新竹市第 43 屆中小學科學展覽會作品說明書

科別　數學

組別　國中甲組

作品名稱　　透視?幾何?看破一切紅塵的透視幾何!

關鍵詞　　　透視投影、平行投影、笛沙格定理

編號

透視?幾何?看破一切紅塵的透視幾何!

摘要

本研究探討透視投影和平行投影，討論四邊形在投影上的限制，還有如何在 2D 平面上畫出投影四邊形。在透視投影中，我們將用笛沙格(逆)定理的方式畫出四邊形，尋找其特性或限制。在平行投影中，我們著墨於其限制，透過相似轉換將圖形轉至平行線上並探討其角度與邊長的關聯性，以及投影射線之間的間距。

壹、研究動機

當我們在外面拍照的時候，是在拍鏡頭接近於地面的夕陽照，所以照片中心就是夕陽與地平線的交界處。發現我們所拍的景象往中間趨近並逐漸變小，但是我們知道，如果從側面來看，照相機鏡頭和景象之間應該是接近平行於地平線的，但我們所拍的很明顯所有的景象到最後都會交到照片中心。這種同樣位子，但用不同角度、不同位子所觀察出來的關係卻不一樣，啟發了我們對透視投影的興趣。

貳、研究目的

1.任意兩個四邊形形成透視投影的條件

2 討論透視投影上的四邊形作圖法

3.任意兩個四邊形形成平行投影的條件

4.討論平行投影上的四邊形作圖法

參、研究器材

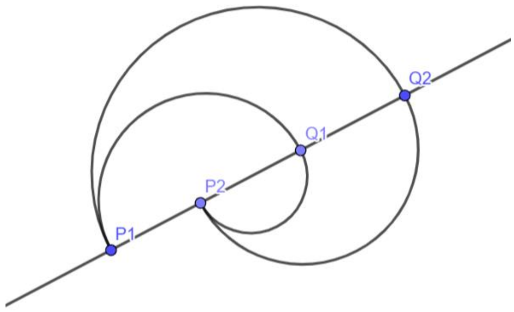
1.電腦(GGB)

肆、 預備知識

1. 交比定義(圖 1)

若 P1，P2，Q1，Q2 四點共線，定義:$\lambda_1 = \frac{P1Q1}{Q1P2}$、$\lambda_2 = \frac{P1Q2}{Q2P2}$

則交比為$(P1, P2; Q1, Q2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\frac{P1Q1}{Q1P2}}{\frac{P1Q2}{Q2P2}} = \frac{P1Q1*Q2P2}{Q1P2*P1Q2}$



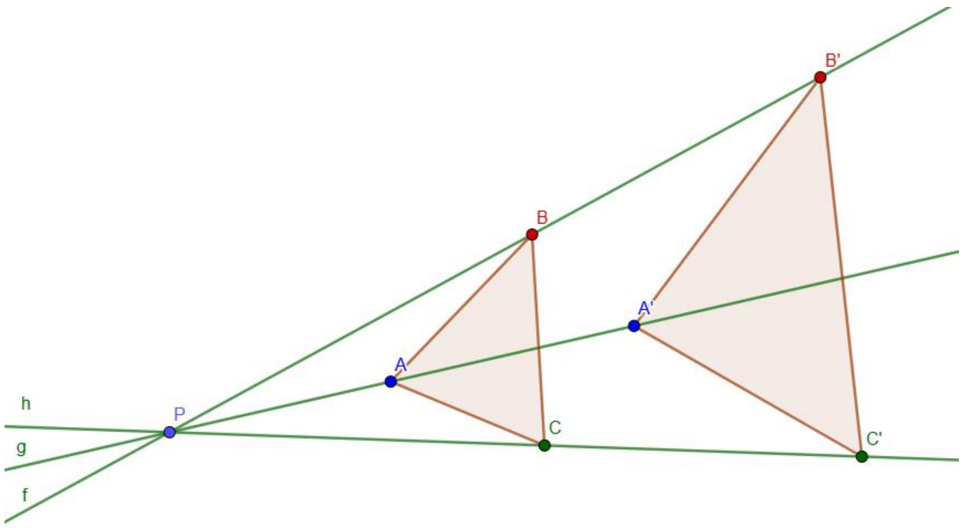
(圖 1)

2. 投影中心定義

是指把光由一點向外散射形成的投影，而那一點就是投影中心，如(圖 2)上的 P 點。

3. 投影射線定義

經由投影中心投射多邊形(ABC)表面上的各點反射出來的光線，投射到一個平面上，所構成的「像」(A’B’C’)，再把「像」與多邊形各對應的點和投影中心連線，就是投影射線，如(圖 2)上$\overleftrightarrow{PB}$、$\overleftrightarrow{PA}$、$\overleftrightarrow{PC}$。



(圖 2)

4. 交比的射影不變性(圖 3)

投影中心 P 引四條相交直線構成投影射線，分別與另外兩條直線交於 A,B,C,D 和 A',B',C',D'。

射線投影下，直線上被投影射線所分割的線段交比相等。

證明:

$S_{\Delta PAC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{CA}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\overline{PA}\cdot\overline{PC}\cdot\sin\angle APC$

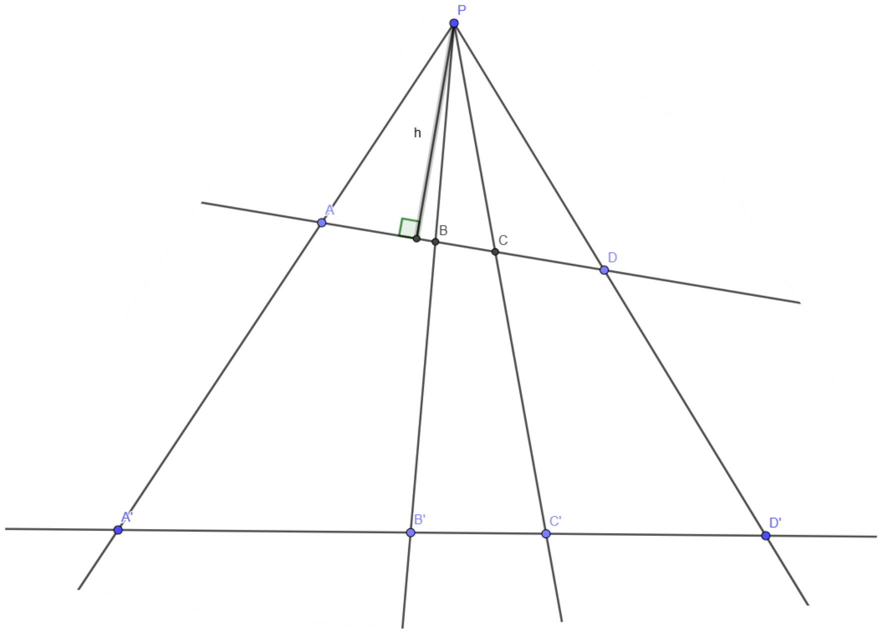
$\overline{CA}=\frac{1}{h}\cdot\overline{PC}\cdot\overline{PA}\cdot\sin\angle CPA$

同理:

$\overline{CB}=\frac{1}{h}\cdot\overline{PC}\cdot\overline{PB}\cdot\sin\angle CPB$

$\overline{DA}=\frac{1}{h}\cdot\overline{PD}\cdot\overline{PA}\cdot\sin\angle DPA$

$\overline{DB}=\frac{1}{h}\cdot\overline{PD}\cdot\overline{PB}\cdot\sin\angle DPB$



$$\frac{\frac{CA}{CB}}{\frac{DA}{DB}}$$

$$=\frac{CA}{CB}\cdot\frac{DB}{DA}$$

$$=\frac{PC\cdot PA\cdot\sin\angle CPA}{PC\cdot PB\cdot\sin\angle CPB}\cdot\frac{PD\cdot PB\cdot\sin\angle DPB}{PD\cdot PA\cdot\sin\angle DPA}$$

$$=\frac{\sin\angle CPA\cdot\sin\angle DPB}{\sin\angle CPB\cdot\sin\angle DPA}$$

(圖 3)

⇒線段交比只與投影中心和投影射線之間的角度有關，故交比相同。

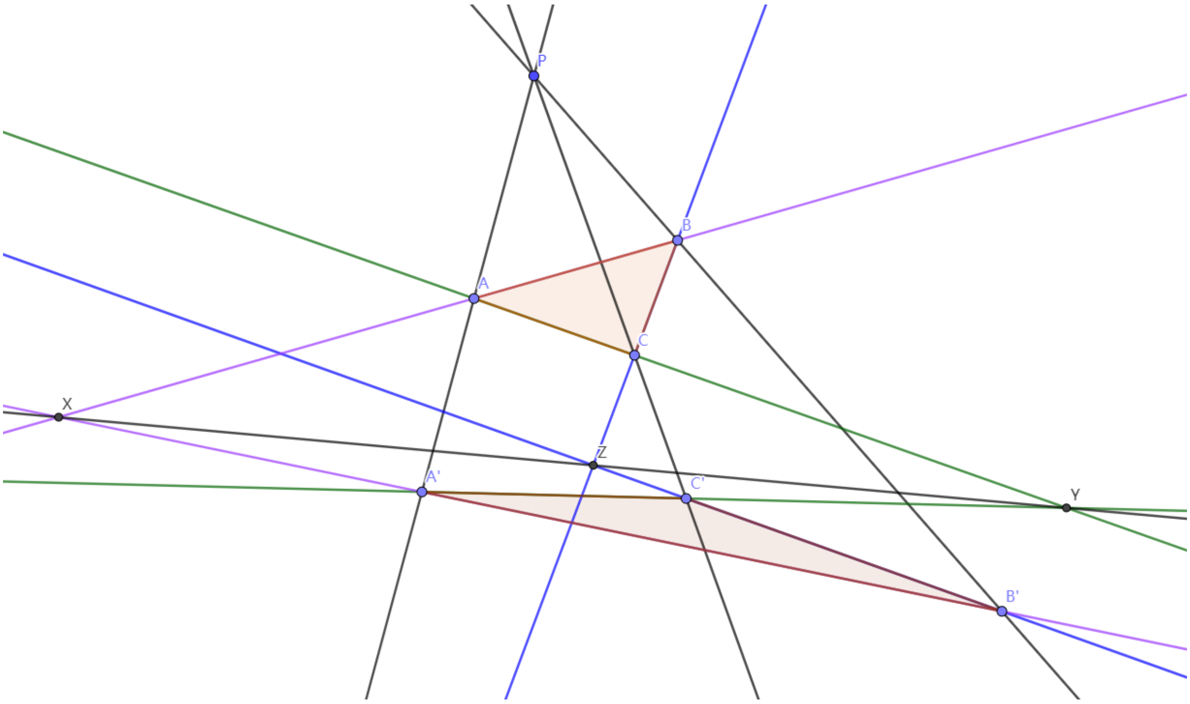
5. 笛沙格定理(圖 4-1~4-2)

