65 | 16.5 | 0.37 |
| 4 | 764 | 899 | 135 | 28.0 | 0.33 | 810 | 901 | 91 | 21.1 | 0.37 | 824 | 887 | 63 | 16.3 | 0.37 |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|-----|-----|-----|------|------|-----|-----|-----|------|------|-----|-----|----|------|------|
| 5 | 813 | 950 | 137 | 28.0 | 0.33 | 810 | 902 | 92 | 21.2 | 0.37 | 824 | 887 | 63 | 16.3 | 0.37 |
| 6 | 818 | 954 | 136 | 28.1 | 0.33 | 812 | 904 | 92 | 21.2 | 0.37 | 825 | 888 | 63 | 16.3 | 0.37 |
| 7 | 814 | 952 | 138 | 28.3 | 0.34 | 813 | 905 | 92 | 21.2 | 0.37 | 824 | 889 | 65 | 16.5 | 0.37 |
| 8 | 789 | 923 | 134 | 27.9 | 0.33 | 815 | 909 | 94 | 21.4 | 0.38 | 825 | 890 | 65 | 16.5 | 0.37 |
| 9 | 793 | 927 | 134 | 27.9 | 0.33 | 816 | 911 | 95 | 21.5 | 0.38 | 826 | 889 | 63 | 16.3 | 0.37 |
| 10 | 796 | 931 | 135 | 28.0 | 0.33 | 817 | 910 | 93 | 21.3 | 0.38 | 825 | 891 | 66 | 16.6 | 0.37 |
| 11 | 799 | 937 | 138 | 28.3 | 0.34 | 816 | 913 | 97 | 21.7 | 0.38 | 826 | 894 | 68 | 16.8 | 0.38 |
| 12 | 817 | 953 | 136 | 28.1 | 0.33 | 818 | 914 | 96 | 21.6 | 0.38 | 827 | 892 | 65 | 16.5 | 0.37 |
| 13 | 814 | 951 | 137 | 28.2 | 0.34 | 819 | 917 | 98 | 21.8 | 0.38 | 805 | 871 | 66 | 16.6 | 0.37 |
| 14 | 803 | 939 | 136 | 28.1 | 0.33 | 820 | 920 | 100 | 22.0 | 0.39 | 807 | 873 | 66 | 16.6 | 0.37 |
| 15 | 802 | 938 | 136 | 28.1 | 0.33 | 821 | 920 | 99 | 21.9 | 0.39 | 806 | 872 | 66 | 16.6 | 0.37 |
| 16 | 806 | 940 | 134 | 27.9 | 0.33 | 822 | 919 | 97 | 21.7 | 0.38 | 804 | 873 | 69 | 16.9 | 0.38 |
| 17 | 804 | 937 | 133 | 27.8 | 0.34 | 823 | 920 | 97 | 21.7 | 0.38 | 809 | 878 | 69 | 16.9 | 0.38 |
| 18 | 809 | 947 | 138 | 28.3 | 0.33 | 821 | 919 | 98 | 21.8 | 0.38 | 807 | 880 | 73 | 17.3 | 0.38 |
| 19 | 810 | 945 | 135 | 28.0 | 0.34 | 823 | 920 | 97 | 21.7 | 0.38 | 809 | 879 | 70 | 17.0 | 0.38 |
| 20 | 813 | 950 | 137 | 28.2 | 0.34 | 822 | 919 | 97 | 21.7 | 0.38 | 807 | 876 | 69 | 16.9 | 0.38 |

三、水火箭飛行特徵量測實驗

(一). 水火箭裝填不同液體噴發研究

實驗目的: 探索水火箭尚未探索之飛行特徵。

實驗需求: 架設可量測水火箭飛行參數之實驗測試設備(如表三-B 實驗)

控制變因: 1.固定打氣氣壓 100psi(6.8atm)，2.空阻係數 0.37，3.減少側風干擾，4. 相同液體量。

操作變因: 替換不同液體。

應變變因: 觀察最佳飛行高度，觀察不同液體飛行參數。

實驗結論: 不同密度的液體用於水火箭噴發，噴發衝力 F 皆相同，而速度 V 與整體加速度

皆與 $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ 成正比，上升高度會與 $\rho^{-\frac{3}{2}}$ 成正比，

說明:

我們從推導公式與模擬結果發現：“若改變裝填液體密度為 (1) 酒精($\rho=800\text{kg/m}^3$)，(2) 水($\rho=1000\text{kg/m}^3$)，(3) 飽和食鹽水($\rho=1200\text{kg/m}^3$)，其水火箭噴發，噴發衝力 F 皆相同，而速度 V 與整體加速度 a 皆與 $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ 成正比，上升高度 H 會與 $\rho^{-\frac{3}{2}}$ 成正比”，我們皆以 100ml 液體為主，加壓 100psi(6.8atm)氣壓，並展示如表 15 模擬值與目標值並呈現其誤差百分比極低。

