新竹市第四十三屆國民中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學

組　　別：國中甲組

作品名稱：真心畫大冒險～真心三角形性質之探討

關 鍵 詞：真心、旁心、相似

編　　號：

摘要

以 W 作圖法作出面積相等的真心三角形，我們發現真心三角形與旁心有些關聯性，因此對於真心三角形、旁邊三角形、旁心三角形以及其內切圓、外切圓進行研究，發現各組相似三角形與相關性質。

壹、前言

一、　研究動機

在上數學課時，我們學到了三角形的五心以及其相關的性質，正巧我們在網路上看到一篇關於 Wabash center 的文章，我們對這個點的性質很感興趣，所以我們由這個點的定義延伸出一個新的真心，並對其性質展開研究。

二、　研究目的

(一)真心三角形、旁心三角形、旁邊三角形相似及邊長關係

(二)真心三角形、旁邊三角形內心相關連線三角形相似、共點、共線、共圓等性質

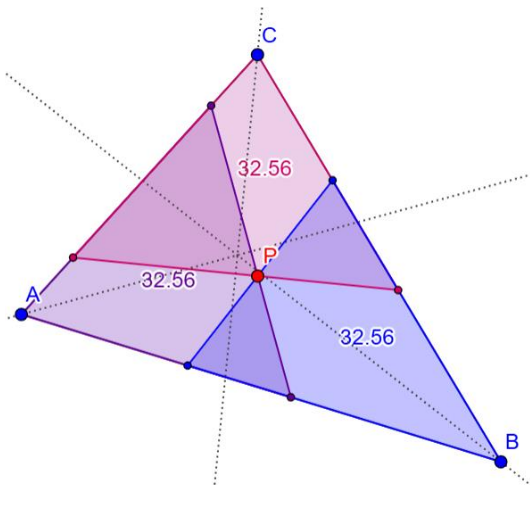
(三)真心三角形、旁邊三角形外心相關連線三角形相似、共點、共線、共圓等性質

(四)任意三角形中，真心的作圖法

三、　文獻回顧

(一)Wabash center

根據參考文獻資料一中的作圖，給定任一三角形及內部一點 X，過三角形其中一角作角平分線，過 X 點做直線垂直於該角平分線，該垂線分別於該角兩邊交兩點，三角形頂點與兩個交點構成等腰三角形，對此三角形的另外兩個角作重複動作，可得三個等腰三角形，如右圖。



Wabash center 即為當作圖中的三個等腰三角形面積相等時之 X 點。

本文延伸其作圖法進行研究。

(二)Math Pro 數學補給站-旁心三角形面積

根據參考文獻資料二中，我們引用 hua0127 第(4)點的結論：旁心三角形面積=2Rs

其中 R=三角形外接圓半徑，s=$\frac{a+b+c}{2}$，a、b、c 為原三角形之三邊長。

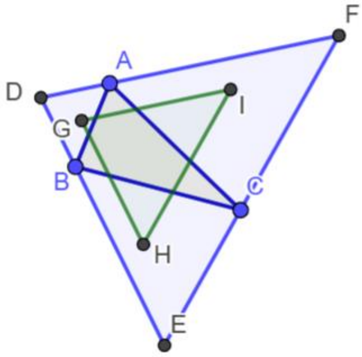
(三)「用“心”」

該篇科展研究原三角形的三個旁心三角形(即本文所指旁邊三角形)中取其五心，連成新三角形，觀察此新三角形與原三角形面積、五心之關係。

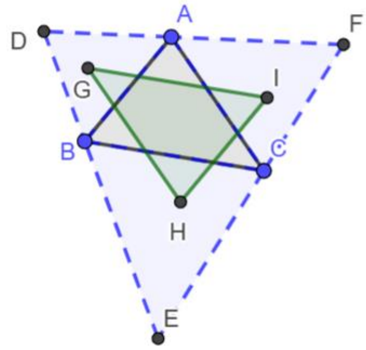
取旁心連線三角形(即本文所指旁心三角形)，研究新增的三角形與原三角形之關係

引用其性質 1-2 ：$\triangle DEF \sim \triangle GHI$，即旁心三角形$\triangle DEF$相似於旁外三角形$\triangle GHI$

性質 2-1 ：$\triangle ABC \cong \triangle GHI$，即旁垂三角形$\triangle GHI$全等於原三角形$\triangle ABC$



性質 1-2 圖示



性質 2-1 圖示

(四)百度百科-旁心三角形

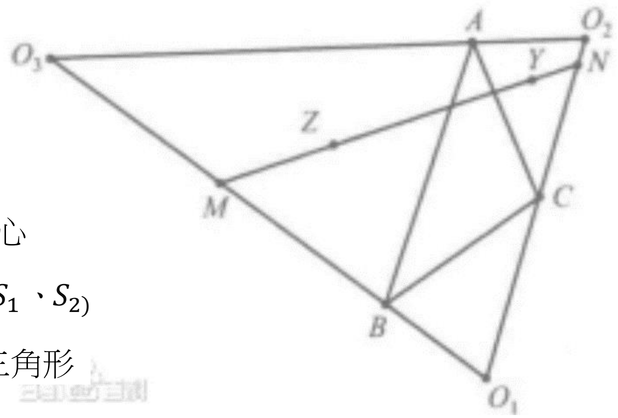
根據參考文獻資料四中，引用其定理 1：

O_1、O_2、O_3為三個旁心(即本文所指P_A、P_B、P_C)，

Y、Z(即本文I_A、I_C)分別為$\triangle O_2AC$、$\triangle O_3AB$的內心

，延長$\overline{YZ}$分別交$\overline{O_1O_3}$、$\overline{O_1O_2}$於 M、N(即本文所指S_1、S_2)

，則O_2、O_3、Z、Y四點共圓，且$\triangle O_1MN$為等腰三角形



貳、研究設備與器材

紙、筆、電腦、GeoGeBra

參、研究過程及方法

一、 名詞定義

(一) W 作圖法：

給定任一△ABC及內部一點 X，過 X 點作一直線垂直於∠A的角平分線，該垂線分別交∠A兩邊於 Q、T 兩點，三角形頂點A與兩個交點Q、T構成一等腰三角形，對∠B、∠C重複動作，可得三個等腰三角形△AQT、△BSP、△CUR，此作圖法我們稱為 W 作圖法，如圖 1

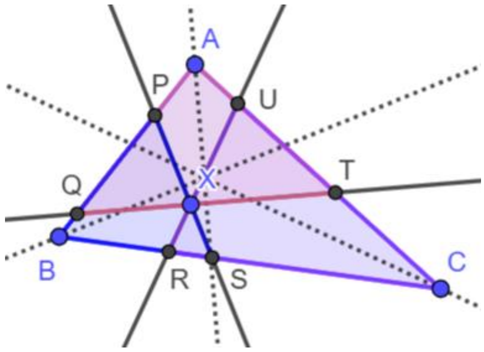


圖 1

(二) Wabash center :

依照 W 作圖法，當作圖中的三個等腰三角形△AQT、△BSP、△CUR面積相等時，我們稱此時之 X 點為 wabash center，標示為 W 點，如圖 2

(三) W 三角形：

根據 W 作圖法中，三個等腰三角形重疊部分的三個三角形，稱之為 W 三角形，如圖 3，△XPQ、△XRS、△XTU，均為 W 三角形

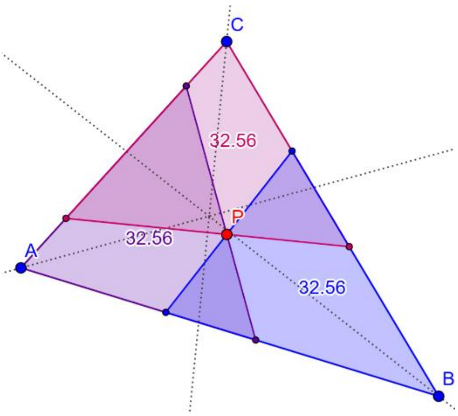


圖 2

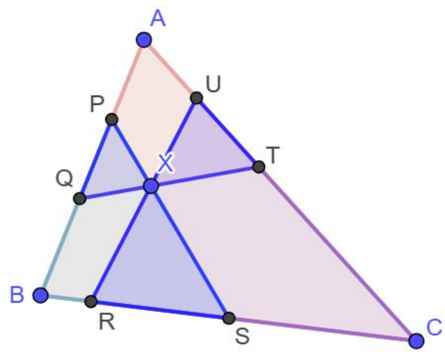


圖 3

(四)真心：

依照 W 作圖法，當三個 W 三角形的面積相等時，該點為真心，標示為 J

(五)真心三角形：

當 W 三角形面積相等時，此時 W 三角形稱為真心三角形

(六)旁邊三角形：

三角形中任意一個旁心與原三角形中作出該旁心的兩個頂點連線構成三個三角形，稱為旁邊三角形，如圖 4，$\triangle BCP_A$、$\triangle ACP_B$、$\triangle ABP_C$，均為旁邊三角形

(七)旁心三角形：

三個旁心連線所構成的三角形，稱為旁心三角形如圖 4，$\triangle P_AP_BP_C$

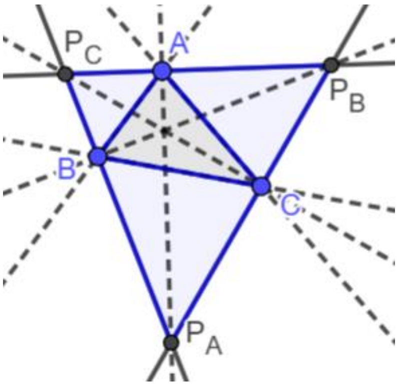


圖 4

二、 W 三角形與真心三角形性質之探討

(一) 性質 1：W 三角形為相似三角形，即$\triangle XPQ \sim \triangle XRS \sim \triangle XTU$

已知：$\triangle ABC$中，其內部一點 X，$\triangle XPQ$、$\triangle XRS$、$\triangle XTU$為三個 W 三角形

求證：W 三角形相似，$\triangle XPQ \sim \triangle XRS \sim \triangle XTU$

證明：

1.

令$\triangle ABC$的三個角，$\angle A = 2a°$，$\angle B = 2b°$，$\angle C = 2c°$

則$2a + 2b + 2c = 180°$

$\because \angle Q$、$\angle T$為$\triangle AQT$的兩底角

$\therefore \angle Q = \angle T = (\frac{180 - 2a}{2})° = (b + c)°$

$\because \angle P$、$\angle S$為$\triangle BPS$的兩底角

$\therefore \angle P = \angle S = (\frac{180 - 2b}{2})° = (a + c)°$

$\because \angle U$、$\angle R$為$\triangle CUR$的兩底角

$\therefore \angle U = \angle R = (\frac{180 - 2c}{2})° = (a + b)°$

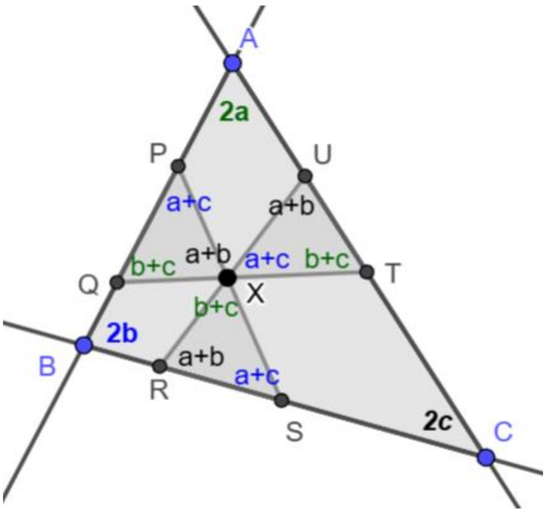


圖 5

2.

$\triangle XPQ$中，$\angle P = (a + c)°$；$\angle Q = (b + c)°$

$\because 2a + 2b + 2c = 180°$

$\therefore \angle BXQ = 180° - (a + c)° - (b + c)° = (a + b)°$

同理可得$\triangle XRS$、$\triangle XTU$的三個內角分別為$(a + b)°$、$(b + c)°$、$(a + c)°$

故$\triangle XPQ \sim \triangle XRS \sim \triangle XTU$(AA 相似)

(二) 性質 2：真心三角形必為全等三角形

由名詞定義可知，面積相等的 W 三角形即為真心三角形，且根據性質 1，W 三角形相似，故真心三角形必為全等三角形，$\triangle JPQ \cong \triangle JRS \cong \triangle JTU$

三、 真心三角形、旁心三角形與旁邊三角形關係之探討

(一) 性質 3：真心三角形~旁心三角形~旁邊三角形

已知：$\triangle ABC$中，J 為真心，$\triangle JPQ$、$\triangle JRS$、$\triangle JTU$為真心三角形，

$\triangle BCP_A$、$\triangle ACP_B$、$\triangle ABP_C$為旁邊三角形及$\triangle P_AP_BP_C$為旁心三角形

求證：$\triangle JPQ \cong \triangle JRS \cong \triangle JTU \sim \triangle BCP_A \sim \triangle ACP_B \sim \triangle ABP_C \sim \triangle P_AP_BP_C$

證明：

1.