已知:ΔABC 和ΔA’B’C’在以 P 點為投影中心的投影射線上

求作:ΔABC 和ΔA’B’C’延伸線交點共線

作圖過程:

1. 將對應線段延伸，$\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{A'B'}$交於 X，$\overleftrightarrow{AC}$與$\overleftrightarrow{A'C'}$交於 Y，$\overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{B'C'}$交於 Z 且 XYZ 三點共線。



(圖 4-1)

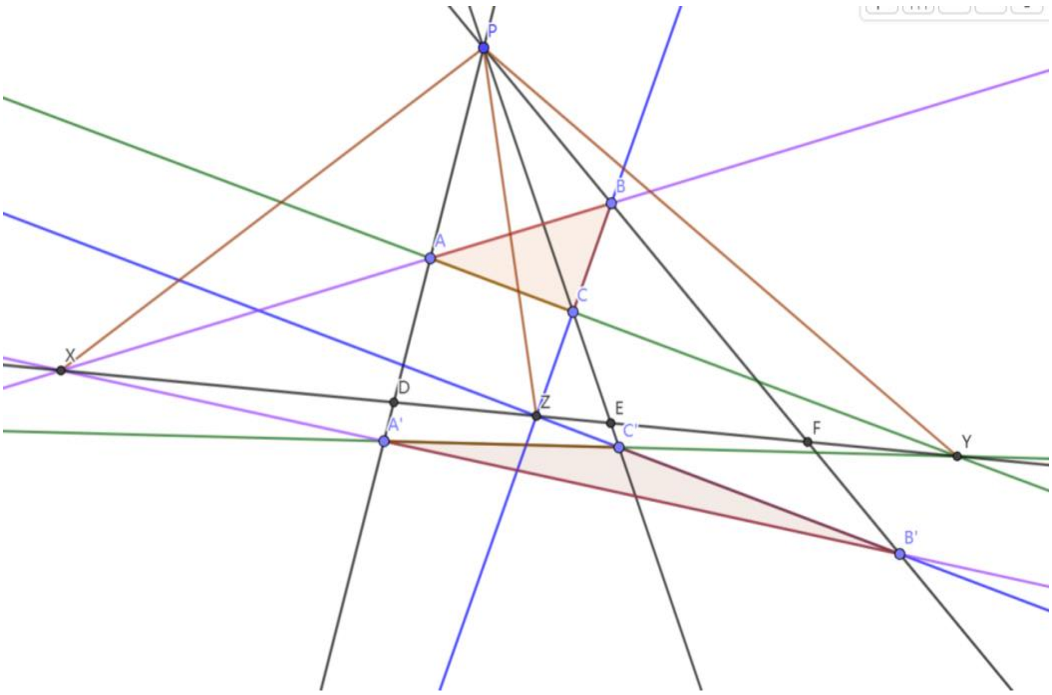
證明(圖 4-2):

已知:ΔABC 和ΔA’B’C’在以 P 點為投影中心的投影射線上和延伸線交點 X、 Y、Z。

求證:點 Z 在$\overleftrightarrow{XY}$上

1. 連接$\overleftrightarrow{XY}$、$\overrightarrow{XP}$、$\overrightarrow{YP}$、$\overrightarrow{ZP}$
2. 設$\overleftrightarrow{XY}$與$\overleftrightarrow{PA}$、$\overleftrightarrow{PB}$、$\overleftrightarrow{PC}$的交點為 D、F、E
3. 考慮從 X 點出發的射線$\overrightarrow{XP}$、$\overrightarrow{XA}$、$\overrightarrow{XD}$、$\overrightarrow{XA'}$，他們都與$\overleftrightarrow{PA}$、$\overleftrightarrow{PB}$相交，交點分別為 P、A、D、A’和 P、B、D、B’
4. 得到(PA; DA’)=(PB; DB’)
5. 考慮從 Y 點出發的射線$\overrightarrow{YP}$、$\overrightarrow{YC}$、$\overrightarrow{YF}$、$\overrightarrow{YC'}$，他們都與$\overleftrightarrow{PA}$、$\overleftrightarrow{PC}$相交，交點分別為 P、A、D、A’和 P、C、E、C’
6. 得到(PA; DA’)=(PC; EC’)
7. 由(4)和(6)可得(PB; DB’)=(PC; EC’)

因此(P、B、F、B’)和(P、C、E、C’)出自同一個投影中心 S(Z)，且 S(Z)的射線為$\overrightarrow{SP}$、$\overrightarrow{SCB}$、$\overrightarrow{SEF}$、$\overrightarrow{SC'B'}$，於是$\overleftrightarrow{CB}$、$\overleftrightarrow{EF}$、$\overleftrightarrow{C'B'}$交於一點 S(Z)，由於已知$\overleftrightarrow{CB}$和$\overleftrightarrow{C'B'}$只有一個交點，因此 S 和 Z 重合；且$\overleftrightarrow{EF}$必須經過點 Z，即點 Z 位於$\overleftrightarrow{XY}$上。



(圖 4-2)

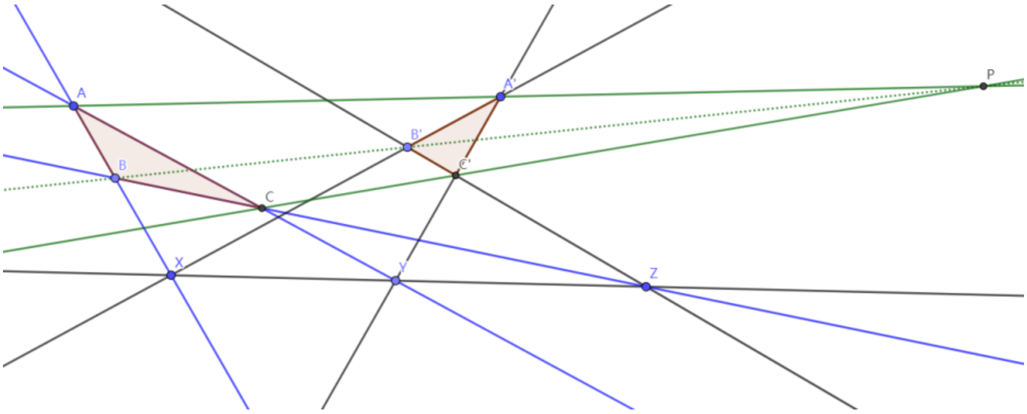
6. 笛沙格逆定理

已知:兩個任意ΔABC 和ΔA'B'C'，將對應線段延伸，$\overleftrightarrow{AB}$和$\overleftrightarrow{A'B'}$交於 X，$\overleftrightarrow{AC}$和$\overleftrightarrow{A'C'}$交於 Y，$\overleftrightarrow{BC}$和$\overleftrightarrow{B'C'}$交於 Z，則 XYZ 三點共線

求作:投影中心 P

作圖過程:

1. 連接$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$
2. $\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$交於點 P⇒P 點即為所求。(圖 5)



(圖 5)

證明(圖 6):

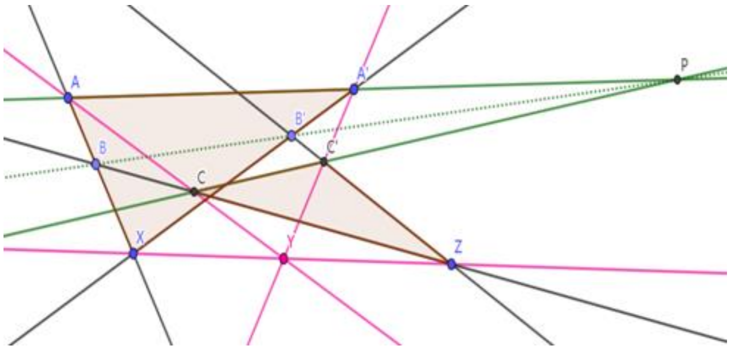
已知:兩個任意ΔABC 和ΔA'B'C'，將對應線段延伸，$\overleftrightarrow{AB}$和$\overleftrightarrow{A'B'}$交於 X，$\overleftrightarrow{AC}$和$\overleftrightarrow{A'C'}$交於 Y，$\overleftrightarrow{BC}$和$\overleftrightarrow{B'C'}$交於 Z，且 XYZ 三點共線

求證:$\overleftrightarrow{BB'}$通過點 P

作圖過程:

作ΔAA'Z 和ΔCC'X

1. $\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{A'C'}$、$\overleftrightarrow{XZ}$三線交於點 Y⇒Y 為投影中心
2. 延伸其對應邊，$\overleftrightarrow{AA'}$與$\overleftrightarrow{CC'}$交於 P，$\overleftrightarrow{AX}$與$\overleftrightarrow{CZ}$交於 B，$\overleftrightarrow{A'X}$與$\overleftrightarrow{C'Z}$交於 B'
3. 點 B、點 B'、點 P 共線。



(圖 6)

7. 相似轉換(圖 7)

已知:ΔA’B’C’和ΔABC，三條交於 P 點的投影射線皆通過ΔABC 的頂點。

求作:與ΔA’B’C’相似且頂點位於線上的ΔA’’B’’C’’。

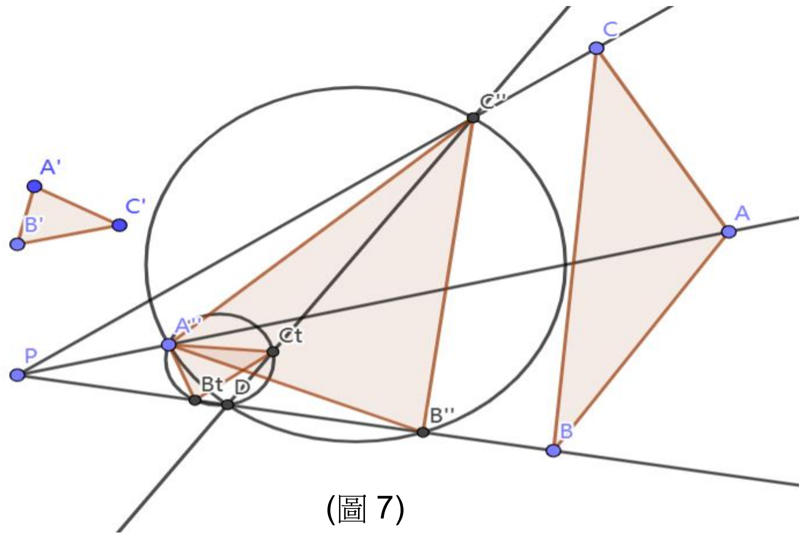
作圖過程:

1. ΔABC 和不在其邊上的任意點 P 畫出從 P 到各頂點的直線。
2. 在$\overrightarrow{PA}$上選擇合適點 A’’。
3. 以 A’’為圓心，$\overline{A'B'}$為半徑畫圓交$\overleftrightarrow{PB}$於 Bt
4. 以 A’’為圓心，$\overline{A'C'}$為半徑畫圓;以 Bt 為圓心，$\overline{B'C'}$為半徑畫圓，兩圓交$\overleftrightarrow{PB}$於 Bt
5. 作ΔA’’BtCt 外接圓交$\overrightarrow{PB}$於 D
6. 連接$\overleftrightarrow{DCt}$，這條線與$\overrightarrow{PC}$交於 C’’
7. 作ΔA’’C’’D 外接圓交$\overrightarrow{PB}$於 B’’
8. ΔA’’B’’C’’~ΔA’B’C’

求證:ΔA’’BtCt~ΔA’’B’’C’’

1. 連接$\overline{A''D}$
2. ∠A’’B’’C’’=∠A’’DC’’=∠A’’BtCt (同弧形上的圓周角)
3. ∠C’’A’’B’’=∠C’’DB’’(同弧形上的圓周角)
4. ∠A’’DC’’=∠A’’B’’C’’(同弧形上的圓周角)
5. ∠A’’DBt=∠A’’C’’B’’，又∠A’’CtBt=∠A’’DBt(同弧形上的圓周角)

∴ ∠A’’CtBt=∠A’’C’’B’’⇒得證ΔA’’BtCt~ΔA’’B’’C’’(AA)



(圖 7)

伍、研究過程與結果

(一)、兩個任意三角形找出投影中心

已知:ΔABC 和ΔA’B’C’，任意直線且點 X 點 Y 點 Z 點在任意直線上

求作:ΔABC 和ΔA’B’C’的投影中心

作圖過程:

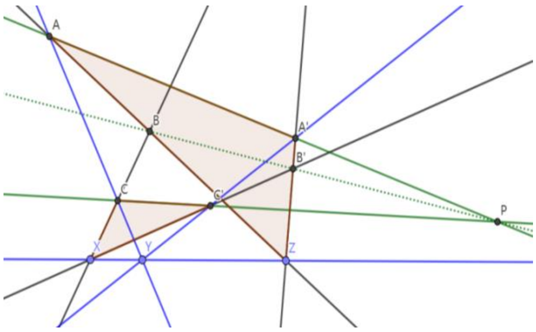
任意各畫出兩條直線並過點 X 點 Y 和點 Z 形成ΔABC 和ΔA’B’C’，$\overleftrightarrow{AA'}$和$\overleftrightarrow{CC'}$交於點 P。(圖 8)

證明(圖 9):

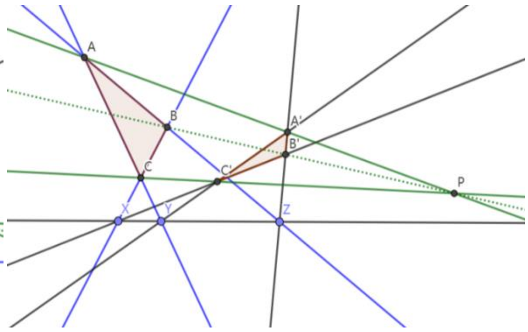
已知:AA’Z 和ΔCC’X 可以 Y 點為投影中心

求證:B、B’和 P 在同一條直線上

作ΔAA’Z 和ΔCC’X，延伸其對應邊，$\overleftrightarrow{AA'}$與$\overleftrightarrow{CC'}$交於 P，$\overleftrightarrow{AZ}$與$\overleftrightarrow{CX}$交於 B， $\overleftrightarrow{A'Z}$與$\overleftrightarrow{C'X}$交於 B’，且兩三角形的投影中心為 Y⇒得證。



(圖 8)



(圖 9)

結論一: 透過任意直線和任意位於直線上的三個點所作出的三角形，延伸其對應邊一定能找出投影中心。

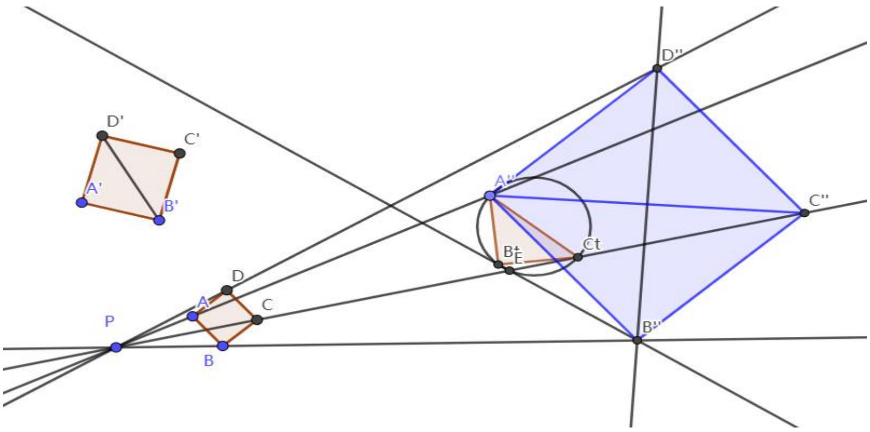
(二)、給定兩任意正方形 ABCD 和 A'B'C'D'的投影中心

已知:正方形 ABCD 位於以 P 為投影中心的投影射線上，正方形 A'B'C'D' 皆不在射線上。

求作:正方形 A'B'C'D' 位於以 P 為投影中心的投影射線上。

作圖過程:

1. 作 A'B'C'D'之對角線$\overline{D'B'}$
2. $\overrightarrow{PA}$上適當取一點 A''，以 A''為圓心，$\overline{D'B'}$為半徑交$\overrightarrow{PC}$於 Ct
3. 以 A''為圓心，$\overline{D'A'}$為半徑畫圓交圓 Ct 於 Bt
4. 作ΔA''BtCt 的外接圓交$\overrightarrow{PC}$於 E
5. 作$\overleftrightarrow{EBt}$交$\overleftrightarrow{PB}$於 B''
6. 作ΔA''EB''外接圓交$\overleftrightarrow{PC}$於 C''
7. 連接 A''B''C''得一等腰直角三角形 (ΔD'A'B'≅ΔA''BtCt~ΔA''B''C'')
8. 作$\overline{A''C''}$之中垂線交$\overleftrightarrow{PD}$於 D''
9. 連接 A''B''C''D''得一正方形且四點皆位於投影射線上，且正 A''B''C''D''為正方形 ABCD 的放大或縮小圖。 (圖 10)



(圖 10)

結論二: 兩正方形 S1 及 S2，可透過相似轉換將正方形 S1(S2)轉至投影射線上形成投影，且放大或縮小會和 S2(S1)重疊。

由於上述所創造出來的兩個正方形對應邊交於無窮遠處，無法直觀的看出共線的情況，於是我們打算透過任意四邊形，來觀察共線的情況。

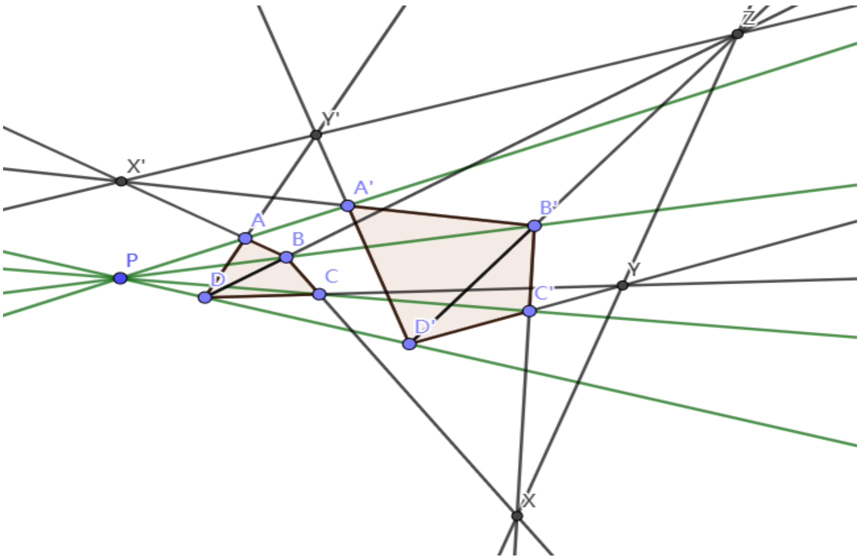
(三)、任意四邊形對應邊延伸的交點情況

已知:兩任意四邊形 ABCD、A'B'C'D'皆位於以 P 為投影中心的投影射線上

求作:四邊形對應邊延長且交點共線之情形

作圖過程:

1. 畫出兩個四邊形的對角線$\overline{BD}$和$\overline{B'D'}$
2. 延伸ΔBCD 和ΔB'C'D'其對應邊，$\overrightarrow{DB}$和$\overrightarrow{D'B'}$交於點 Z，$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{B'C'}$交於點 X，$\overrightarrow{DC}$和$\overrightarrow{D'C'}$交於點 Y，則 X，Y，Z 三點共線
3. ΔABD 和ΔA'B'D'，延伸對應邊，$\overrightarrow{BA}$和$\overrightarrow{B'A'}$交於點 X'，$\overrightarrow{DA}$和$\overrightarrow{D'A'}$交於點 Y'，$\overrightarrow{DB}$和$\overrightarrow{D'B'}$交於點 Z，點 X'點 Y'點 Z 三點共線
4. 因 X，Y，Z 三點共線⇒兩組三角形的延伸線恰交於點 Z。(圖 11)



(圖 11)