該實驗非常不好完成，由於密度差異所造成的變化會小於受到側風影響之誤差，所以我們嘗試以 75%酒精(其密度已量測為 850kg/m^3 與飽和實驗水調整密度為 1200kg/m^3 真實量測，其飛行高度確實如我們模擬器所預測為: 酒精高度>水高度>食鹽水高度，其動作感測器可證明。但澳洲專家[9]無法正確判讀，其模擬結果為: 酒精高度(18.98m)<水高度(20.61m)<食鹽水高度(21.90m)，真實水火箭噴發量測結果確實本模擬結果是正確的，實驗且可重現。

表 15: 水火箭裝填不同液體噴發實驗

| 水火箭裝填不同密度液體噴發參數實驗 | | | | | | |
|-------------------|----------------------|----------------------|-------------------------|-----------|-------------|--------------|
| 飛行參數 | 酒精 ($\rho=800$) | 水 ($\rho=1000$) | 飽和鹽水 ($\rho=1200$) | 酒精 目標值 | 飽和鹽水 目標值 | 誤差 百分比(%) |
| F(衝力 N) | 90.411 | 90.411 | 90.411 | 90.411 | 90.411 | 0 |
| a(加速度 m/s^2) | 389.70 | 361.645 | 337.355 | 404.331 | 330.135 | 2.14 |
| V(速度 m/s) | 18.1156 | 15.562 | 13.6796 | 17.3989 | 14.2061 | 3.71 |
| H(高度 m) | 17.1227 | 12.6436 | 9.77465 | 16.1339 | 9.61831 | 1.60 |

以此實驗結果可知，以三者噴發衝力而言皆相同，加速度而言:誤差為 2.14%，噴發速度而言:誤差為 3.71%，以飛行高度而言:誤差為 1.6%，其能證明我們的推論無誤，未來我們會設計更精準的實驗設備，將我們的”水火箭彤彤假說”實驗證明出來。

陸、討論與未來研究

本研究範圍包含火箭載具的數學行為二階模型化、火箭載具的飛行模擬器來預測飛行資訊、具備飛行加速度、衝力與高度感測器判讀、火箭空氣阻力與空氣阻力係數的量測，再者包含自行設計火箭載具自動開傘降落器與飛行回收器(無人機結構)，再進階到結合 1.5 匹馬達之火箭載具環形投射技術(增加火箭初速度 V_0)，對於失能低軌衛星設計回收系統包含:自動太陽能追蹤系統供電與電解水製氫氧供衛星回歸地球推進器。未來我們會持續努力完成，就本研究內容而言未來可更深入研究內容為:

1. 二階模型未考慮液氣同時噴發所帶來的衝力[22]，這個未來可以研究。
2. 本模擬器雖使用 Excel 試算表完成，已經具備一定程度的估計準確度，未來可以像國外專家一樣使用專業軟體編寫，放在網頁上供人模擬查詢。
3. 針對空氣阻力方向，我們思考火箭外殼可否用濕餐巾紙配合碳粉做成碳纖維外殼，外型採用魯伯特之淚，是否能降低阻力至可忽略。
4. 本研究發現: 不同密度的液體用於水火箭噴發，噴發衝力 F 皆相同，而速度 V 與整體加速度皆與 $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ 成正比，上升高度會與 $\rho^{-\frac{3}{2}}$ 成正比，未來我們會證明結果。
5. 本研究所收集之參考文獻發現: 不同密度的液體[32]、或使用小蘇打粉水[32]或洗衣粉水[28]，用於水火箭噴發，其皆有論點，未來我們會往此研究。
6. 本研究發現若使用具有強大蒸氣壓之液氣混合體，其噴發衝力與速度將會更有前瞻性，未來若安全性許可，我們直覺利用高壓高溫水蒸氣也可以真實運用於第一級火箭推進使用，而且水蒸氣於噴發階段可於對流層吸收二氧化碳氣體，未來也許有利於溫室效應的改善。