由性質 2 可知$\triangle JPQ \cong \triangle JRS \cong \triangle JTU$

2.

令$\triangle ABC$的三個角，$\angle A = 2a°$，$\angle B = 2b°$，$\angle C = 2c°$

$\therefore 2a + 2b + 2c = 180°$

$\because \overline{AP_B}$、$\overline{AP_C}$為$\angle A$的外角平分線

$\therefore \angle CAP_B = \angle BAP_C = (\dfrac{180 - 2a}{2})° = (b + c)°$

$\because \overline{BP_A}$、$\overline{BP_C}$為$\angle B$的外角平分線

$\therefore \angle ABP_C = \angle CBP_A = (\dfrac{180 - 2b}{2})° = (a + c)°$

$\because \overline{CP_A}$、$\overline{CP_B}$為$\angle C$的外角平分線

$\therefore \angle ACP_B = \angle BCP_A = (\dfrac{180 - 2c}{2}) = (a + b)°$

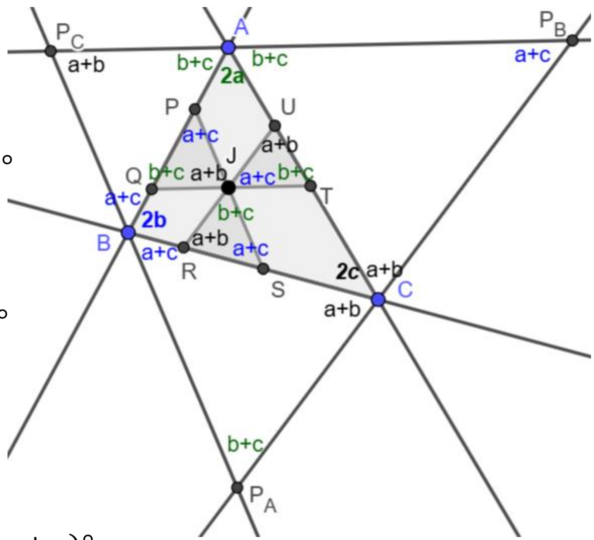


圖 6

$\triangle ABP_C$中， $\angle BAP_C = (b + c)°$；$\angle ABP_C = (a + c)°$

$\because 2a + 2b + 2c = 180°$

$\therefore \angle AP_CB = 180° - (b + c)° - (a + c)° = (a + b)°$

同理可得，$\triangle BCP_A$、$\triangle ACP_B$的三個角分別為$(a + b)°$、$(b + c)°$、$(a + c)°$

得$\triangle P_AP_BP_C$的三個角：$\angle AP_CB = (a + b)°$；$\angle BP_AC = (b + c)°$；$\angle AP_BC = (a + c)°$

由性質 1 可知真心三角形的三個角亦為$(a + b)°$、$(b + c)°$、$(a + c)°$

故$\triangle JPQ \cong \triangle JRS \cong \triangle JTU \sim \triangle BCP_A \sim \triangle ACP_B \sim \triangle ABP_C \sim \triangle P_AP_BP_C$(AA 相似)

(二)性質 4：旁心三角形與三個旁邊三角形對應邊長比為 1：$\sin\frac{A}{2}$：$\sin\frac{B}{2}$：$\sin\frac{C}{2}$

已知：$\triangle ABC$中，內心 I，旁心三角形$\triangle P_AP_BP_C$，

令$ka=\frac{\overline{P_BP_C}}{\overline{BC}}$，$kb=\frac{\overline{P_AP_C}}{\overline{AC}}$，$kc=\frac{\overline{P_AP_B}}{\overline{AB}}$，以旁心三角形邊長為基準，

旁心三角形與旁邊三角形的邊長比為 1：$\frac{1}{ka}$：$\frac{1}{kb}$：$\frac{1}{kc}$

求證：旁心三角形與三個旁邊三角形對應邊長比為 1：$\sin\frac{A}{2}$：$\sin\frac{B}{2}$：$\sin\frac{C}{2}$

證明：

1.

令旁心三角形的三個角分別為O°、X°、#°

$\because \overline{AP_A}$為$\angle A$的內角平分線

又$\overline{AP_B}$、$\overline{AP_C}$為$\angle A$的外角平分線

$\therefore \angle P_AAB=\angle P_AAC$

$\angle BAP_C=\angle CAP_B$

$\therefore \angle P_AAP_C=\angle P_AAP_B=90°$

同理可得，$\angle P_BBP_C=\angle P_BBP_A=90°$，$\angle P_CCP_A=\angle P_CCP_B=90°$

又$\angle IP_CA=\angle CP_CP_B$(共用角)

$\therefore \triangle IAP_C\sim\triangle P_BCP_C$(AA 相似)

$\therefore \angle AIP_C=\angle CP_BP_C=X°$

$\therefore \angle AIP_C=\angle CIP_A=X°$ (對頂角)

同理可證$\angle BIP_C=\angle CIP_B=O°$，$\angle BIP_A=\angle AIP_B=\#°$

2.

$\because \angle P_CIP_B=\angle BIC$ (對頂角)

$\because \angle ICB=\angle ICP_A-\angle BCP_A=90°-\#°$

$\angle P_CP_BI=180°-\angle IAP_B-\angle AIP_B=90°-\#°$

$\therefore \angle ICB=\angle P_CP_BI$

$\therefore \triangle IBC\sim\triangle IP_CP_B$(AA)

$\therefore \frac{\overline{BC}}{\overline{P_BP_C}}=\frac{\overline{IC}}{\overline{IP_B}}$ (對應邊成比例)$=\cos O$

$=\cos(90-\frac{A}{2})=\sin\frac{A}{2}$

$\therefore \frac{1}{ka}=\sin\frac{A}{2}$

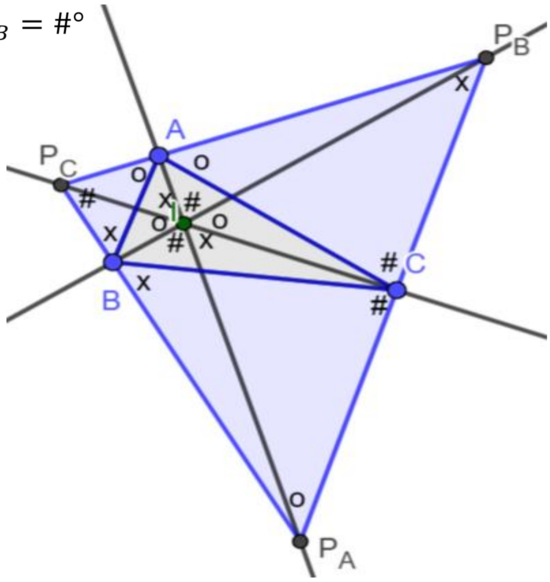


圖 7

又$\frac{\overline{BC}}{\overline{P_BP_C}}=\frac{\overline{P_AC}}{\overline{P_AP_C}}$ (相似三角形$\triangle BCP_A\sim\triangle P_AP_BP_C$，對應邊成比例)

$\therefore \overline{P_AC}:\overline{P_AP_C}=1:\text{ka}=1:\ \sin\dfrac{A}{2}$

同理可證$\overline{AC}:\overline{P_AP_C}=1:\text{kb}=1:\ \sin\frac{B}{2}$，$\overline{AP_C}:\overline{P_AP_C}=1:\text{kc}=1:\ \sin\frac{C}{2}$

故$\overline{P_AP_C}:\overline{P_AC}:\overline{AC}:\overline{AP_C}$ =1：$\frac{1}{ka}:\frac{1}{kb}:\frac{1}{kc}$= 1：$\sin\frac{A}{2}:\sin\frac{B}{2}:\sin\frac{C}{2}$

所以旁心三角形與三個旁邊三角形對應邊長比為 1：$\sin\frac{A}{2}:\sin\frac{B}{2}:\sin\frac{C}{2}$

(三)性質 5：旁心三角形與真心三角形之邊長比，k:1=$\frac{2R}{r}(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}):1$

已知：△ABC中，旁心△$P_AP_BP_C$，J 為真心

求證：旁心三角形與真心三角形之邊長比為 k:1=$\frac{2R}{r}(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}):1$

證明：

1.

將△ABC沿$\overline{AJ}$、$\overline{BJ}$、$\overline{CJ}$切割成三個三角形

令 ha 為△JBC中$\overline{BC}$邊上的高，hb 為△JAC中$\overline{AC}$邊上的高，hc 為△JAB中$\overline{AB}$邊上的高

則$a\cdot ha+b\cdot hb+c\cdot hc=2\triangle ABC$

$\because \frac{\overline{AP_A}}{ha}=\frac{\overline{BP_B}}{hb}=\frac{\overline{CP_C}}{hc}=k$ (對應高成比例)

$\therefore ha=\frac{\overline{AP_A}}{k}\quad hb=\frac{\overline{BP_B}}{k}\quad hc=\frac{\overline{CP_C}}{k}$

代入$a\cdot ha+b\cdot hb+c\cdot hc=2\triangle ABC$

$a\left(\frac{\overline{AP_A}}{k}\right)+b\left(\frac{\overline{BP_B}}{k}\right)+c\left(\frac{\overline{CP_C}}{k}\right)=2\triangle ABC$

提出$\frac{1}{k}$，$\frac{1}{k}(a\cdot\overline{AP_A}+b\cdot\overline{BP_B}+c\cdot\overline{CP_C})=2\triangle ABC$

k=$\frac{a\cdot\overline{AP_A}+b\cdot\overline{BP_B}+c\cdot\overline{CP_C}}{2\triangle ABC}$

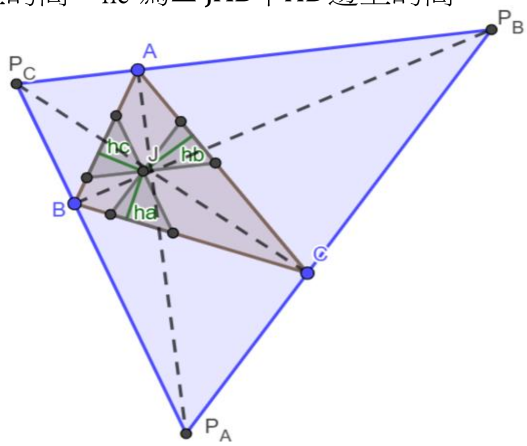


圖 8

2.

根據旁心三角形與旁邊三角形的邊長關係

$ka=\frac{\overline{P_BP_C}}{\overline{BC}}$，$kb=\frac{\overline{P_AP_C}}{\overline{AC}}$，$kc=\frac{\overline{P_AP_B}}{\overline{AB}}$

$a\cdot ka=\overline{P_BP_C}\qquad \therefore a=\frac{\overline{P_BP_C}}{ka}$

$b\cdot kb=\overline{P_AP_C}\qquad \therefore b=\frac{\overline{P_AP_C}}{kb}$

$c\cdot kc=\overline{P_AP_B}\qquad \therefore c=\frac{\overline{P_AP_B}}{kc}$

k=$\frac{\frac{\overline{P_BP_C}}{ka}\cdot\overline{AP_A}+\frac{\overline{P_AP_C}}{kb}\cdot\overline{BP_B}+\frac{\overline{P_AP_B}}{kc}\cdot\overline{CP_C}}{2\triangle ABC}$

$=\frac{\frac{2\triangle P_AP_BP_C}{ka}+\frac{2\triangle P_AP_BP_C}{kb}+\frac{2\triangle P_AP_BP_C}{kc}}{2\triangle ABC}=\frac{(\triangle P_AP_BP_C)(\frac{1}{ka}+\frac{1}{kb}+\frac{1}{kc})}{\triangle ABC}$

3.