透過(三)可知將四邊形切割成兩塊三角形再分別延伸其對應邊會形成兩條直線並交於三角形延伸後的某一點，之後我們考慮若兩條直線重合的狀況。

結論三: 任意四邊形可拆解為三角形，三角形延伸線與對應邊形成的兩條直線交於同一點。

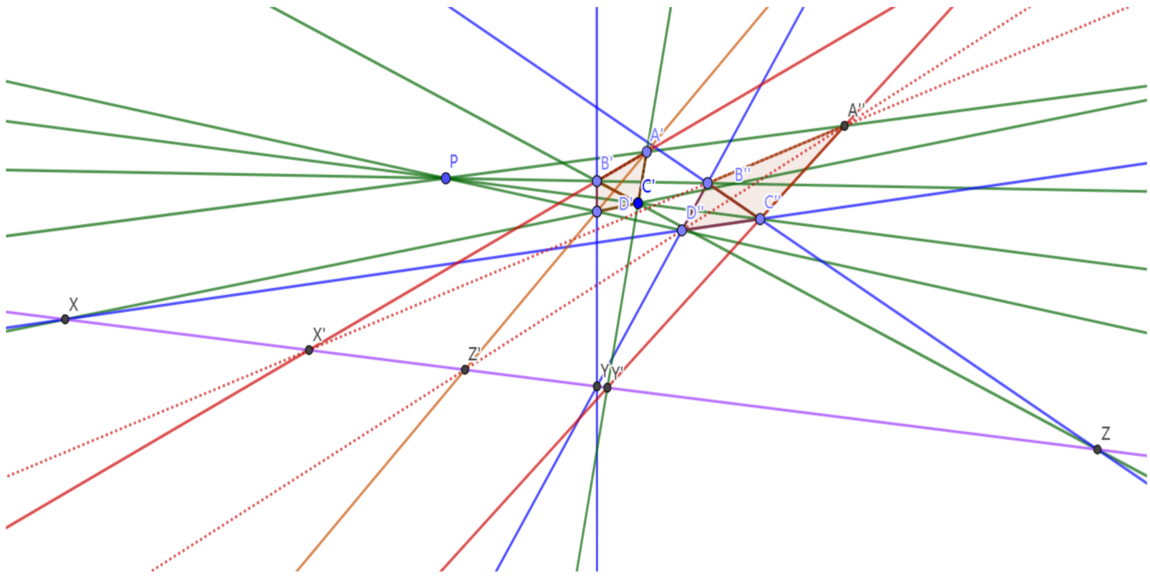
(四)、四邊形延伸後兩線重和的情況

已知:任意兩ΔB'C'D'和ΔB''C''D''在以 P 為投影中心的投影射線上

求作: 兩線重合所構出的四邊形

作圖過程:

1. 延伸三角形對應邊，$\overleftrightarrow{C'D'}$交$\overleftrightarrow{C''D''}$於 X，$\overleftrightarrow{B'D'}$交$\overleftrightarrow{B''D''}$於 Y，$\overleftrightarrow{B'C'}$交$\overleftrightarrow{B''C''}$於 Z
2. 連接$\overleftrightarrow{XYZ}$
3. 任意劃出一條經點 P 的投影射線$\overleftrightarrow{PA'}$
4. 在投影射線上任意找一點 A'
5. $\overleftrightarrow{A'C'}$交$\overleftrightarrow{XZ}$於 Y'
6. $\overleftrightarrow{Y'C''}$交$\overleftrightarrow{PA'}$於 A''
7. $\overleftrightarrow{A'B'}$交$\overleftrightarrow{XZ}$於 X'
8. $\overleftrightarrow{X'B''}$恰交$\overleftrightarrow{PA'}$於 A''
9. 延伸$\overline{A'D'}$和$\overline{A''D''}$交$\overleftrightarrow{XZ}$於 Z'。(圖 12)



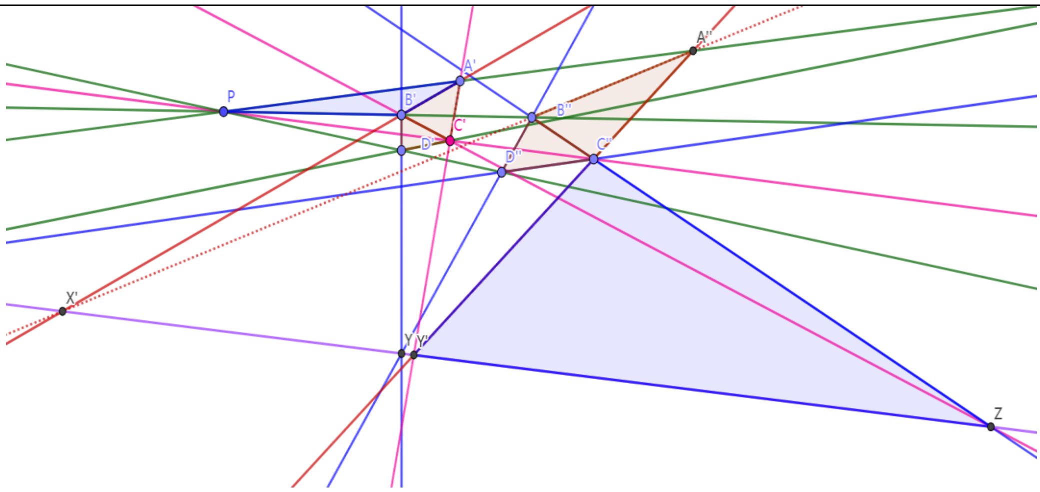
(圖 12)

證明(一):

已知:ΔC’’Y’Z 和ΔA’B’P 以 C 點為投影中心

求證:點 X’點 B’’點 A’’三點共線

1. 延伸兩三角形對應邊，$\overleftrightarrow{PA'}$與$\overleftrightarrow{Y'C''}$交於 A''，$\overleftrightarrow{PB'}$與$\overleftrightarrow{C''Z}$交於 B’’，$\overleftrightarrow{A'B'}$與$\overleftrightarrow{Y'Z}$交於 X’
2. 根據笛沙格定理可知點 X’點 B’’點 A’’三點共線。 (圖 13)



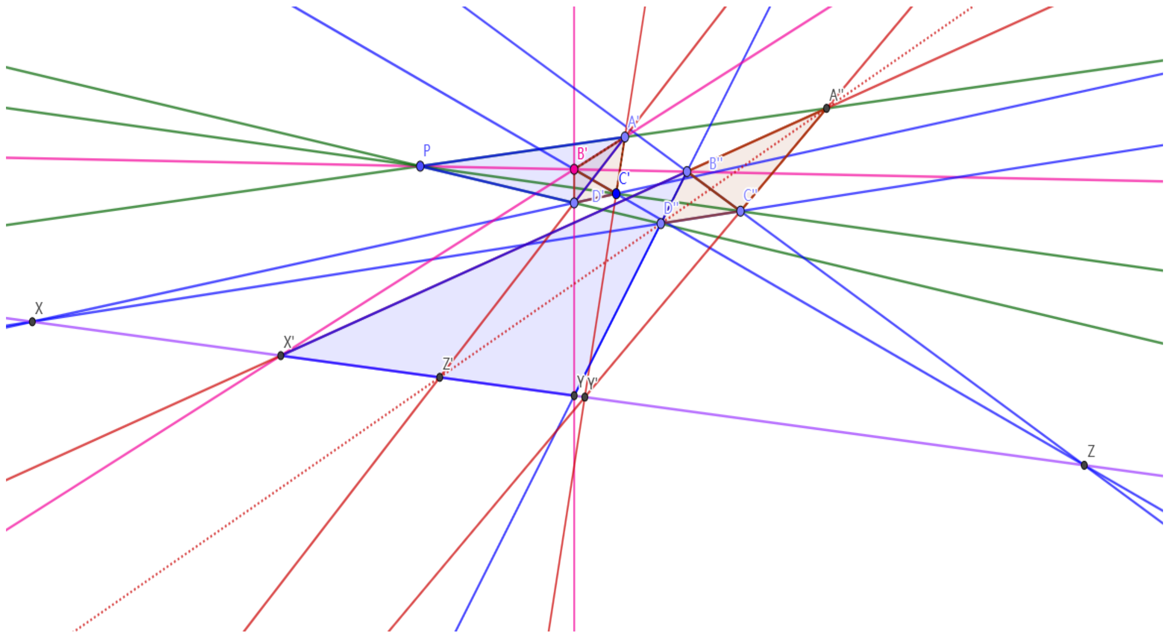
(圖 13)

證明(二):

已知:ΔA’D’P 和ΔX’B’’Y 以 C 點為投影中心

求證:點 Z’、點 D’’、點 A’’三點共線

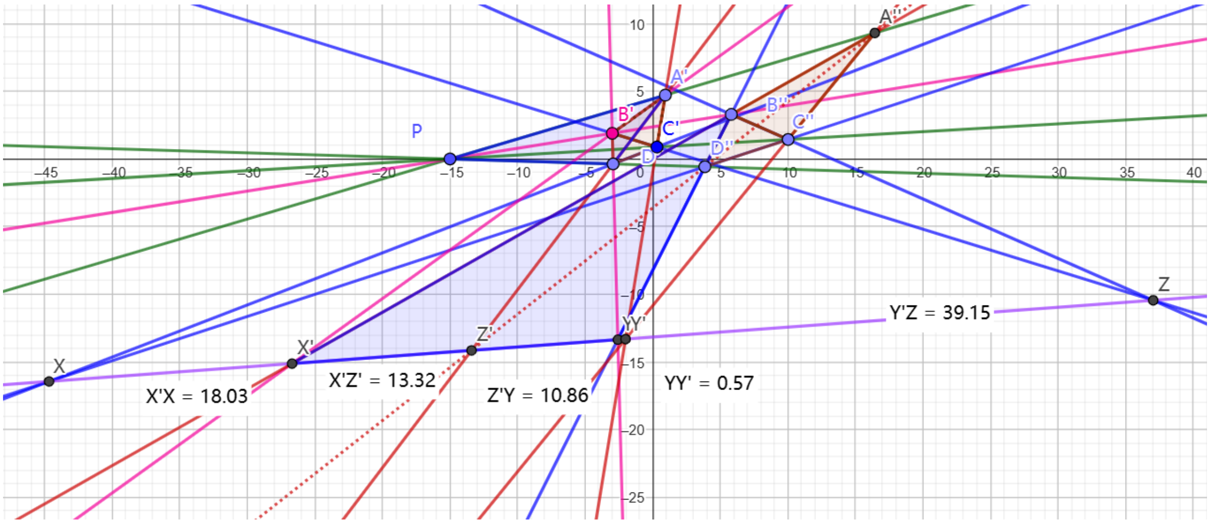
1. 延伸兩三角形對應邊，$\overleftrightarrow{PA'}$與$\overleftrightarrow{X'B''}$交於 A''，$\overleftrightarrow{PD'}$與$\overleftrightarrow{B''Y}$交於 B’’，$\overleftrightarrow{A'D'}$與$\overleftrightarrow{X'Y}$交於 Z’
2. 根據笛沙格定理可知點 Z’點 D’’點 A’’三點共線。 (圖 14)