柒、結論

我們的整體研究是探討適合低軌衛星載具的行為推理雛形與失能低軌衛星的回收機制，本研究初步涵蓋說明火箭載具模型化、模擬器與如何有效量測出火箭載具的空氣阻力係數，過程間推演基本水火箭一階數學模型並搭配動作感測器比對預測結果與真實量測結果與國外水火箭模擬器差異處，再修改水火箭一階數學模型添加多維度參數(如思考空氣阻力與發射當下側風速對運動影響)，並嘗試用簡單微積分概念來疊代運算，計算每分量的變化增加預測精準度。對於火箭載具的空氣阻力估算，我們設計共三代實驗器材來提升火箭空氣阻力係數的量測精準度。最後，在推導飛行公式與資料搜尋中我們想發現新假說，我們發現到：我們證明出變換不同液體(以沒有蒸氣壓之液體為主，如氣泡水不可)對水火箭飛行係數(如：衝力、速度、加速度與飛行高度)有迄今無人發現的研究成果。以二階模型貢獻亮點而言：本實驗以水量 100ml，載具淨重 160 克，側風速依當時發射所測之 0.5m/s，以水為液體，在 100psi 氣壓下所得之對比，我們所提出的二階模型非常接近真實量測值，其最高高度在 16.016 公尺，實驗結果為 16.425 公尺，澳洲水火箭專家結果為 20.6104 公尺；到達最高點時間為：本二階模型為 1.626 秒、實測為 1.579 秒、澳洲專家則為 2.019 秒。總飛行時間：本研究為 3.428 秒、實測為 3.988 秒、澳洲專家為 4.129 秒。針對空氣阻力係數，本創新之槓桿放大十倍組確實將空氣阻力係數確認在 0.37，誤差由 33.3%(第一代)、12.5%(第二代)降低至 8%。其中，水火箭模型推論中，我們亦證明出水火箭噴發階段運用亨利定律實驗，闡明加壓氣體之溶解量與蒸氣壓由於低於 1% 可忽略不計，其噴發氣壓遵循波以耳定律，並證明誤差低於 1.36%。若改變裝填液體密度為 (1) 酒精($\rho=800\text{kg/m}^3$)，(2) 水($\rho=1000\text{kg/m}^3$)，(3) 飽和食鹽水($\rho=1200\text{kg/m}^3$)，其水火箭噴發，噴發衝力 F 皆相同，而速度 V 與整體加速度 a 皆與 $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ 成正比，上升高度 H 會與 $\rho^{-\frac{3}{2}}$ 成正比，以加速度而言：誤差為 2.14%，噴發速度而言：誤差為 3.71%，以飛行高度而言：誤差為 1.6%。我們嘗試以 75% 酒精(其密度已量測為 850kg/m^3 與飽和實驗水調整密度為 1200kg/m^3 真實量測，其飛行高度確實如我們模擬器所預測為：酒精高度>水高度>食鹽水高度，其動作感測器可證明。但澳洲專家[9]無法正確判讀，其模擬結果為：酒精高度(18.98m)<水高度(20.61m)<食鹽水高度(21.90m)，真實水火箭噴發量測結果確定本模擬結果是正確的，實驗且可重現，其證明我們的假說有一定的科學性。

捌、參考文獻資料

- [1] ”衛星的小巴士”，中央大學太空教育實驗室. <http://www.ss.ncu.edu.tw/~SpaceEdu/satellite/vehicle.html>
- [2] 林彥興，“TESS 凌日系外行星巡天衛星”，EASY 天文地科小站, 2 月, 2018.
<https://hchsastronomy.blogspot.com/2018/02/tess.html>
- [3] 徐建峰，“國家太空隊動起來！低軌衛星商機大爆發 各廠布局、概念股一次看”，經濟日報新聞部編輯中心, 1 月, 2024.
<https://money.udn.com/money/story/5612/7542077>
- [4] 黃怡婷，“引爆無所不在的網路商機，你的手機就是「低軌衛星」連線載體！”，科技大觀園, 1 月, 2023.
<https://scitechvista.nat.gov.tw/Article/C000003/detail?ID=3e1dbbf0-c62a-4753-b141-9c094d1359fb>
- [5] 林宗輝，“【低軌衛星大商機】SpaceX 低調來台揪團搶商機”，財訊雜誌, 5 月, 2021.
<https://www.wealth.com.tw/articles/9fea66a2-8e7b-4240-9511-ba1309459a58>
- [6] “入軌火箭”，國家太空中心網站. <https://www.tasa.org.tw/zh-TW/missions/detail/Launch-Vehicle>
- [7] ” [中央大學]物理演示實驗－誰比較快？－斜面滾動篇 rolling race”，中央大學物理演示實驗室, 2013.