$\triangle$ ABC面積$= s*r$ $(s=\frac{a+b+c}{2}$ ， $r=$內切圓半徑) ，如圖 9

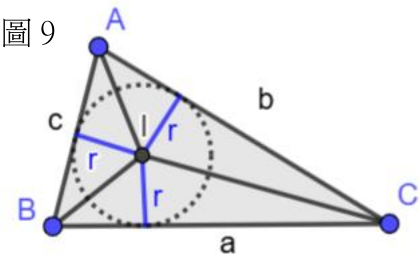


圖 9

$k=\frac{(\triangle P_AP_BP_C)(\frac{1}{ka}+\frac{1}{kb}+\frac{1}{kc})}{\triangle ABC}$

由參考資料(二)中，旁心三角形$\triangle P_AP_BP_C$面積$A_p=2Rs$

$k=\frac{2sR\cdot(\frac{1}{ka}+\frac{1}{kb}+\frac{1}{kc})}{rs}=\frac{2R}{r}(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2})$

$\therefore k：1=\frac{2R}{r}(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2})：1$

四、 原三角形與真心三角形關係之探討

由性質 4 得旁心三角形與旁邊三角形對應邊長比為 $1：\frac{1}{ka}：\frac{1}{kb}：\frac{1}{kc}$，由性質 5 得真心三角形與旁心三角形邊長比為 1：k，且三個旁邊三角形中邊長 a、b、c 即為原三角形的三邊長，故將原三角形的三邊分別放大 ka、kb、kc 倍，為旁心三角形三邊長，再縮小 k 倍，即為真心三角形三邊長。

結論：若原三角形三邊長為 a、b、c，則真心三角形三邊長為$\frac{a\cdot ka}{k}$、$\frac{b\cdot kb}{k}$、$\frac{c\cdot kc}{k}$

肆、研究結果

已知：$\triangle$ ABC中，$\triangle$ XPQ、$\triangle$ XRS、$\triangle$ XTU為三個 W 三角形，$\triangle$ JPQ、$\triangle$ JRS、$\triangle$ JTU為真心三角形，$\triangle BCP_A$、$\triangle ACP_B$、$\triangle ABP_C$為旁邊三角形及旁心$\triangle P_AP_BP_C$

由以上性質 1~5，可得以下結論：

一、W 三角形為相似三角形

二、真心三角形必為全等三角形

三、旁心三角形、旁邊三角形、真心三角形相似

四、旁心三角形與旁邊三角形的邊長比為 $1：\sin\frac{A}{2}：\sin\frac{B}{2}：\sin\frac{C}{2}$

五、旁心三角形與真心三角形的邊長比為$\frac{2R}{r}(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2})$: 1

伍、討論

做完以上研究，我們以真心三角形、旁邊三角形的內心及外心，做出各連線三角形，發現一些性質，為了方便討論，我們定義出以下名詞。

一、 名詞定義：

(一)真內三角形：

三個真心三角形的內心連線所構成的三角形，稱之為真內三角形，如圖 10 中△ $I_1I_2I_3$

(二)真內切三角形：

原三角形內切圓與三角形三邊的切點連線所構成的三角形，如圖 11 中△ DEF

(三)旁內三角形：

三個旁邊三角形的內心連線所構成的三角形，稱之為旁內三角形，如圖 12 中 △ $I_AI_BI_C$

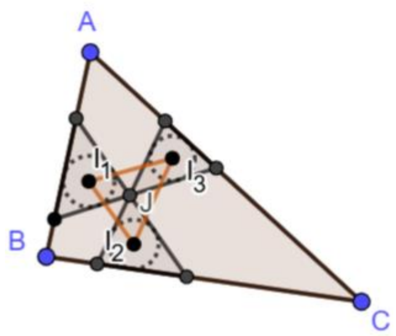


圖 10

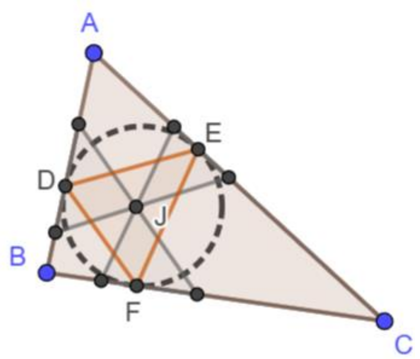


圖 11

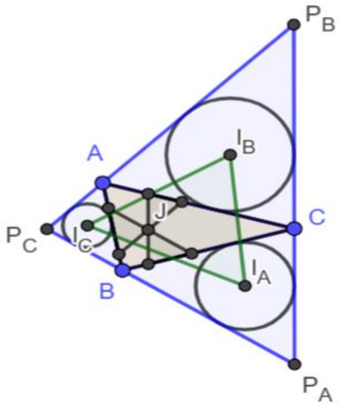


圖 12

(五)真外三角形：

三個真心三角形外心連線所構成的三角形，稱之為真外三角形，如圖 13△ $O_1O_2O_3$

(六)旁外三角形：

三個旁邊三角形外心連線所構成的三角形，稱之為旁外三角形，如圖 14△ $O_AO_BO_C$

(七)旁垂三角形：

三個旁邊三角形垂心連線所構成的三角形，稱之為旁垂三角形，如圖 15△ $H_AH_BH_C$

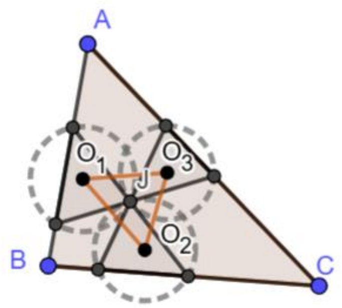


圖 13

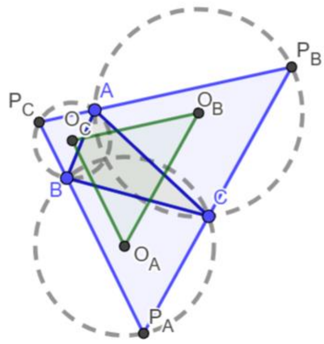


圖 14

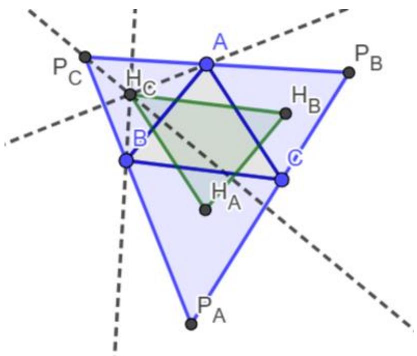


圖 15

二、 真內三角形、真內切三角形與真心三角形關係

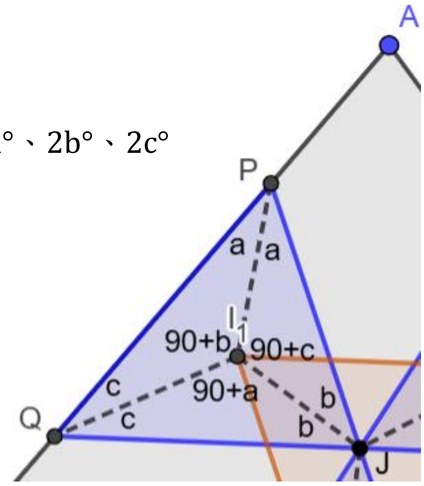
(一)性質 6：真內三角形全等於真心三角形

已知：$\triangle ABC$中，$\triangle JPQ$、 $\triangle JRS$、$\triangle JTU$為真心三角形，I_1、I_2、I_3分別為其內心

$\triangle I_1I_2I_3$為真內三角形

求證：真內三角形與真心三角形全等，即$\triangle I_1I_2I_3 \cong \triangle JPQ \cong \triangle JRS \cong \triangle JTU$

證明：



1.

令真心$\triangle JPQ$中，$\angle JPQ$、$\angle QJP$、$\angle PQJ$角度分別為2a°、2b°、2c°

$\because I_1$、I_2、I_3為三個真心三角形內心

∴內心到頂點之連線為三角的角平分線

又 $2a + 2b + 2c = 180°$，$a + b + c = 90°$

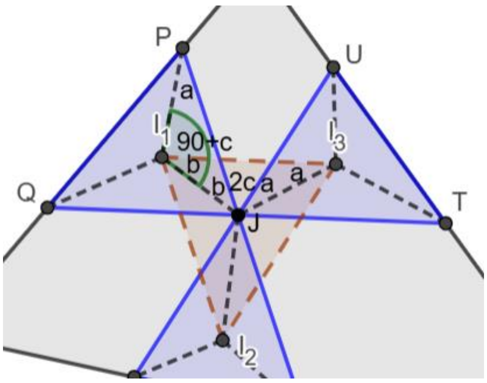
故 $\angle QI_1J = 180° - c° - b° = 90° + a°$

同理可得$\angle QI_1P = 90° + b°$，$\angle PI_1J = 90° + c°$

$\angle PJU = \angle SJR$(對頂角)

$= \angle PQJ$(對應角)

$= 2c°$



2.

連接$\overline{I_1J}$、$\overline{I_2J}$、$\overline{I_3J}$

$\because \overline{I_1J} = \overline{I_1J}$ (共用邊)

$\overline{JI_3} = \overline{I_1P}$ (真心三角形全等)

且 $\angle I_1JI_3 = (a + b + 2c)° = 90° + c° = \angle PI_1J$

∴ $\triangle I_1JI_3 \cong \triangle PI_1J$ (SAS 全等)，得$\overline{JP} = \overline{I_3I_1}$(對應邊)

同理可證 $\triangle I_2JI_3 \cong \triangle TI_3J \cong \triangle QI_1P$，得$\overline{PQ} = \overline{I_2I_3}$

$\triangle I_1JI_2 \cong \triangle QI_1J \cong \triangle JI_1Q$，得$\overline{JQ} = \overline{I_1I_2}$

故$\triangle JPQ \sim \triangle I_1I_2I_3$($SSS$全等)

又因為三個真心三角形全等

所以真心三角形 ≅ 真內三角形

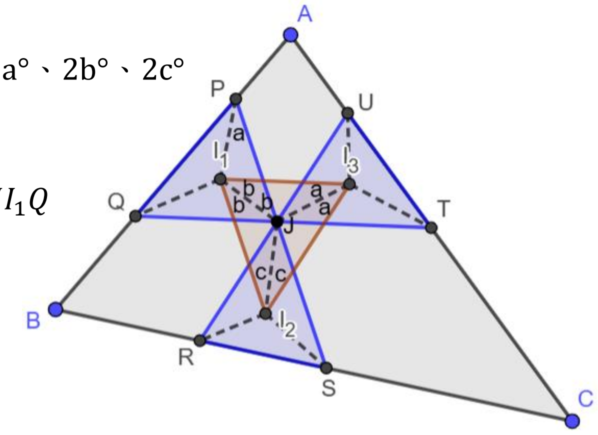
(二)性質 7：真內三角形內心即為真心

已知：$\triangle ABC$中，$\triangle JPQ$、 $\triangle JRS$、$\triangle JTU$為真心三角形，I_1、I_2、I_3分別為其內心

$\triangle I_1I_2I_3$為真內三角形

求證：真內三角形內心即為真心

證明：



令真心$\triangle JPQ$中，$\angle JPQ$、$\angle QJP$、$\angle PQJ$角度分別為2a°、2b°、2c°

由性質 6 的證明可知，

$\triangle I_1JI_3 \cong \triangle PI_1J$、$\triangle I_2JI_3 \cong \triangle QI_1P$、$\triangle I_1JI_2 \cong \triangle JI_1Q$

又因全等三角形的對應角相等，得：

$\angle JI_1I_2 = b°$， $\angle JI_1I_3 = b°$， $\angle JI_3I_1 = a°$

$\angle JI_3I_2 = a°$，$\angle JI_2I_1 = c°$， $\angle JI_2I_3 = c°$

所以 $\overline{I_1J}$、 $\overline{I_2J}$,、$\overline{I_3J}$ 分別為$\triangle I_1I_2I_3$中 $\angle I_1$、$\angle I_2$、$\angle I_3$ 的角平分線

所以真內三角形內心為原三角形真心

(三)性質 8：真內切三角形相似於真心三角形

已知：$\triangle ABC$中，$\triangle JPQ$、 $\triangle JRS$、$\triangle JTU$為真心三角形，$\triangle DEF$為真內切三角形

求證：真內切三角形相似於真心三角形

即$\triangle DEF \sim \triangle JPQ \cong \triangle JRS \cong \triangle JTU$

證明：

1.