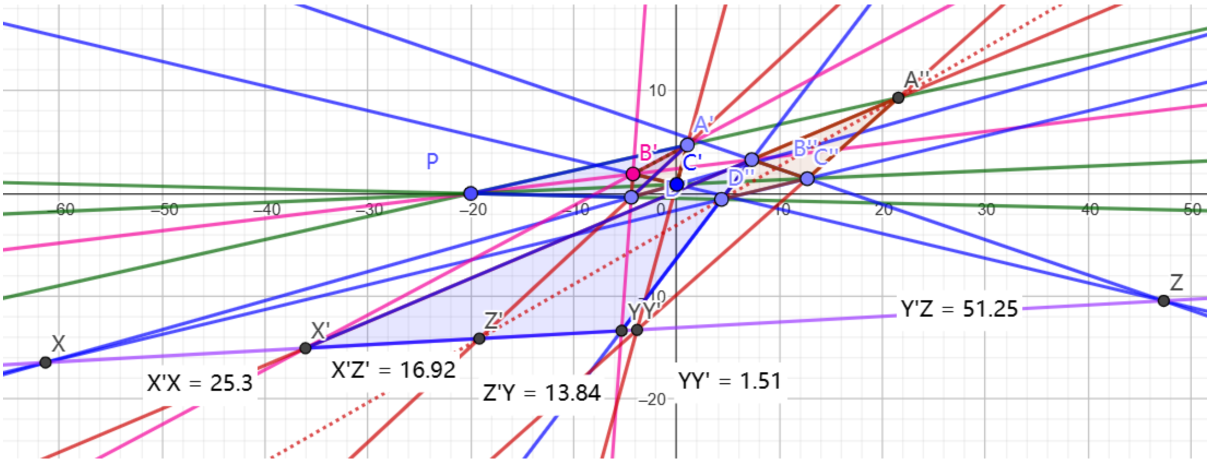
(圖 14)

當六個點（X, X', Z', Y, Y', Z）交於一線時，我們發現了一個特性。若點 P 往左移 m 單位時，線段 X'X （X'Z', Z'Y, YY', Y'Z）之長度增加 n 單位，則點 P 往左移 t∗m 單位時・線段 X'X（X'Z', Z'Y, YY', Y'Z）之長度增加 t∗n 單位，其中 t 為實數。下方表格為實際範例(圖 15-1~4)之整理結果，其中$\Delta\overline{X'X}$表示(t+1)·n– t·n。

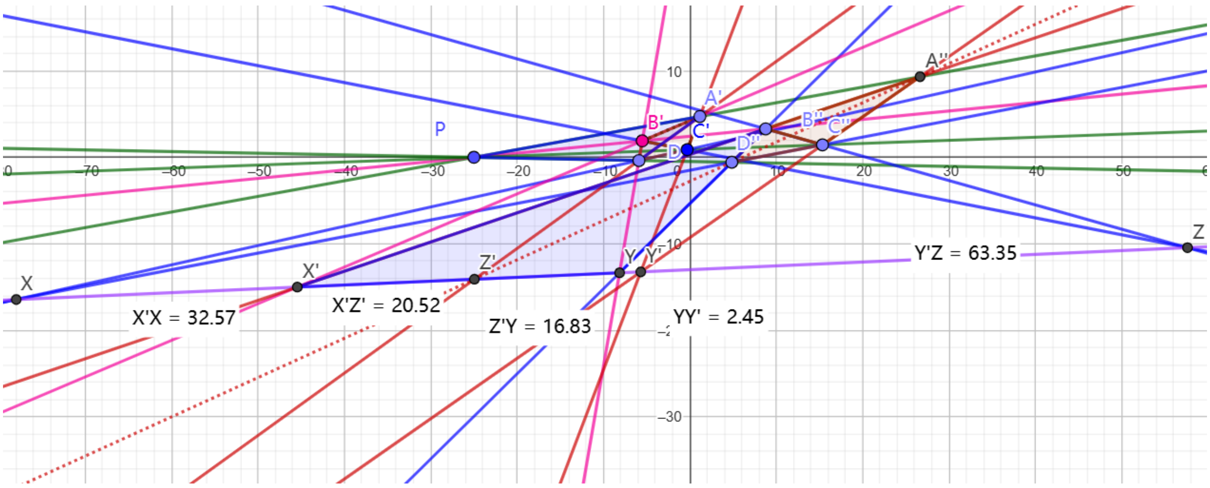
P 點位置	**(-15,0)**	**(-20,0)**	**(-25,0)**	**(-30,0)**
$\overline{X'X}$	18.03	25.3	32.57	39.84
$\Delta\overline{X'X}$	--	7.27	7.27	7.27
$\overline{X'Z'}$	13.32	16.92	20.52	24.12
$\Delta\overline{X'Z'}$	--	3.6	3.6	3.6
$\overline{Z'Y}$	10.86	13.84	16.83	19.81
$\Delta\overline{Z'Y'}$	--	2.98	2.98	2.98
$\overline{YY'}$	0.57	1.51	2.45	3.4
$\Delta\overline{YY'}$	--	0.94	0.94	<u>0.95</u>
$\overline{Y'Z}$	39.15	51.25	63.35	75.46
$\Delta\overline{Y'Z}$	--	12.1	12.1	<u>12.11</u>



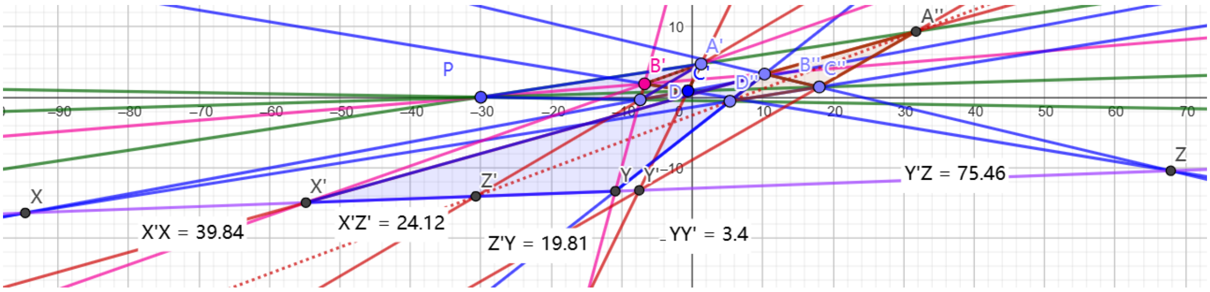
(圖 15-1)



(圖 15-2)



(圖 15-3)

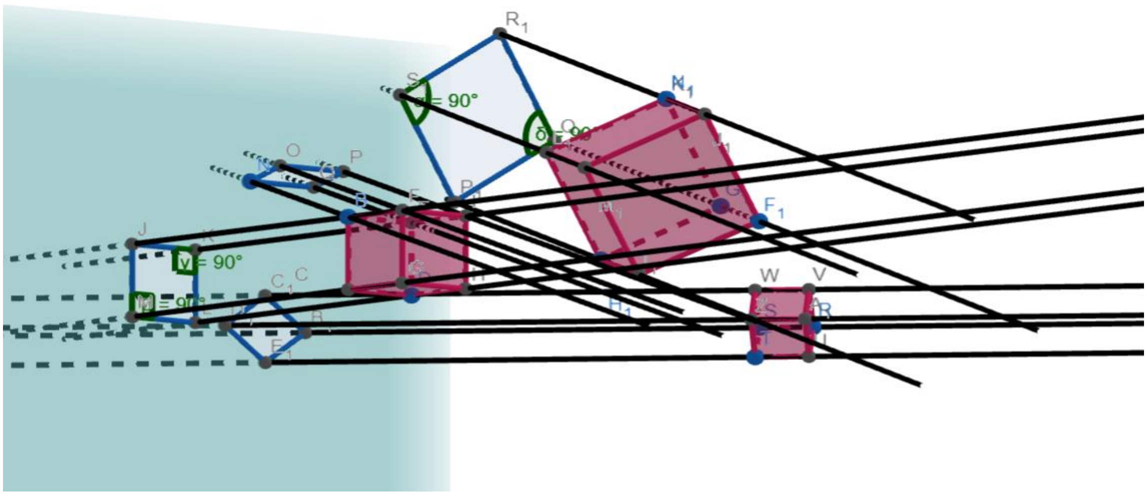


(圖 15-4)

結論四:當六個點共線時，若點 P 往左移 m 單位，則兩點之間的長度增加 n 單位。

(五)、由正方形投影至平行線上可能形成的圖形探討

首先，我們先討論正方形理論上能投影在平行線上的圖形。(圖 16)



(圖 16)

我們發現透過正方體在平面上能夠投影出正方形、長方形、菱形、平行四邊形，接下來討論作圖過程及限制。

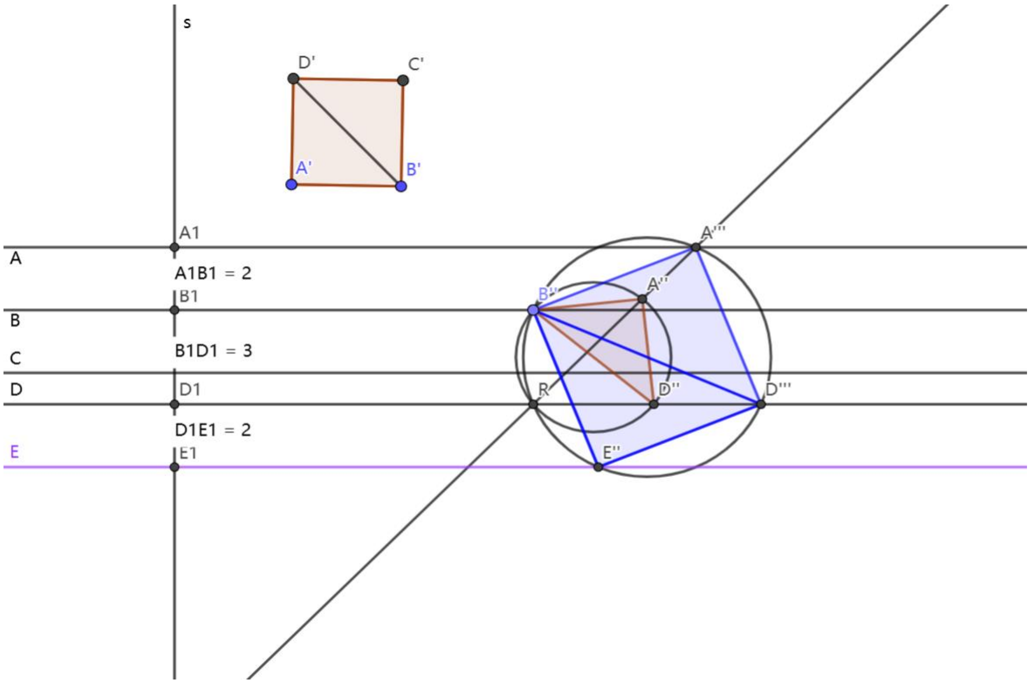
一、正方形

已知:正方形 A'B'C'D'，和四條不通過其頂點的平行線 A、B、C、D

求作:正方形 A'''B''C''D'''且頂點皆在平行線上

作圖過程:

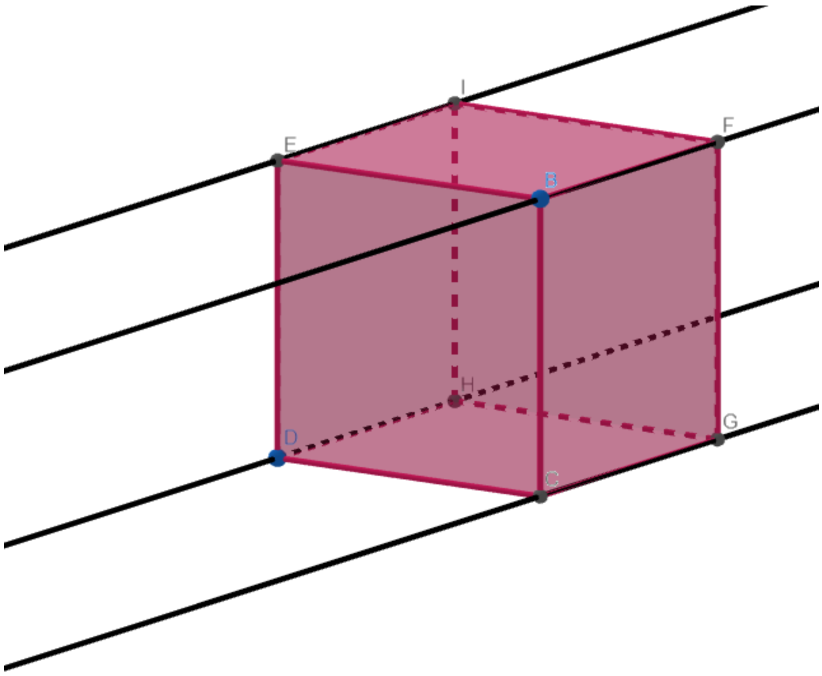
1. 作正方形 A'B'C'D'的對角線$\overline{B'D'}$
2. 平行線 B 上適當取一點 B''，以 B''為圓心，$\overline{A'B'}$為半徑畫圓交平行線 D 於 D''
3. 以 B''和 D''為圓心，$\overline{A'B'}$為半徑畫圓兩圓相交於 A''
4. 作ΔA''B''D''的外接圓並交平行線 D 於 R
5. $\overleftrightarrow{RA''}$交平行線 A 於 A'''
6. 作ΔA'''B''R 外接圓交平行線 D 於 D'''
7. 連接ΔA'''B''D'''
8. 以$\overline{B''D'''}$為對稱軸畫出$\overline{A'''B''}$和$\overline{A'''D'''}$之對稱線交於 E''點
9. 作平行線 E 並通過點 E''
10. 連接 A'''B''E''D'''且為正方形。(圖 17-1)



(圖 17-1)

我們發現四條投影線之間有比例關係，由上而下第一條和第二條的垂直距離與第三條和第四條的垂直距離相等。

推測如下:

已知:正方體和四條經過其頂點的線且四條線互相平行 原因:將正方形變成三維後，可以發現四條與其平行的投影射線以三維的角度看時，他們與正方形的高垂直，又因正方形邊長等長，故垂直距離相等。也就是說，經過旋轉投射出不同形狀後垂直距離依舊相同。 (圖 17-2)
 (圖 17-2)

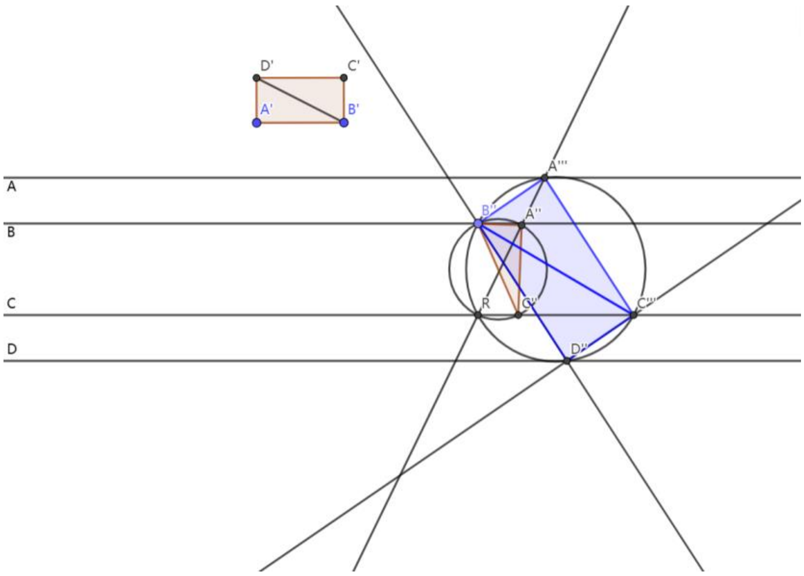
二、長方形

已知:長方形 A'B'C'D'，和四條不通過其頂點的平行線 A、B、C、D，且平行線 A 和 B 的垂直距離與平行線 C 和 D 的垂直距離相等

求作:長方形 A'''B''C'''D''且頂點皆在平行線上

作圖過程:

1. 作長方形 A'B'C'D'的對角線$\overline{B'D'}$
2. 平行線 B 上適當取一點 B''，以 B''為圓心，$\overline{B'D'}$為半徑畫圓交平行線 C 於 C''
3. 以 B''為圓心，$\overline{A'D'}$為半徑畫圓；以 C''為圓心，$\overline{A'B'}$為半徑畫圓，兩圓相交於 A''
4. 作∆A''B''C''外接圓並交平行線 C 於 R
5. $\overleftrightarrow{RA''}$交平行線 A 於 A'''
6. 作∆A'''B''R 外接圓交平行線 C 於 C'''
7. 連接∆A'''B''C'''
8. 作垂直於$\overline{A'''B''}$的線並通過 B''
9. 作垂直於$\overline{A'''C'''}$的線並通過 C'''
10. (8)、(9)兩線交平行線 D 於 D''
11. 連接 A'''B''C'''D''且為長方形。(圖 18)



(圖 18)

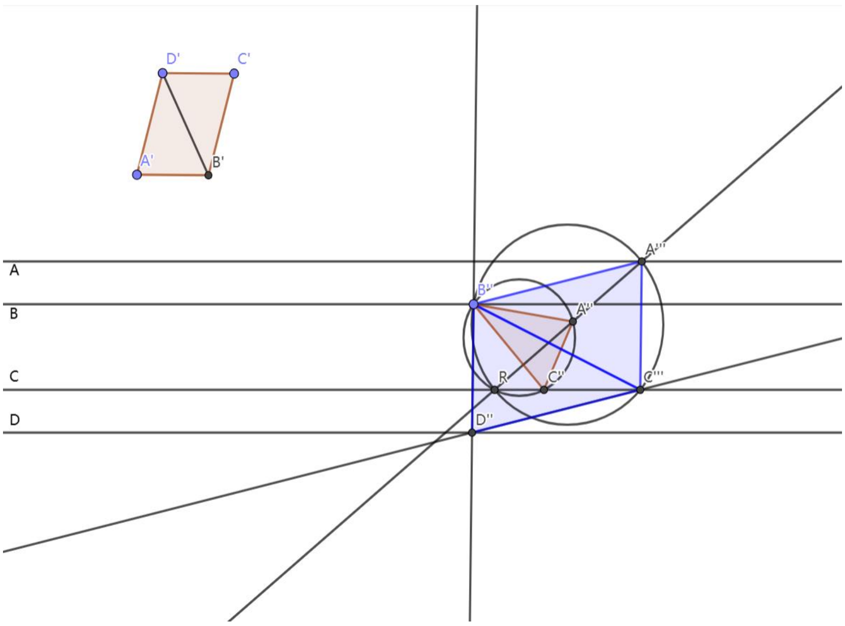
三、平行四邊形

已知:平行四邊形 A’B’C’D’，和四條不在其邊上的平行線 A、B、C、D，且平行線 A 和 B 的垂直距離與平行線 C 和 D 的垂直距離相等

求作:平行四邊形 A’’’B’’C’’’D’’且頂點皆在平行線上

作圖過程:

1. 作平行四邊形 A’B’C’D’的對角線$\overline{B'D'}$
2. 平行線 B 上適當取一點 B’’，以 B’’為圓心，$\overline{B'D'}$為半徑畫圓交平行線 C 於 C’’
3. 以 B’’為圓心，$\overline{A'D'}$為半徑畫圓；以 C’’為圓心，$\overline{A'B'}$為半徑畫圓，兩圓相交於 A’’
4. 作ΔA’’B’’C’’外接圓並交平行線 C 於 R
5. $\overleftrightarrow{RA''}$交平行線 A 於 A’’’
6. 作ΔA’’’B’’R 外接圓交平行線 C 於 C’’’
7. 連接ΔA’’’B’’C’’’
8. 作平行於$\overline{A'''B''}$的線並通過 C’’’
9. 作平行於$\overline{A'''C'''}$的線並通過 B’’’
10. 連接 A’’’B’’C’’’D’’且為平行四邊形。(圖 19)



(圖 19)

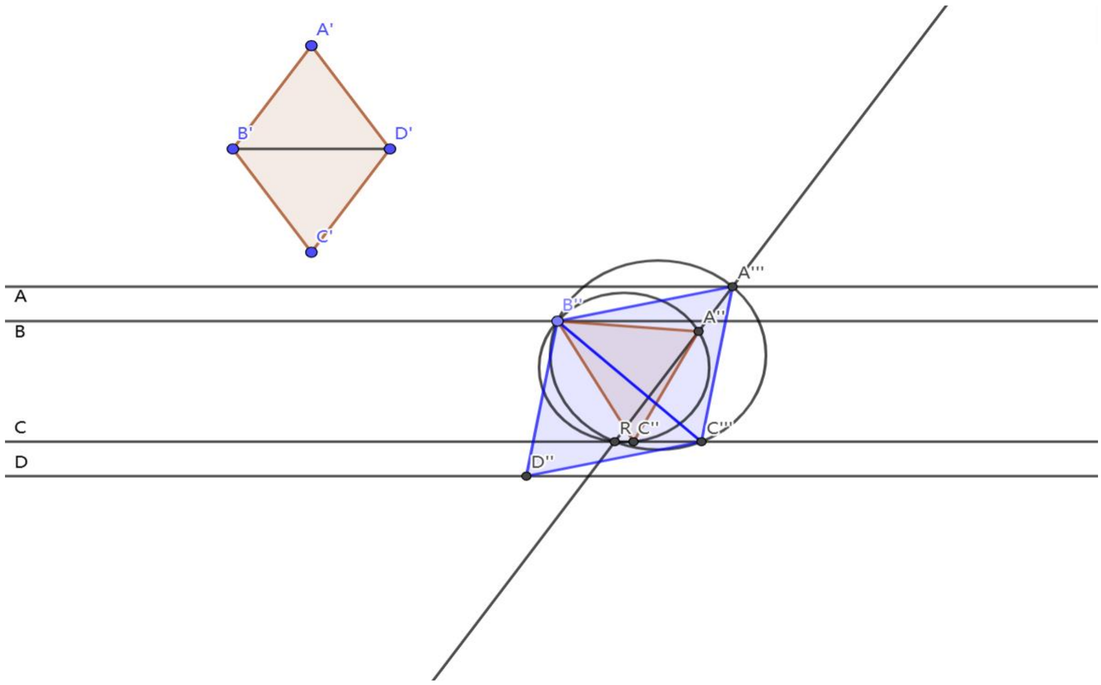
四、菱形

已知:菱形 A'B'C'D'，和四條不在其邊上的平行線 A、B、C、D，且平行線 A 和 B 的垂直距離與平行線 C 和 D 的垂直距離相等

求作:菱形 A'''B''C'''D''且頂點皆在平行線上

作圖過程:

1. 作菱形 A'B'C'D'的對角線$\overline{B'D'}$
2. 平行線 B 上適當取一點 B''，以 B''為圓心，$\overline{B'D'}$為半徑畫圓交平行線 C 於 C''
3. 以 B''為圓心，$\overline{A'D'}$為半徑畫圓； 以 C''為圓心，$\overline{A'B'}$為半徑畫圓，兩圓相交於 A''
4. 作ΔA''B''C''外接圓並交平行線 C 於 R
5. $\overleftrightarrow{RA''}$交平行線 A 於 A'''
6. 作ΔA'''B''R 外接圓交平行線 C 於 C'''
7. 連接ΔA'''B''C'''
8. 以 B''D'''為對稱軸畫出 A'''的對稱點 D''
9. 連接 A'''B''C'''D''且為菱形。(圖 20)

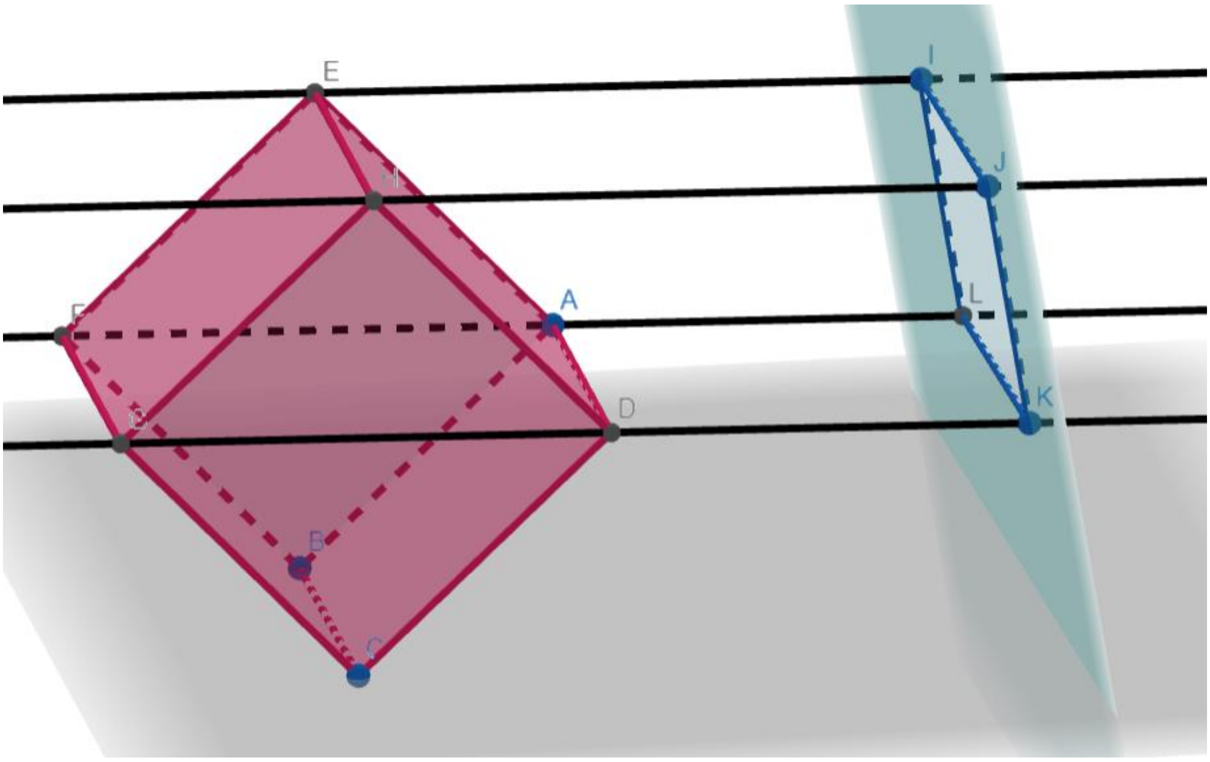


(圖 20)

由(五)，可發現所有圖形皆有兩組平行邊，原因如下:

已知:正方體、四條經過其頂點的平行線和任意一個面

由(圖 21)可知不管正方體如何旋轉，投影的面無論是否垂直，四條線所組成的圖形皆有兩組平行，我們推論在投影平面上形成圖形的特性與立體圖形有關，如果被投影的立體圖形有兩組平行邊，那麼投影平面上的圖形也會有兩組平行邊，但角度不一定，角度會被投影的立體圖形旋轉角度和投影平面的角度受影響。



(圖 21)

結論五: 投影平面上形成圖形的特性與立體圖形有關，但角度會被被投影的立體圖形旋轉角度和投影平面的角度受影響。

(六)、平行投影上角度與邊長比例的關係

一、正方形

已知:有四條平行線和頂點皆在線上的正方形，和兩條垂直於平行線的直線，且通過點 B 和點 C。(圖 22)

求作:角度與邊長($\overline{FC}$: $\overline{CG}$)比例的關係

設∠EBA= θ

∵ ∠CAF= ∠BAF−90° =90° − θ −90° = θ

∠ACF=180° − ∠CAF−90° =90° − θ

∠CDG=180° − ∠BDH−90° =180° − (180° − ∠HBD−90°) −90°

=180° − 〔180° − (180° − ∠EBA−90°) −90°〕 −90° =90° − ∠EBA=90° − θ

∠DCG=180° − ∠CDG-90° =90° − (90° − θ) = θ

$\overline{AC} = \overline{CD}$(正方形)

∴ΔAFC≅ΔCGD(ASA)

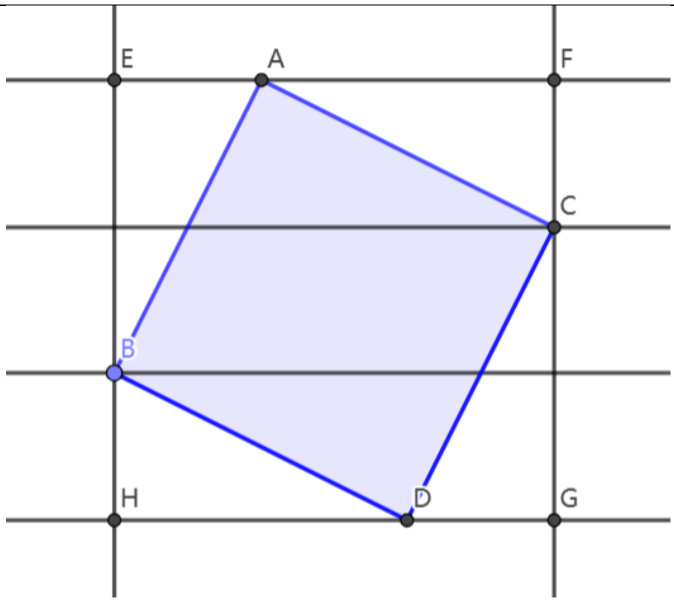
由此可得

∵ΔAFC≅ΔCGD∴ $\overline{AF} = \overline{CG}$

$\overline{FC}$：$\overline{CG}$ = $\overline{FC}$：$\overline{AF}$

∠CAF=θ、∠ACF=90° − θ

所求:$\frac{\overline{FC}}{\overline{CG}} = \frac{\sin\theta}{\sin(90°-\theta)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$。



(圖 22)

二、長方形

已知:有四條平行線和頂點皆在線上的長方形，和兩條垂直於平行線的直線，且通過點 B 和點 C。(圖 23)

求作:角度與邊長($\overline{FC}:\overline{CG}$)比例的關係

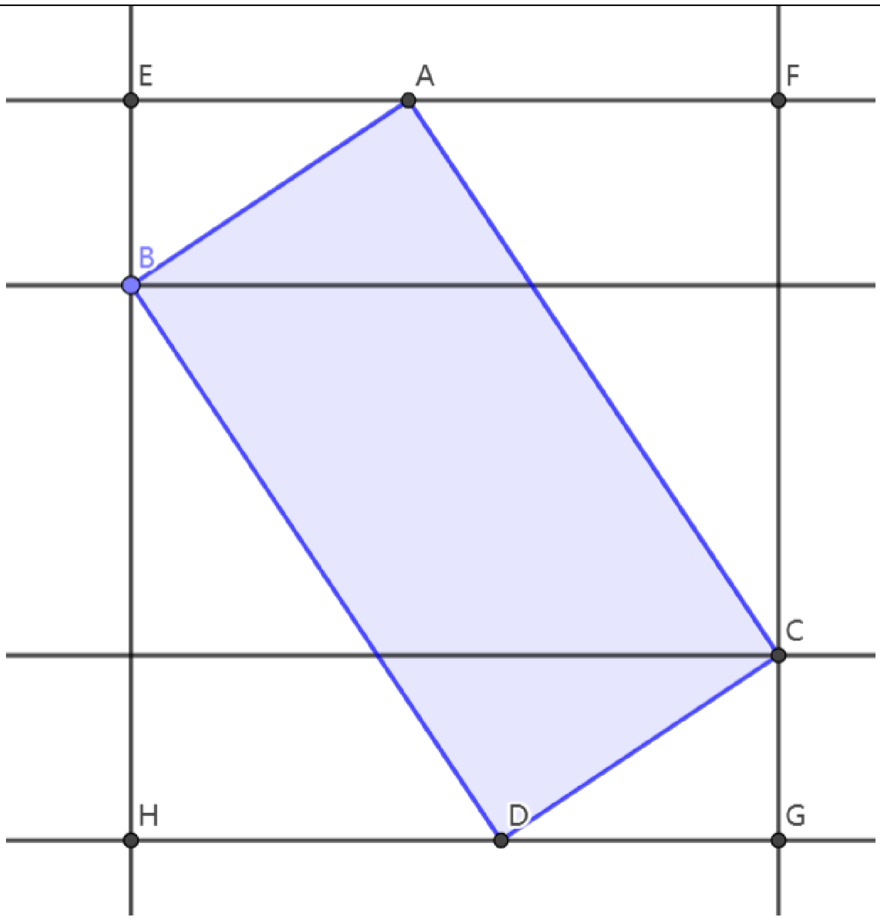
設$\angle EBA=\theta$、$\overline{AC}=X$、$\overline{CD}=Y$