<https://www.youtube.com/watch?v=CJI5CTQ52g>

- [8] SpinLaunch, “SpinLaunch Introduction” . <https://youtu.be/EtRly5X211o?si=nghgN-QoakmAmCrQ>
- [9] Clifford, “Water Rocket Simulator” , Clifford's Home Page. <https://cjh.polyplex.org/rockets/simulation/>
- [10] “「氫」雲直上-影響氫氣火箭飛行的各項因子探討”，基隆市中正國中, 2022 年臺灣國際科學展覽會-物理與天文組.
- [11] “圓周運動變形之摩擦力與物理建模之探討”，台北市北一女中, 2017 台灣國際科學展覽會-物理與天文組.
- [12] “速率越大阻力就越大嗎-流體阻力的探討”，台中市台中女中, 中華民國第 34 屆中小學科學展覽會-高中物理組
- [13] “告訴你「拉牛耳」「亨利」的壓力有多大”，高雄市高雄女中, 2007 年台灣國際科學展覽會-高中化學組
- [14] “I sink therefore I am”，彰化縣彰化女中, 中華民國第 59 屆中小學科學展覽會-高中物理與天文學組
- [15] “球狀落體運動速度的測定與空氣阻力的探討”，彰化縣彰化女中, 中華民國第 27 屆中小學科學展覽會-高中組物理組
- [16] “降落傘阻力大追查”，花蓮縣國風國中, 中華民國第 27 屆中小學科學展覽會-高中組物理組
- [17] “「破風而行」—風阻的探討”，嘉義縣太保國小, 中華民國第 27 屆中小學科學展覽會-高中組物理組
- [18] “隨波「阻」流—液體中物體運動研究”，新北市永和國中, 中華民國第 27 屆中小學科學展覽會-高中組物理組
- [19] “運用抽吸效應(suction effect)減阻之研究”，台北市麗山高中, 中華民國第 54 屆中小學科學展覽會高中物理組
- [20] “亨利在手知多少”，屏東縣屏東高中, 中華民國第 54 屆中小學科學展覽會高中物理組
- [21] “你可以再瞄準一點—旋轉火箭”，台中市四育國中, 中華民國第 60 屆中小學科學展覽會-國中物理組
- [22] “與時推移~水火箭發射推力探討”，屏東縣復興國小, 屏東縣第 64 屆中小學科學展覽會-國小物理組
- [23] “風場下圓柱氣孔導管抽吸對風阻係數影響”，台北市麗山高中, 2022 年台灣國際科學展覽會
- [24] “10 公斤級聚甲基丙烯酸甲酯-氣態氧混合式火箭引擎混合效率提升之初步探討”，台北市建國中學, 2022 年台灣國際科學展覽會-工程學組
- [25] “只剩一張「嘴」~水火箭噴嘴對飛行直線穩定性探討”，屏東縣復興國小, 屏東縣第 63 屆中小學科學展覽會-國小物理組
- [26] “針筒火箭發射機制與飛行探究”，雲林縣正心高中, 中華民國第 61 屆中小學科學展覽會-高中物理與天文學組
- [27] “男人夢想的小老婆-探討水火箭車發射動力之研究”，桃園市僑愛國小, 中華民國第 57 屆中小學科學展覽會-國小物理組
- [28] “看誰最神「氣」探討影響水火箭拋射距離”，台中市軍功國小, 中華民國第 60 屆中小學科學展覽會-國小物理組
- [29] “疾風飛馳，衝！衝！衝！～探討陸海空「氣壓水箭」的射遠動力之分析研究”，新北市永和國小, 中華民國第 46 屆中小學科學展覽會-國小自然組
- [30] “水火箭電梯~水火箭載重能力探討”，嘉義縣第 52 屆中小學科學展覽會-國小物理組
- [31] “強力水火箭—175 公尺的最佳紀錄”，嘉義縣 53 屆中小學科學展覽會-國中物理組
- [32] “夢想升空-探討不同水溶液之水火箭與拋射距離之研究”，台東縣忠孝國小, 台東縣第 61 屆中小學科學展覽會-國小物理組
- [33] “(風)情萬種的模型跑車-模型跑車水平阻力與抬升阻力的探討”，高雄市光榮國小, 中華民國第 55 屆中小學科學展覽會-國小物理組
- [34] “降落吧！我的自由年代！”，嘉義縣第 56 屆中小學科學展覽會-國中物理組
- [35] 包舜華, “水火箭的世界”，天文館期刊, 第八期, 第 19-25 頁
- [36] 江建昌, “翻轉水火箭教學—電土火箭”，科學教育月刊, 第 380 期, 中華民國 104 年 7 月, 第 42-48 頁
- [37] 張凱翔, “氫氧燃料水火箭”，科學教育月刊, 第 399 期, 中華民國 106 年 6 月, 第 24-27 頁
- [38] “亨利定律常數的測定”，大學普通化學實驗, 台灣大學出版中心, 第 12 版, 中華民國 97 年, 第 E7-1-E7-4 頁
- [39] 林樹人, 張鎮麟, “大學入學-物理基礎觀念(上)&(下)”，建興文化事業有限公司, 2024 年 12 月
- [40] 陳紀全, “大學入學精準制-高中資優化學總複習”，建興文化事業有限公司, 2024 年