D、E、F 為原三角形內切圓與三角形三邊的切點

故$\angle IDB = 90°$、$\angle IEB = 90°$

∴ I、E、B、D 四點共圓(對角互補)

設 $\angle ABC = 2a°$，則 $\angle DIE = 180° - 2a°$(對角互補)

2.

∵ $\overline{ID} = \overline{IE}$ ∴ $\triangle DIE$為等腰三角形

∴ $\angle IDE = \angle IED = a°$

又$\angle IDB = 90°$、$\angle IEB = 90°$

∴ $\angle DEB = \angle EDB = 90° - a°$

3.

$\triangle BSP$為等腰三角形

∴ $\angle BSP = \angle BPS = 90° - a°$

4.

由 2.3.可知

$\angle BSP = \angle BPS = \angle DEB = \angle EDB = 90 - \mathrm{a}$

$\therefore$ $\overline{DE}$ // $\overline{PS}$(同位角相等)

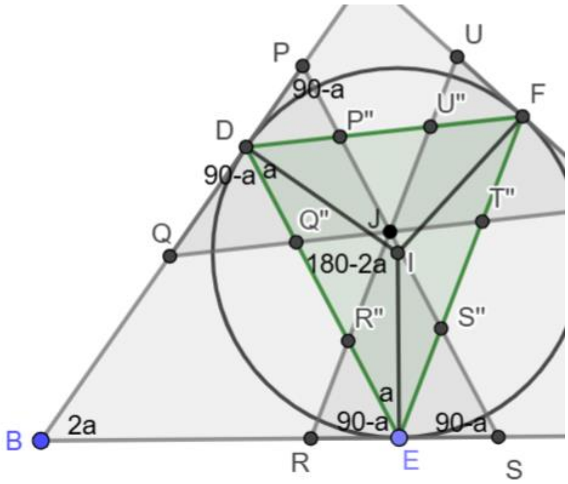
同理可證$\overline{FE}$ // $\overline{UR}$，$\overline{DF}$ // $\overline{QT}$

令P"為$\overline{DF}$ 、$\overline{PS}$之交點，Q"為$\overline{DE}$ 、$\overline{QT}$之交點

則 DP"JQ"為平行四邊形(兩對邊平行)

$\therefore \angle Q"JP" = \angle Q"\mathrm{DP}"$ ，同理可得其餘兩角

故真內切三角形與真心三角形相似(AA)



三、 原三角形與真心三角形的共圓關係

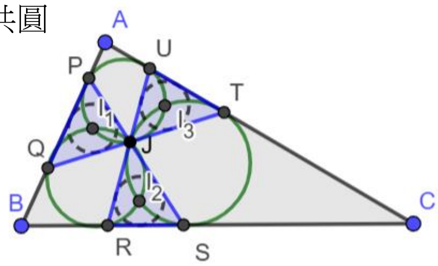
(一)性質 9：真心、兩個真心三角形內心、兩個真心三角形頂點五點共圓

(如圖 J、I_1、Q、R、I_2五點共圓)

已知：△ ABC 中， △ PQJ、 △ RSJ、 △ TUJ 為真心三角形，I_1 、I_2 、I_3為真心三角形內心

求證：真心、兩個真心三角形內心、兩個真心三角形頂點五點共圓

即 J、I_1、Q、R、I_2五點共圓



證明：

1.

△ PQJ和△ SRJ為真心三角形，且$\overline{QJ}$=$\overline{JR}$(對應邊等長)

令$\angle \mathrm{PQJ} = \angle \mathrm{RJS} = 2\mathrm{c}°$

$\angle \mathrm{PJQ} = \angle \mathrm{JRS} = 2\mathrm{b}°$(對應角相等)

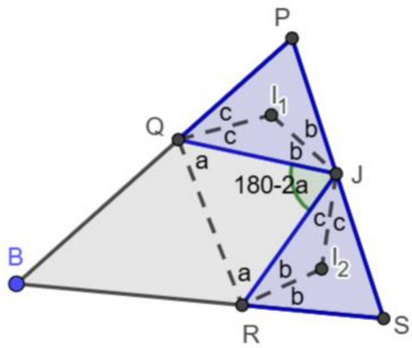
$\overline{QI_1}$為∠PQJ的角平分線

$\therefore \angle I_1\mathrm{QJ} = \angle I_2\mathrm{JR} = \angle \mathrm{PQ}I_1 = \angle \mathrm{SJ}I_2 = \mathrm{c}°$

$\because$ $\overline{QJ}$=$\overline{JR}$

令$\angle \mathrm{JQR} = \angle \mathrm{JRQ} = \mathrm{a}°$

則$\angle \mathrm{QJR} = 180° - 2\mathrm{a}°$



2.

$\because \angle \mathrm{PJQ} + \angle \mathrm{QJR} + \angle \mathrm{RJS} = 180°$

$2\mathrm{b}° + (180 - 2\mathrm{a})° + 2\mathrm{c}° = 180°$，$2\mathrm{b} + 2\mathrm{c} - 2\mathrm{a} = 0$，$\mathrm{b} + \mathrm{c} = \mathrm{a}$

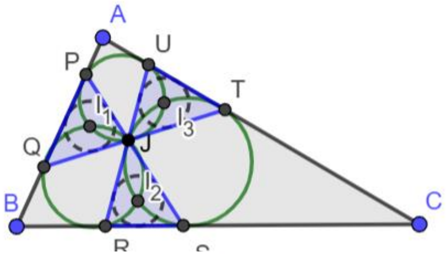
$\angle \mathrm{QJ}I_2 + \angle \mathrm{QR}I_2 = (180 - 2\mathrm{a} + \mathrm{c})° + (\mathrm{a} + \mathrm{b})° = 180° - \mathrm{a}° + \mathrm{a}° = 180°$

故J、Q、R、I_2四點共圓，同理可證J、R、Q、I_1四點共圓

故J、I_1、Q、R、I_2五點共圓

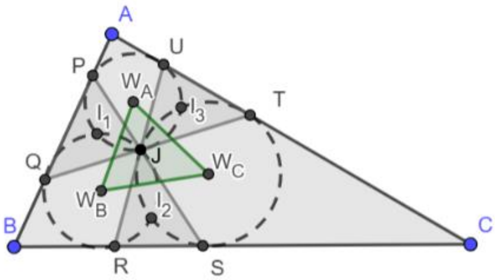
同理可得J、I_2、S、T、I_3五點共圓

J、I_3、U、P、I_1五點共圓



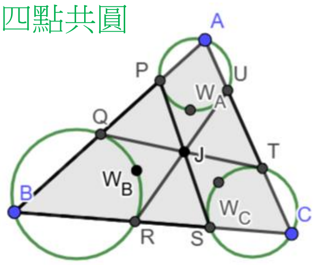
(二) **名詞定義：真 W 三角形**

由以上討論，發現性質 9 中三個五點共圓圓心連線之三角形有一些性質，為方便討論稱之為真 W 三角形，如圖中△ $W_AW_BW_C$



(三)性質 10：真 W 三角形頂點、兩個真心三角形頂點、原三角形頂點四點共圓

(如圖Q、B、R、W_B四點共圓)



已知：△ ABC 中， △ PQJ、 △ RSJ、 △ TUJ 為真心三角形，

W_A、W_B、W_C為性質 9 中三個五點共圓圓心

求證：五點共圓圓心、兩個真心三角形頂點、原三角形頂點四點共圓

證明：

1.

$\because \overline{QW_B} = \overline{JW_B} = \overline{RW_B}$($W_B$為五點共圓圓心)

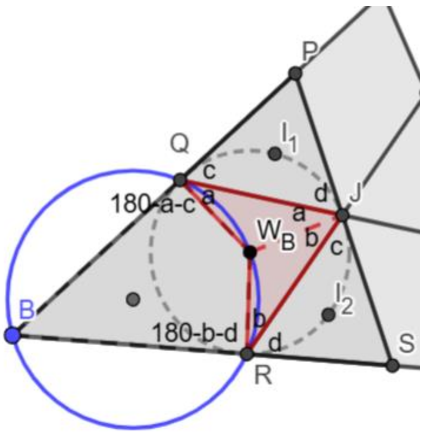
令$\angle W_BJQ = \angle W_BQJ$ =a°，$\angle W_BJR = \angle W_BRJ$ =b°

△ PQJ和△ RSJ為真心三角形，且$\overline{QJ}$=$\overline{RJ}$(對應邊等長)

令∠PQJ = ∠RJS =c°，∠PQJ = ∠SRJ =d° (對應角相等)

∠PJQ + $\angle QJW_B + \angle W_BJR$ + ∠RJS = 180°(平角)

則(d + a + b + c)° = 180°



2.

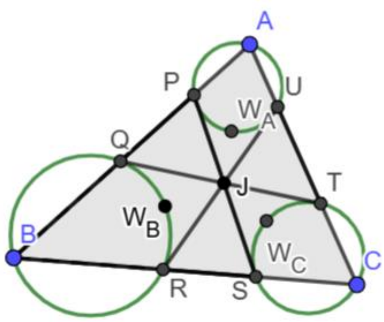
$\angle W_BRB = 180° - b° - d°$ ，$\angle W_BQB = 180° - a° - c°$

$\angle W_BRB + \angle W_BQB = (180 - b - d)° + (180 - a - c)°$

$= 360° - (d + a + b + c)° = 180$

故Q、B、R、J四點共圓

同理可證S、C、T、J和U、A、B、J四點共圓



四、 真 W 三角形與各三角形關係之探討

(一)性質 11：真 W 三角形兩頂點和真心三角形三個頂點，五點共圓

已知：原△ ABC 中，W_A、W_B、W_C為真 W 三角形三個頂點

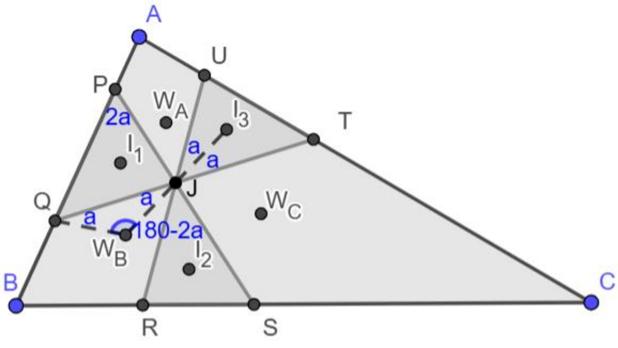
△ PQJ、 △ RSJ、 △ TUJ 為真心三角形，I_1、I_2、I_3分別為真心三角形之內心

求證：真 W 三角形兩頂點和真心三角形三個頂點，五點共圓

證明：

由性質 2 真心三角形必全等，即△ JPQ ≅△ JRS ≅△ JTU，其對應邊、對應角必相等

由性質 9，其五點共圓，半徑等長



令$\angle QPJ = \angle UJT = 2a°$

$\because \overline{I_3J}$為$\angle UJT$ 的角平分線，$\therefore \angle I_3JT = a°$

$\because \overline{JQ} = \overline{JR}$(性質 2)

$\overline{W_BQ} = \overline{W_BR}$(性質 9)

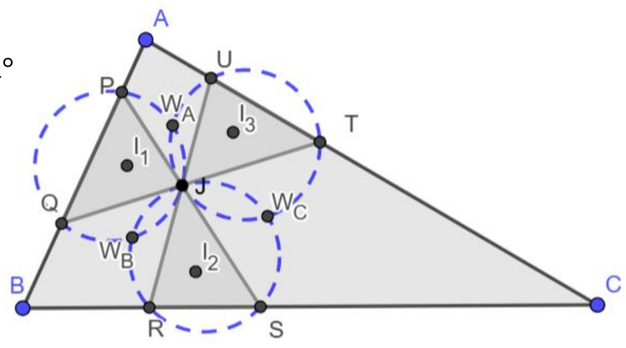
所以W_B在$\overline{QR}$的中垂線上

又$\angle QJR = \angle UJT = 2a°$(對頂角相等)，$\therefore \angle QJW_B = a°$

$\because \overline{W_BJ} = \overline{W_BQ}$ (性質 9)

$\therefore \angle QJW_B = \angle JQW_B = a°$，$\angle QW_BJ = 180 - 2a°$

$\angle QPJ + \angle QW_BJ = 2a + 180 - 2a = 180°$



故 P、Q、W_B、J 四點共圓

同理可證 P、Q、W_A、J 四點共圓

故 P、Q、W_A、J、W_B五點共圓

同理可證 R、S、W_C、J、W_B五點共圓，T、U、W_C、J、W_A五點共圓

(二)性質 12：真 W 三角形全等於真外三角形

已知：原△ ABC 中， △ $W_AW_BW_C$為真 W 三角形， △ $O_1O_2O_3$為真外三角形

求證：真 W 三角形全等於真外三角形，△ $W_AW_BW_C$ ≅△ $O_1O_2O_3$

證明：

$\because \overline{W_BO_1} = \overline{W_CO_3}$(性質 11，真心三角形外接圓半徑)