$\angle CAF=\angle BAF-90^\circ=90^\circ+\theta-90^\circ=\theta$

$\angle CDG=180^\circ-\angle BDH-90^\circ=180^\circ-(180^\circ-\angle HBD-90^\circ)-90^\circ$

$=180^\circ-〔180^\circ-(180^\circ-\angle EBA-90^\circ)-90^\circ〕-90^\circ=90^\circ-\angle EBA=90^\circ-\theta$

所求:$\dfrac{\overline{FC}}{\overline{CG}}=\dfrac{X\sin\theta}{Y\sin(90^\circ-\theta)}=\dfrac{X\sin\theta}{Y\cos\theta}=\dfrac{X}{Y}\cdot\tan\theta$。



(圖 23)

三、平行四邊形

已知:有四條平行線和頂點皆在線上的平行四邊形，和三條垂直於平行線的直線，且通過點 A、點 C 和點 D。(圖 24)

求作:角度與邊長($\overline{AK}$: $\overline{CM}$)比例的關係

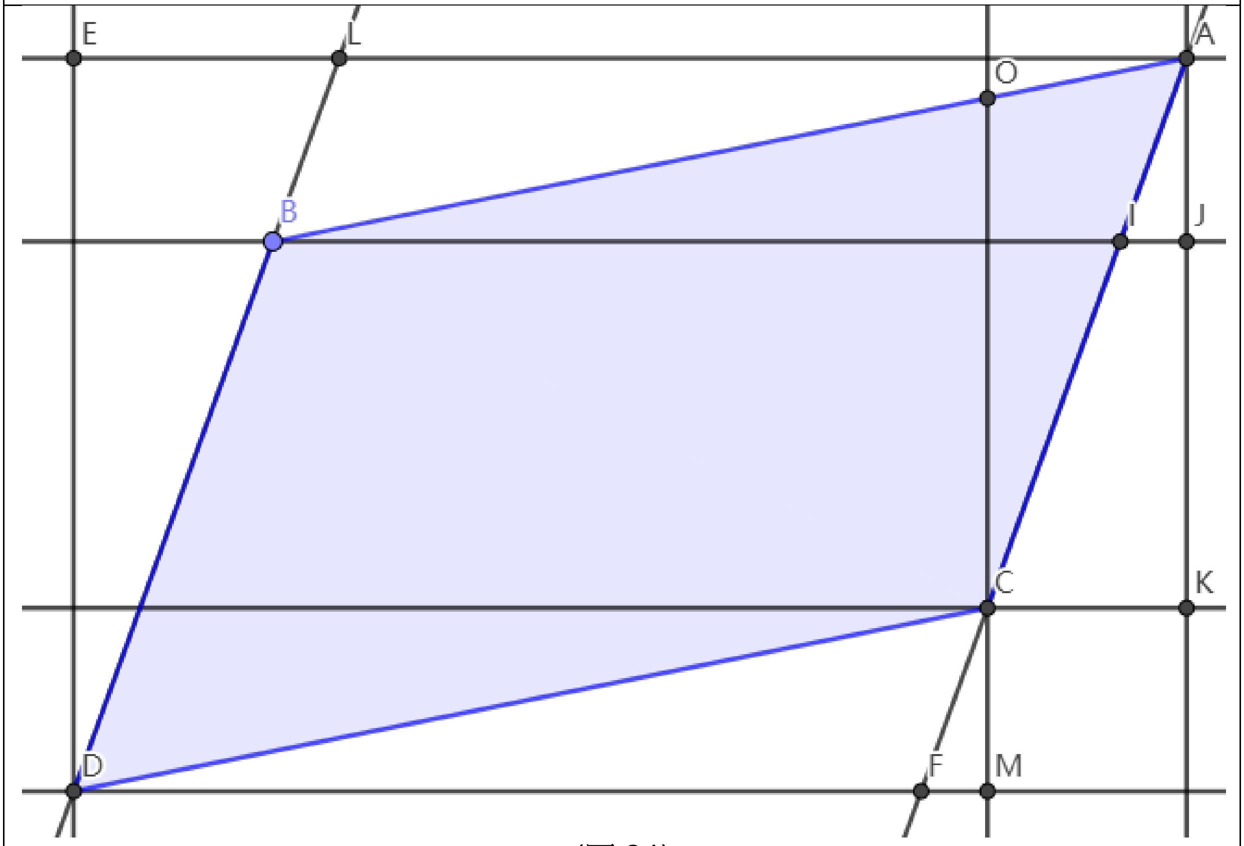
設$\overline{DC}$ =X，$\overline{AC}$ =Y，∠IAJ=φ_1，∠EAO=φ_2

∠ACK=90° $-\varphi_1$，$\sin(90° - \varphi_1) = \frac{X}{\overline{AK}}$ ，$\overline{AK} = \frac{X}{\sin(90°-\varphi 1)}$

延伸$\overline{DB}$和$\overline{AC}$，使ΔBLA≅ΔCFD(SSS)

∴∠CDM=φ_2，sinφ_2= $\frac{Y}{\overline{CM}}$ ，$\overline{CM} = \frac{Y}{\sin\varphi 2}$

所求:$\frac{\overline{AK}}{\overline{CM}} = \frac{\frac{X}{\sin(90°-\varphi 1)}}{\frac{Y}{\sin\varphi 2}} = \frac{X\sin\varphi 2}{Y\sin(90°-\varphi 1)}$



(圖 24)

四、菱形

已知:有四條平行線和頂點皆在線上的菱形，和兩條垂直於平行線的直線，且通過點 A 和點 C。(圖 25)

求作:角度與邊長($\overline{AF}$: $\overline{CG}$)比例的關係

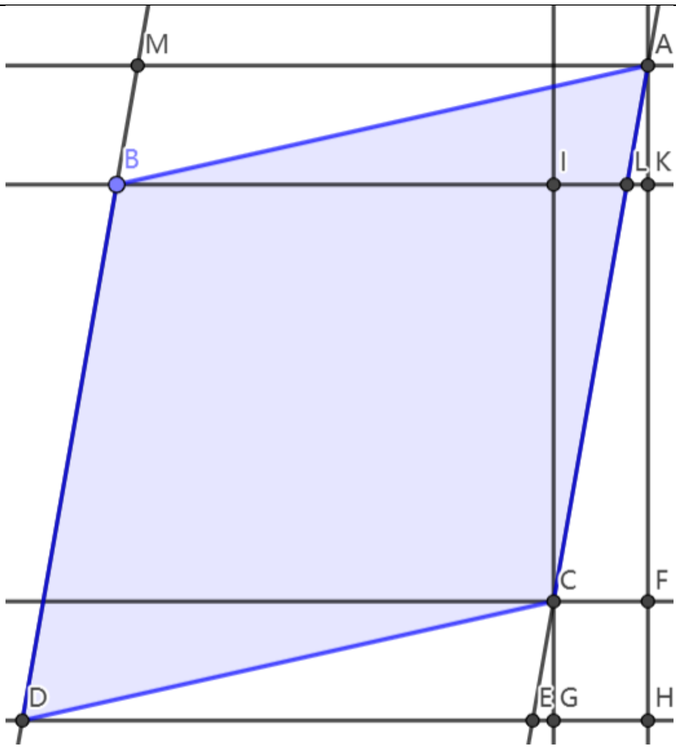
設$\overline{DC}$ =X、∠LAK=φ_1、∠MAB=φ_2

∠ACF=180° −90° −φ_1=90° −φ_1，$\sin(90°-\varphi_1)=\frac{X}{\overline{AF}}$，$\overline{AF}=\frac{X}{\sin(90°-\varphi1)}$

延伸$\overline{DB}$和$\overline{AC}$，使ΔBAM≅ΔCDE(SSS)

∴∠CDE=φ_2，sinφ_2= $\frac{X}{\overline{CM}}$，$\overline{CM}=\frac{X}{\sin\varphi2}$

所求:$\frac{\overline{AK}}{\overline{CM}}=\frac{\frac{X}{\sin(90°-\varphi1)}}{\frac{X}{\sin\varphi2}}=\frac{\sin\varphi2}{\sin(90°-\varphi1)}$



(圖 25)

結論六: 正方形、長方形、平行四邊形與菱形，具有固定的角度與邊長變換比例。

陸、結論

本研究透過透視投影與平行投影的數學分析，探討不同幾何圖形在投影變換下的行為，並證明了幾個重要的幾何特性。我們的主要發現包括：

1. 透視投影的核心性質
   - 透過任意直線和任意位於直線上的三個點所作出的三角形，延伸其對應邊一定能找出投影中心。
   - 兩正方形 S1 及 S2，可透過相似轉換將正方形 S1(S2)轉至投影射線上形成投影，且放大或縮小會和 S2(S1)重疊。
   - 任意四邊形可拆解為三角形，三角形延伸線與對應邊形成的兩條直線交於同一點。
2. 投影與比例關係
   - 當六個點共線時，若點 P 往左移 m 單位，則兩點之間的長度增加 n 單位。
3. 平行投影性質
   - 投影平面上形成圖形的特性與立體圖形有關，但角度會被投影的立體圖形旋轉角度和投影平面的角度受影響。
   - 正方形、長方形、平行四邊形與菱形，具有固定的角度與邊長變換比例。

柒、未來展望

本研究探討了透視投影與平行投影中的幾何特性，並透過笛沙格定理與相似轉換分析了不同條件下的圖形變換關係。在未來的研究方向上，我們希望能進一步拓展以下幾個方面:

1. 目前的研究主要集中在簡單四邊形的透視與平行投影，未來可探討更複雜的多邊形、圓錐曲線或立體幾何的投影關係，以發現更多的特性。
2. 可以進一步研究如何運用機器學習技術，訓練 AI 來辨識與校正不同的透視變換，提高應用於現實場景的準確性與效率。
3. 未來可延伸研究動態投影的數學模型，並探討如何在動畫與擴增實境（AR）技術中應用相關理論。

捌、參考文獻

1. F. Woods. SimilAr-Perspective TriAngles. Amer. MAth. Monthly, 36:67–73, 1929.
2. DesArgues' theorem And perspectivities,PAulHAlmos.