$\because \overline{W_BQ} = \overline{W_BJ}$(性質 9，五點共圓半徑)，且圓心必在弦的中垂線上

故$\overline{W_BO_1}$為$\overline{QJ}$中垂線 ；$\overline{W_CO_3}$為$\overline{TJ}$中垂線， $\therefore \overline{W_BO_1} \perp \overline{QT}$ ；$\overline{W_CO_3} \perp \overline{QT}$

$\overline{O_1W_B} // \overline{O_3W_C}$ ，且$\overline{O_1W_B} = \overline{O_3W_C}$

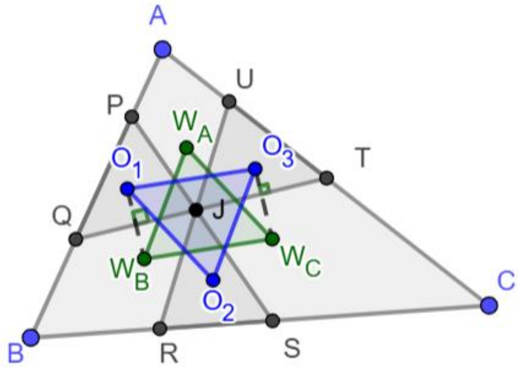
故$O_1O_3W_BW_C$為平行四邊形(對邊平行且等長)

因此$\overline{W_BW_C}//\overline{O_1O_3}$，且$\overline{W_BW_C}=\overline{O_1O_3}$

同理可證$\overline{W_AW_C}//\overline{O_1O_2}$，且$\overline{W_AW_C}=\overline{O_1O_2}$

$\overline{W_AW_B}//\overline{O_2O_3}$，且$\overline{W_AW_B}=\overline{O_2O_3}$

故$\triangle W_AW_BW_C\cong\triangle O_1O_2O_3(SSS$相似)



(三)性質 13：真 W 三角形垂心為真心

已知：原△ ABC 中，$\triangle W_AW_BW_C$為真 W 三角形，J 為真心

求證：真 W 三角形垂心為真心

證明：

$\overline{W_AO_1}=\overline{W_AO_3}$(性質 9，五點共圓半徑)

$\overline{JO_1}=\overline{JO_3}$(真心三角形外接圓半徑)

故四邊形$W_AO_1JO_3$為箏形

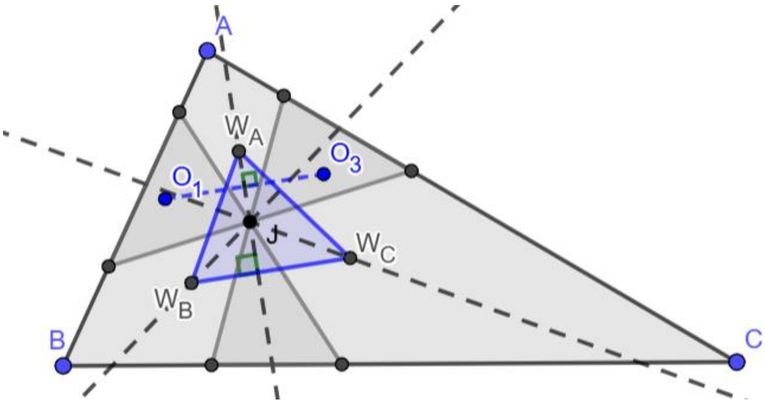
$\therefore\overline{W_AJ}\perp\overline{O_1O_3}$

又$\overline{W_BW_C}//\overline{O_1O_3}$

故$\overleftrightarrow{W_AJ}\perp\overline{W_BW_C}$

同理可證$\overleftrightarrow{W_BJ}\perp\overline{W_AW_C}$，$\overleftrightarrow{W_CJ}\perp\overline{W_AW_B}$

故真 W 三角形垂心為真心



(四)性質 14：真內三角形頂點與真 W 三角形頂點，六點共圓

已知：△ ABC 中，$\triangle I_1I_2I_3$為真內三角形，$\triangle W_AW_BW_C$為真 W 三角形

求證：真內三角形頂點與真 W 三角形頂點，六點共圓

證明：

1.

令原△ ABC的三個角，$\angle A=2a°$，$\angle B=2b°$，$\angle C=2c°$

I_1為$\triangle PQJ$的內心，$\overline{I_1P}$為$\angle QPJ$的角平分線

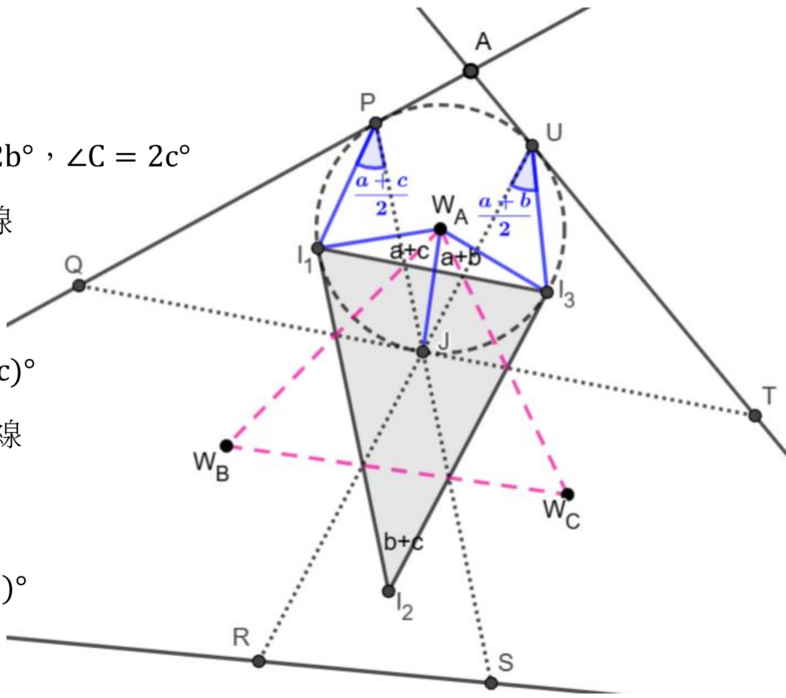
$\angle QPJ=(a+c)°$，$\angle I_1PJ=(\frac{a+c}{2})°$

$\because\angle I_1PJ$和$\angle I_1W_AJ$共弧　$\therefore\angle I_1W_AJ=(a+c)°$

I_3為$\triangle TUJ$的內心，$\overline{I_3U}$為$\angle TUJ$的角平分線

$\angle TUJ=(a+b)°$，$\angle I_3UJ=(\frac{a+b}{2})°$

$\because\angle I_3UJ$和$\angle I_3W_AJ$共弧 $\therefore\angle I_3W_AJ=(a+b)°$



2.

已知$\triangle I_1I_2I_3$相似於$\triangle PQJ$，且$\triangle PQJ$全等於$\triangle TUJ$(真心三角形)

$\angle I_1I_2I_3$的對應角為$\angle PQJ$，該角為$(\mathrm{a}+\mathrm{b})°$

$\angle I_1W_AJ=(\mathrm{a}+\mathrm{c})°$，$\angle I_3W_AJ=(\mathrm{b}+\mathrm{c})°$

$2\mathrm{a}+2\mathrm{b}+2\mathrm{c}=180°$ (三角形內角和)

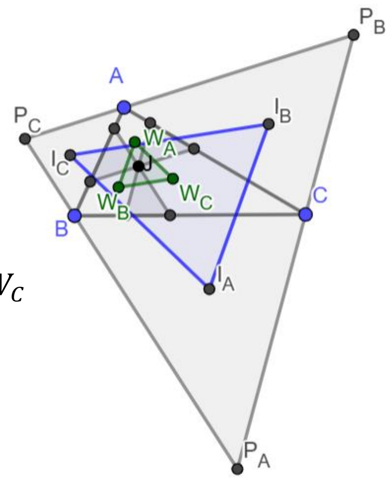
$\angle I_1W_AI_3+\angle I_1I_2I_3=(\mathrm{a}+\mathrm{b})°+(\mathrm{a}+\mathrm{c})°+(\mathrm{b}+\mathrm{c})°=180°$

故I_1、I_2、I_3、W_A四點共圓

同理可證I_1、I_2、I_3、W_B和I_1、I_2、I_3、W_C為四點共圓

故I_1、I_2、I_3、W_A、W_B、W_C為六點共圓

(五)性質 15：旁內三角形相似於真 W 三角形



已知：原$\triangle$ ABC 中，$\triangle I_AI_BI_C$為旁內三角形

$\triangle W_AW_BW_C$為真 W 三角形

求證：旁內三角形相似於真 W 三角形，$\triangle I_AI_BI_C\sim\triangle W_AW_BW_C$

證明：

1.

令原$\triangle$ ABC的三個角，$\angle \mathrm{A}=2\mathrm{a}°$，$\angle \mathrm{B}=2\mathrm{b}°$，$\angle \mathrm{C}=2\mathrm{c}°$

根據參考文獻資料四，延長$\overline{I_BI_C}$，交$\overline{P_AP_C}$、$\overline{P_AP_B}$於S_1、S_2，得等腰$\triangle S_1S_2P_A$

延長$\overline{I_AI_B}$，交$\overline{P_BP_C}$於S_3

可知$\angle P_AS_1S_2=\angle P_AS_2S_1=(\dfrac{180-b-c}{2})°=90°-(\dfrac{b+c}{2})°$

則$\angle I_CS_1P_C=180°-\left(90-\frac{b+c}{2}\right)°=90°+(\frac{b+c}{2})°$

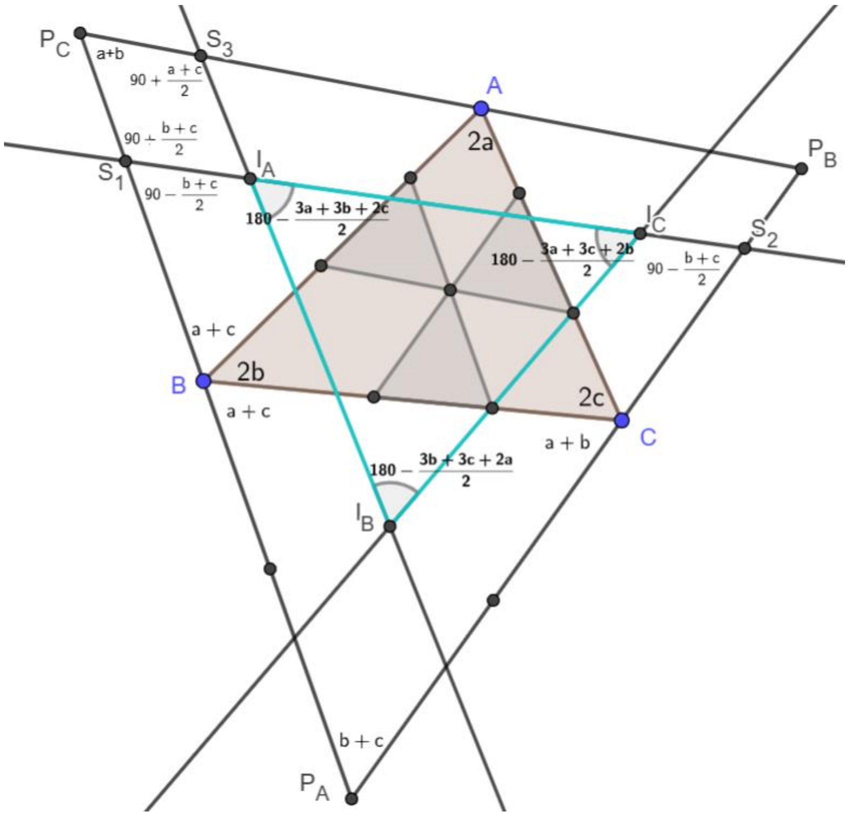
同理可得$\angle P_CS_3I_C=90°+(\frac{a+c}{2})°$

四邊形$I_CS_1P_CS_3$中，$\angle S_3I_CS_1=360°-\left(90+\frac{a+c}{2}\right)°-\left(90+\frac{b+c}{2}\right)°-(a+b)°$

$$=180°-(\frac{3a+3b+2c}{2})°$$

又$\angle S_3I_CS_1=\angle I_BI_CI_A=180°-(\frac{3a+3b+2c}{2})°$

同理可得$\angle I_CI_BI_A=180°-(\frac{3a+3c+2b}{2})°$，$\angle I_BI_AI_C=180°-(\frac{3b+3c+2a}{2})°$



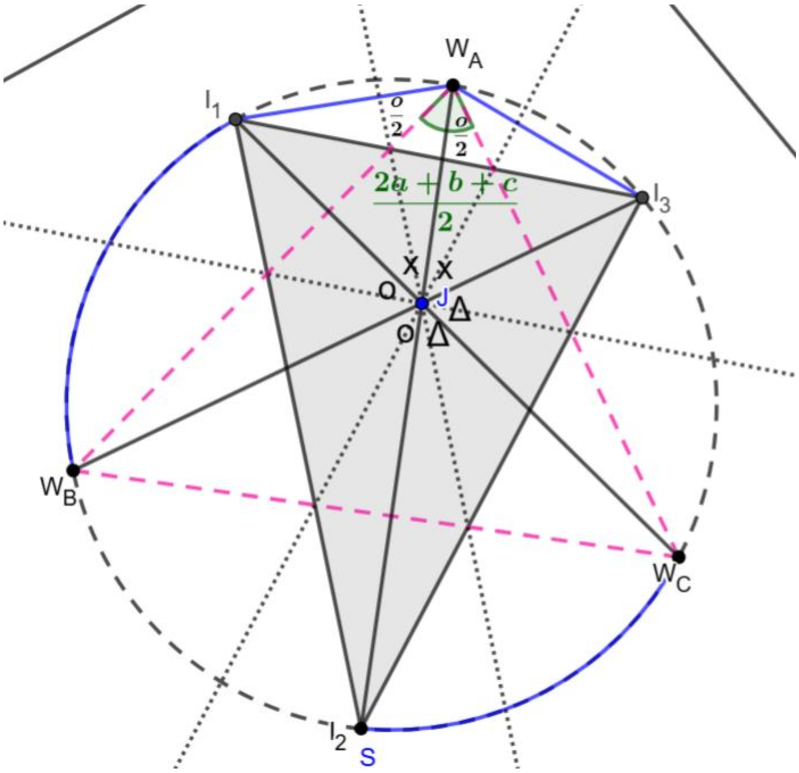
2.

$\overline{I_1W_A} = \overline{I_3W_A}$ (性質 9 五點共圓半徑)

又 $\overline{I_1I}$ = $\overline{IW_A}$ = $\overline{I_3I}$ (六點共圓半徑)

所以$\triangle I_1IW_A \cong \triangle I_3IW_A$ (SSS)

同理可證$\triangle I_1IW_B \cong \triangle I_2IW_B$、$\triangle I_2IW_C \cong \triangle I_3IW_C$



令$\angle I_1IW_A = \angle I_3IW_A = X°$，$\angle I_1IW_B = \angle I_2IW_B = O°$，$\angle I_2IW_C = \angle I_3IW_C = \triangle°$

延長$\overline{W_AI}$，交圓於點 S

$\angle I_1W_AW_B = (\frac{O}{2})°$(圓周角)

$\angle SW_BW_C = (\frac{180-\angle W_AIW_C}{2})° = (\frac{180-(X+\triangle)}{2})°$ ，又$O + X + \triangle = 180°$

$\therefore \angle SW_BW_C = (\frac{O}{2})°$

$\therefore \angle I_1W_AW_B = \angle SW_BW_C = (\frac{O}{2})°$

又$\angle I_1W_AI = \angle IW_AI_3(\triangle I_1IW_A \cong \triangle I_3IW_A)$

$\therefore \angle W_BW_AI = \angle W_CW_AI_3$

由性質 14 中可知，$\angle I_1W_AI_3 = (a + b)° + (a + c)° = (2a + b + c)°$

$\therefore \angle W_BW_AW_C = (\frac{2a + b + c}{2})°$

同理可證$\angle W_AW_BW_C = (\frac{2b+a+c}{2})°$，$\angle W_AW_CW_B = (\frac{2c+a+c}{2})°$

3.

又$2a + 2b + 2c = 180°$

$$\angle I_BI_CI_A = 180° - (\frac{3a + 3b + 2c}{2})°$$

$$= (\frac{4a + 4b + 4c}{2})° - (\frac{3a + 3b + 2c}{2})° = (\frac{a + b + 2c}{2})°$$

同理可得$\angle I_CI_BI_A = (\frac{a+2b+c}{2})°$，$\angle I_BI_AI_C = (\frac{2a+b+c}{2})°$

故$\triangle I_AI_BI_C \sim \triangle W_AW_BW_C(AA)$

五、 原三角形、旁心三角形、真內三角形、真 W 三角形關係之探討

(一)性質 16：原三角形內切圓與三邊切點＝真心三角形三內切圓與三邊切點

已知：原△ ABC 中，I_1、I_2、I_3為三個真內三角形內心，D、E、F 為原三角形內接圓與三邊之交點，T_1、T_2、T_3為真心三角形內接圓與原三角形邊長之交點

求證：原三角形內切圓與三邊切點與真心三角形三內切圓與三邊切點共點

證明：

1.

因為真心三角形全等

所以 $\overline{I_1T_1}$ = $\overline{I_3T_3}$ (真心三角形內切圓半徑)，且 $\overline{I_1I_3}$ // $\overline{T_1T_3}$

故四邊形 $T_1T_3I_3I_1$ 為等腰梯形

將 $\overline{I_1T_1}$ 、$\overline{I_3T_3}$ 延長交於 P

因為$\angle PI_3I_1 = \angle PT_3T_1$ 、 $\angle PI_1I_3 = \angle PT_1T_3$ (同位角相等)

且$\angle PT_3T_1 = \angle PT_1T_3$(等腰梯形兩底角)

$\therefore \angle PI_3I_1 = \angle PI_1I_3$， $\triangle I_1I_3P$ 為等腰三角形

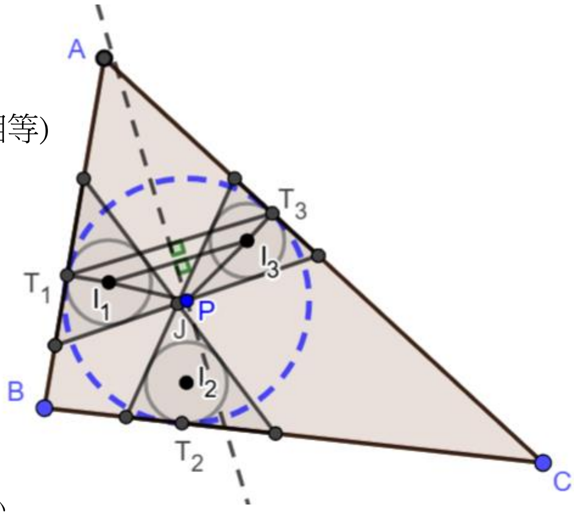
所以 $\overline{I_1P}$ = $\overline{I_3P}$ ，又 $\overline{I_1T_1}$ = $\overline{I_3T_3}$

故 $\triangle T_1T_3P$ 為等腰三角形

$\therefore$ P 在 $\overline{I_1I_3}$、$\overline{T_1T_3}$ 中垂線上

另外三邊同理，則 P 為$\triangle T_1T_2T_3$ 、 $\triangle I_1I_2I_3$ 之外心

所以 P、I_1、T_1 共線、P、I_2、T_2 共線、P、I_3、T_3 共線



2.

又P 為 $\triangle I_1I_2I_3$ 之外心，所以$\overline{PT_1} = \overline{PT_2} = \overline{PT_3}$

且$\overline{PT_1} \perp \overline{AB}$、$\overline{PT_2} \perp \overline{BC}$ 、$\overline{PT_3} \perp \overline{AC}$

根據角平分線性質，P 在$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的角平分線上

因此 P 與原三角形之內心 I 共點

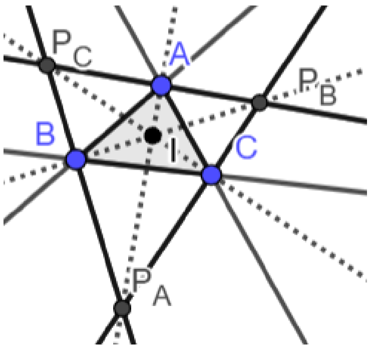
故原△內切圓與三邊切點 D、E、F＝真心△三內切圓與三邊切點T_1、T_2、T_3

(二)性質 17：原三角形內心、旁心三角形垂心、真內三角形外心、真內切三角形外心、真 W 三角形外心共點

已知：原△ABC中，I 為內心，P_H為旁心△$P_AP_BP_C$的垂心，O'為真內△$I_1I_2I_3$的外心，W_O為真 W△$W_AW_BW_C$的外心

求證：原三角形內心、旁心三角形垂心、真內三角形外心、真內切三角形外心、真 W 三角形外心共點，即證明I、P_H、O'、W_O共點

證明：



1.

原三角形內心為內角角平分線之交點

旁心為兩外角平分線及一內角平分線的交點

$\angle P_CCP_B = \angle P_CCP_A = 90°$

$\angle P_AAP_B = \angle P_AAP_C = 90°$

$\angle P_BBP_C = \angle P_BBP_A = 90°$

$\overline{P_AA}$、$\overline{P_BB}$、$\overline{P_CC}$為原三角形角平分線、旁心三角形垂線

故原三角形內心與旁心三角形垂心共點

2.

由性質 16 可知，原三角形內心、真內三角形外心、真內切三角形外心共點

3.

又性質 15 真內三角形頂點、真 W 三角形頂點六點共圓

故真內三角形外心與真 W 三角形外心共點

故原三角形內心、旁心三角形垂心、真內三角形外心、真 W 三角形外心共點

六、 真心、真外三角形關係

(一)性質 18：真外三角形外心為真心

已知：△ABC，J 為真心，O_1、O_2、O_3分別為三個真心三角形的外心

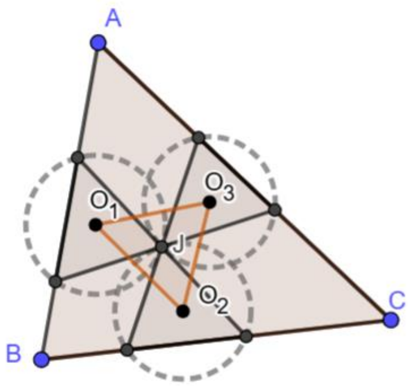
求證：真外三角形外心為真心

證明：

因為三真心三角形全等

所以其外接圓半徑相同，即 $\overline{O_1J}$ 、$\overline{O_2J}$ 、$\overline{O_3J}$ 等長

故 J 為真外三角形外心



七、 真心三角形、原三角形與旁外三角形關係

(一)性質 19：旁外三角形相似於真心三角形

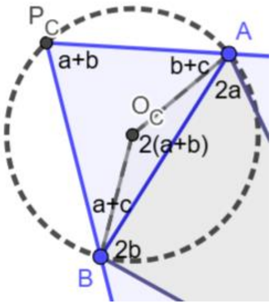
根據參考資料(三)可知，旁外三角形相似於旁心三角形，又由性質 3 旁心三角形相似於真心三角形，故旁外三角形相似於真心三角形。

(二)性質 20：原△三頂點與旁外△三頂點，六點共圓

已知：△ ABC，P_A、P_B、P_C為旁心，O_A、O_B、O_C分別為三個旁邊三角形的外心

求證：原△三頂點與旁外△三頂點，六點共圓

證明：

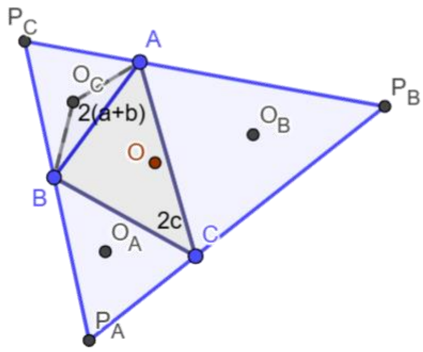


1.

△ ABC 中，$\angle A = 2a°$、$\angle B = 2b°$、$\angle C = 2c°$

O_C為△ABP_C的外心

$\angle AO_CB = 2\angle AP_CB$(共弧)



2.

$\angle AP_CB = (a+b)°$，$\angle AO_CB = 2(a+b)°$

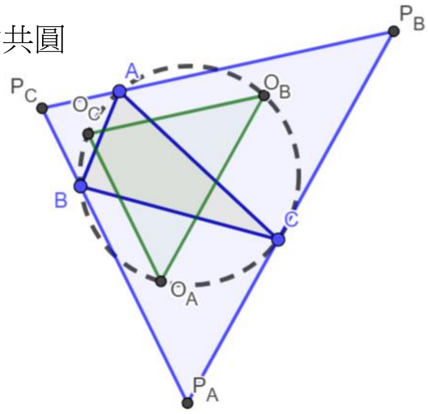
又$\angle C = 2c°$，且$2a + 2b + 2c = 180°$

$\therefore \angle AO_CB + \angle C = 2(a+b)° + 2c° = 180°$

故A、C、B、O_C四點共圓

同理可證A、B、C、O_B和B、A、C、O_A四點共圓

故原△三頂點A、B、C與旁外△三頂點O_A、O_B、O_C，六點共圓



(三)性質 21：原△外心、旁外△外心共點

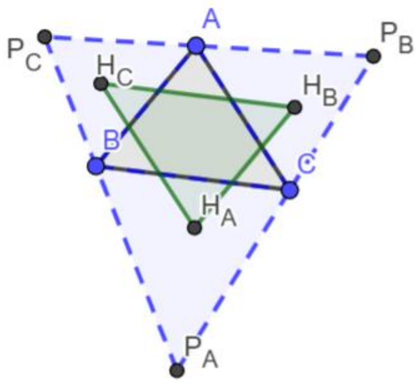
因原△三頂點與旁外△三頂點六點共圓

故原△外心、旁外△外心共點

八、旁垂三角形與原三角形關係

(一)性質 22：旁垂三角形全等於原三角形

根據參考資料(三)可知，旁垂三角形全等於原三角形



九、 各圓心與真心的共線性質

(一)性質 23：四點共圓圓心、真 W 三角形頂點、真心、真心三角形內心，四點共線

已知：原△ABC 中，Wo_1、Wo_2、Wo_3為四點共圓圓心，W_A、W_B、W_C真心三角形頂點

I_1、I_2、I_3為真內三角形內心，J 為真心

求證：四點共圓圓心、五點共圓圓心、真心、真心三角形內心，四點共線

證明：

由性質 12 可知，真心 J 為△$W_AW_BW_C$的垂心

$\therefore \overleftrightarrow{W_AJ} \perp \overline{W_BW_C}$

又$\overline{W_BI_2} = \overline{W_BJ}$；$\overline{W_CI_2} = \overline{W_CJ}$

所以四邊形$W_CJW_BI_2$為箏形

$\therefore \overline{JI_2} \perp \overline{W_BW_C}$ (箏形兩對角線呈直角)

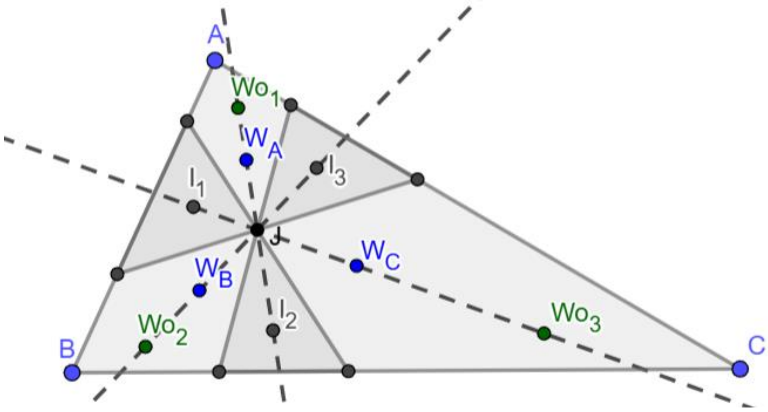
$\therefore W_A$、J、I_2三點共線

由性質 11 中，$\angle W_AJP = \angle W_AJU$

又Wo_1在$\overline{PU}$的中垂線上

故Wo_1、W_A、J、I_2四點共線

同理可證Wo_2、W_B、J、I_3四點共線，Wo_3、W_C、J、I_1四點共線

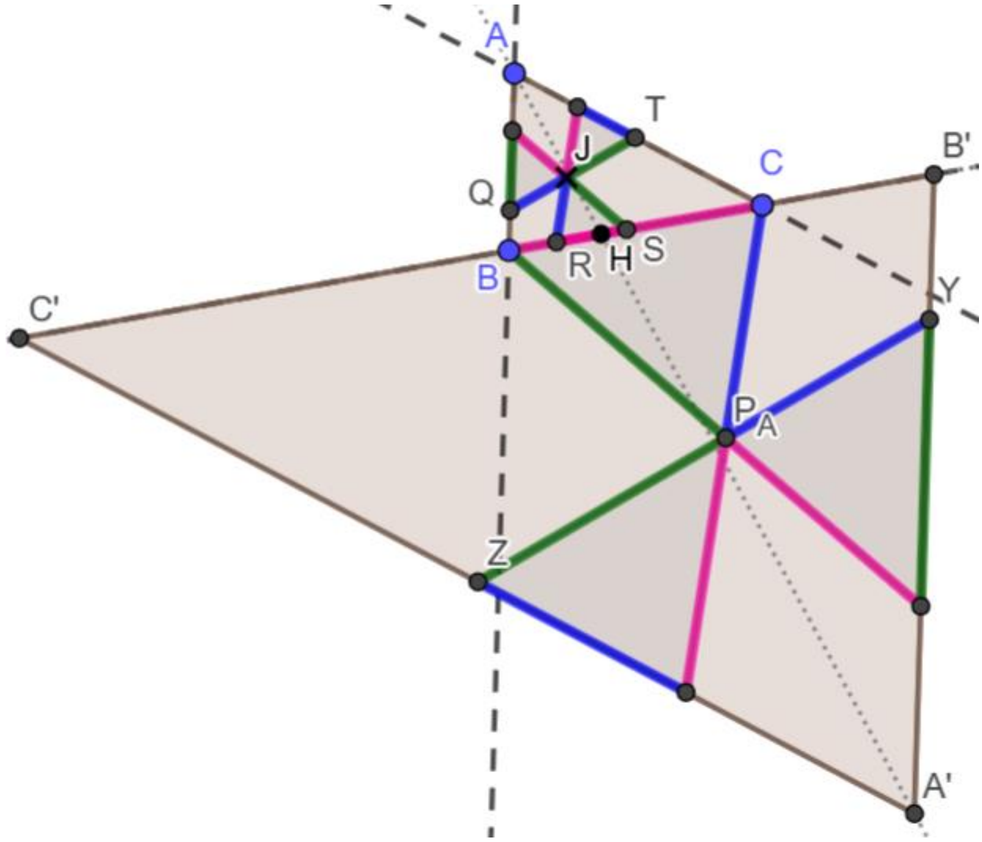


十、 真心作圖法之探討

知道原三角形、旁邊三角形、旁心三角形與真心三角形的邊長比例關係後，我們想知道如何以尺規作圖找出任意三角形中真心的位置。

(一)真心作圖法之發想

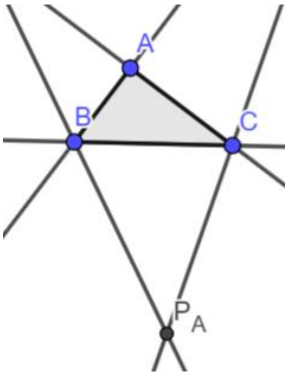
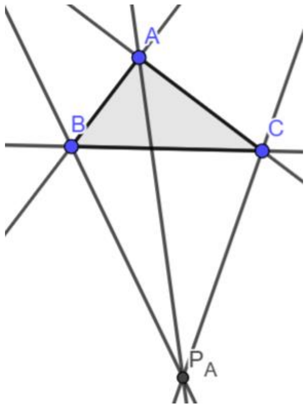
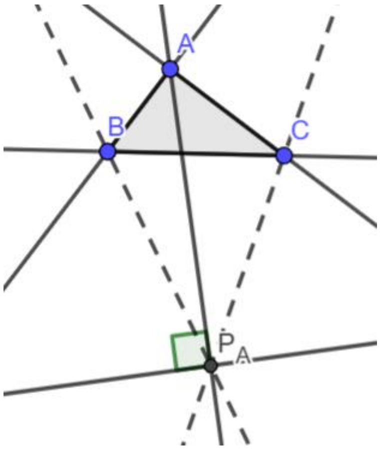
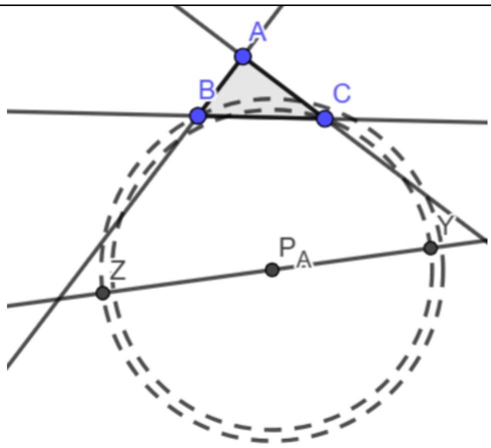
由性質 3 可知真心$\triangle$ SRJ與旁邊$\triangle$ BCP_A相似，因此我們利用這個關係，將旁邊$\triangle$ BCP_A看成真心 $\triangle$ SRJ 的旋轉放大，將原$\triangle$ ABC依照同比例旋轉放大為$\triangle$ $A'B'C'$，此時旁邊$\triangle$ BCP_A即為放大$\triangle$ $A'B'C'$之真心三角形，且旁心P_A為放大$\triangle$ $A'B'C'$之真心，令其縮放中心為 H。



(二)真心作圖法步驟

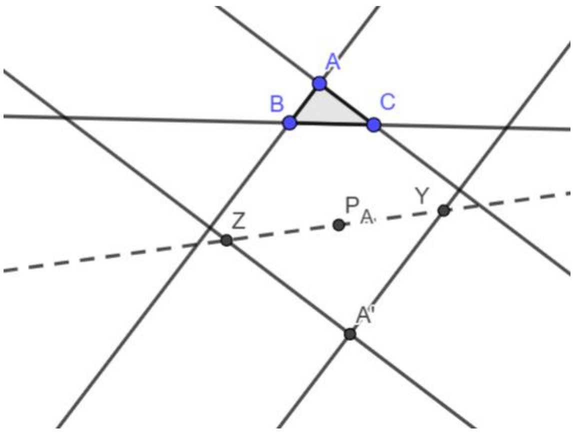
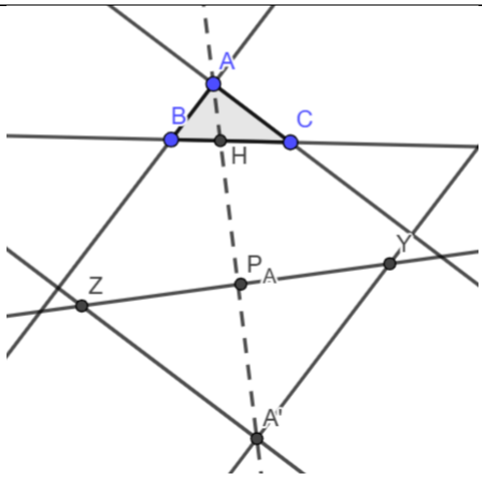
關鍵步驟一：找出放大三角形對應點 Q、T 之 Y、Z

已知真心三角形全等，故對應邊長等長，又$\overline{QT}$垂直∠A角平分線，因此利用此概念，分別以 B、C 到旁心P_A的距離為半徑畫圓，取兩圓與過P_A垂直∠A角平分線之線段的交點，即為所求 Y、Z。

步驟 1.任意三角形△ ABC，取∠A對應旁心P_A	步驟 2.作∠A的角平分線
	
步驟 3.作過旁心P_A的∠A角平分線垂線	步驟 4.以旁心P_A為原心，分別以三角形兩個頂點 B、C 到旁心P_A的距離為半徑畫兩個圓 取兩圓與步驟 3 垂線的交點 Y、Z
	

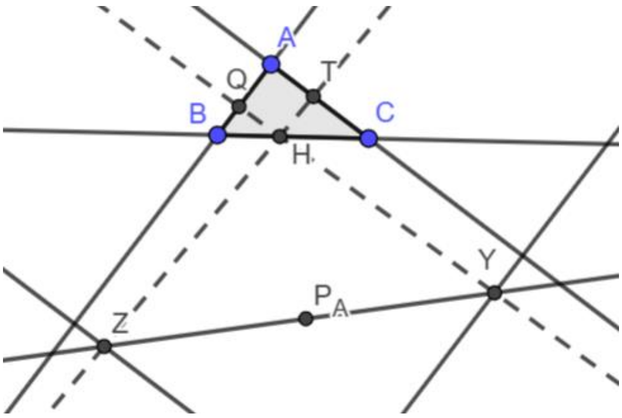
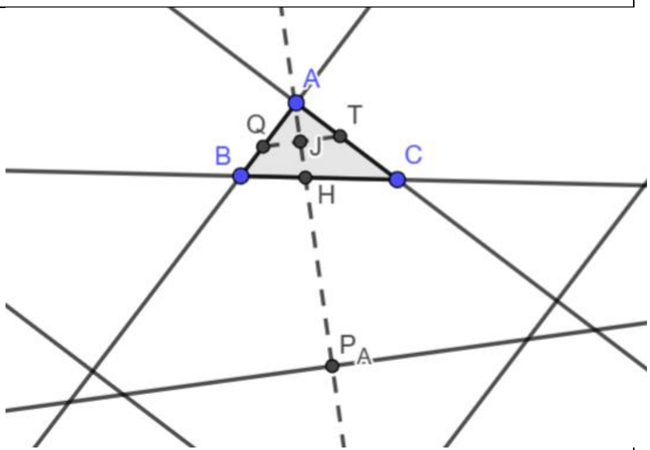
關鍵步驟二：找到縮放中心

縮放中心為兩三角形各對應點連線之交點，作原三角形兩邊長$\overline{AB}$、$\overline{AC}$，過 Y、Z 兩焦點的平行線，取兩平行線的交點A'，連接A、A'；B、B'；C、C'，其交點即為縮放中心。

步驟 5.作原三角形兩邊長$\overline{AB}$、$\overline{AC}$，過 Y、Z 兩焦點的平行線，取兩平行線的交點A'	步驟 6.取$\overline{AA'}$與原三角形邊長$\overline{BC}$的交點 H，即為原三角形與放大三角形的旋轉中心
	

關鍵步驟三：利用縮放中心找出真心

作$\overleftrightarrow{ZH}$、$\overleftrightarrow{YH}$與原三形邊長的交點即為對應之 Q、T，再作P_A與 H 的連線，與$\overline{QT}$的交點即為所求 J。

步驟 7.作直線$\overleftrightarrow{ZH}$、$\overleftrightarrow{YH}$，分別取其與原三形邊長$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的交點 Q、T	步驟 8.作旁心P_A與 H 的連線，與$\overline{QT}$的交點即為所求 J
	

陸、結論

根據以上討論，我們得出以下結論：

已知：原△ABC，旁心△$P_AP_BP_C$，旁邊△BCP_A、△ACP_B、△ABP_C

真心△PQJ、△RSJ、△TUJ

真內△$I_1I_2I_3$，真內切△DEF，真外△$O_1O_2O_3$

旁內△$I_AI_BI_C$，旁外△$O_AO_BO_C$，旁垂△$H_AH_BH_C$

真W△$W_AW_BW_C$

一、相似性質

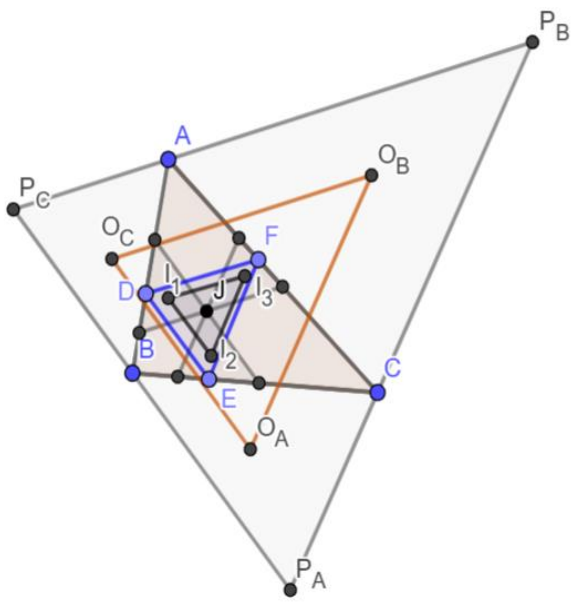
(一)旁邊三角形~旁心三角形~真心三角形≅真內三角形~真內切三角形~旁外三角形

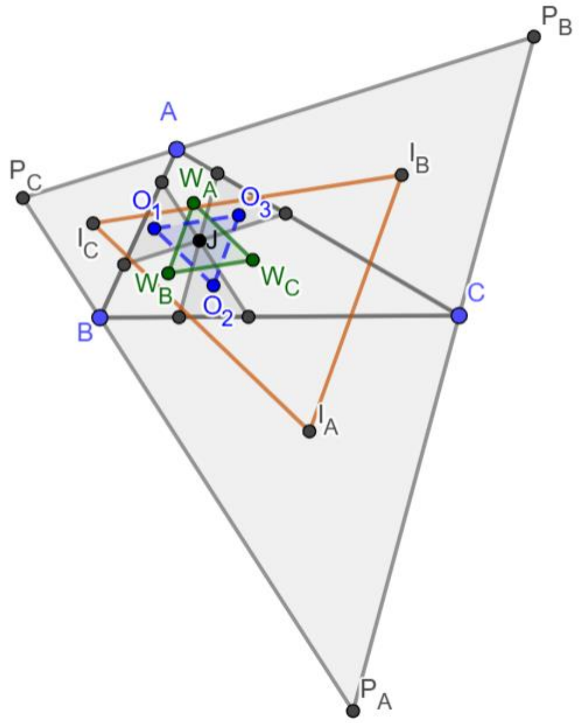
即△BCP_A~△ACP_B~△ABP_C~△$P_AP_BP_C$~△JPQ≅△JRS≅△JTU≅△$I_1I_2I_3$

~△DEF~△$O_AO_BO_C$（性質 3、6、8、19）

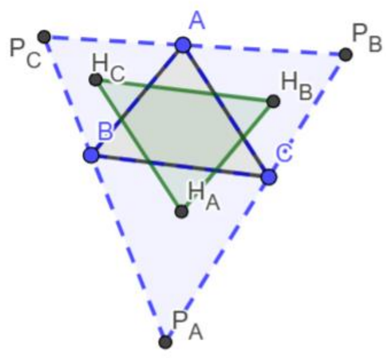
(二)旁內三角形~真 W 三角形≅真外三角形，即△$I_AI_BI_C$~△$W_AW_BW_C$≅△$O_1O_2O_3$

（性質 13、15）





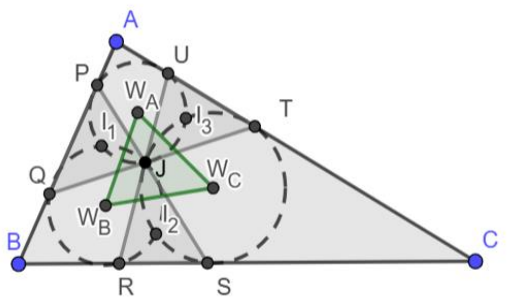
(三)旁垂三角形≅原三角形，即△ABC≅△$H_AH_BH_C$（性質 22）

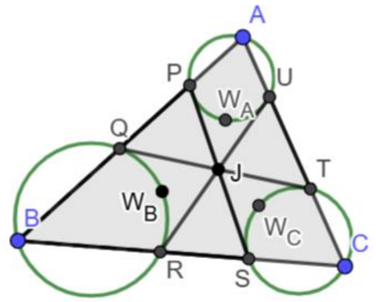


二、共圓性質

(一)真心、真心三角形內心*2、真心三角形頂點*2，五點共圓 (性質 9)

(二)真 W 三角形頂點、真心三角形頂點*2、圓三角形頂點，四點共圓 (性質 10)

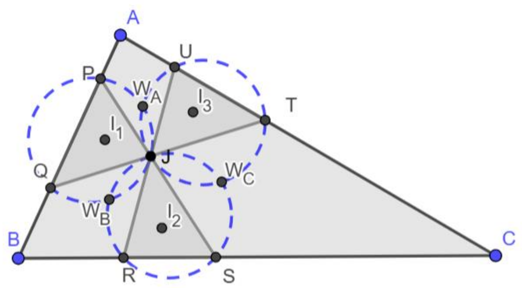


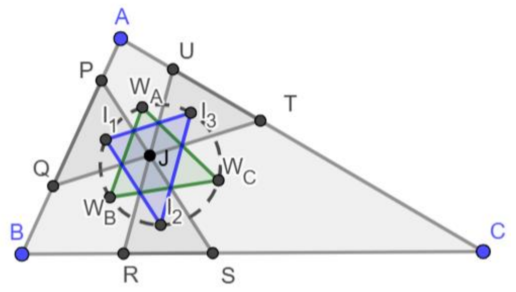


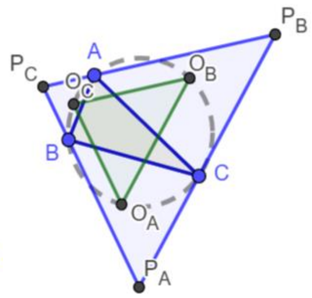
(三)真 W 三角形兩頂點和真心三角形三個頂點，五點共圓(性質 11)

(四)真內三角形頂點、真 W 三角形頂點，六點共圓 (性質 14)

(五)原三角形頂點、旁外三角形頂點，六點共圓 (性質 20)

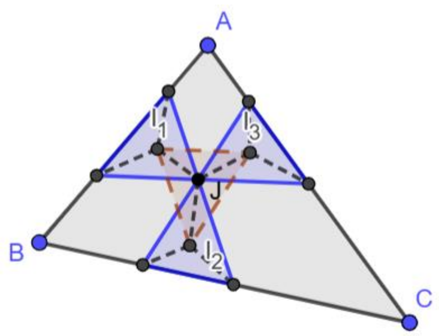


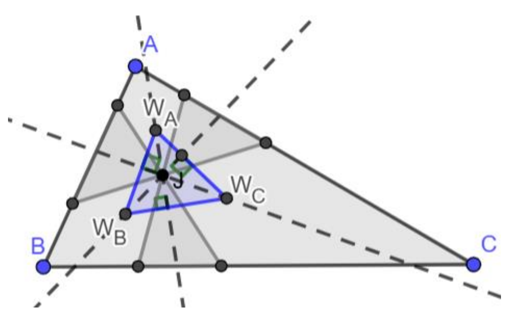


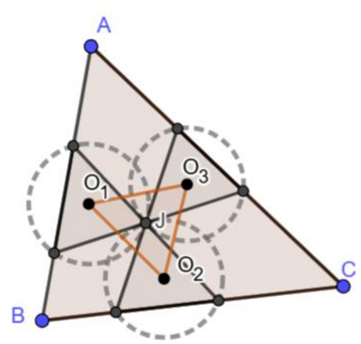


三、共點性質

(一)真心=真內三角形內心=真 W 三角形垂心=真外三角形外心 (性質 7、12、18)

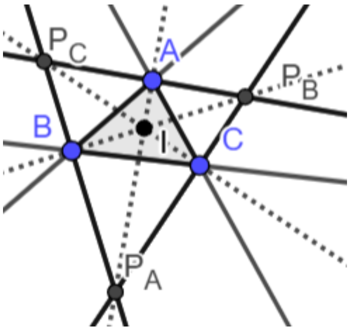


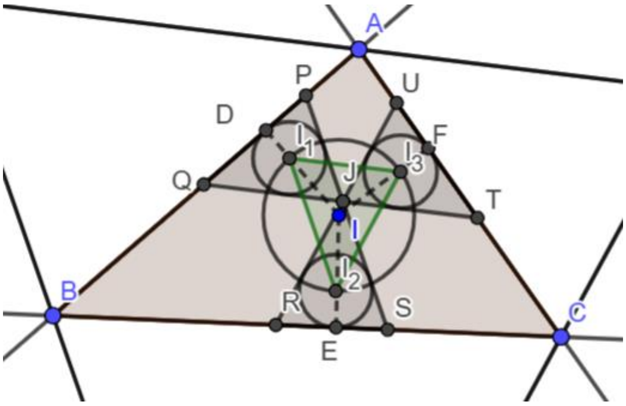




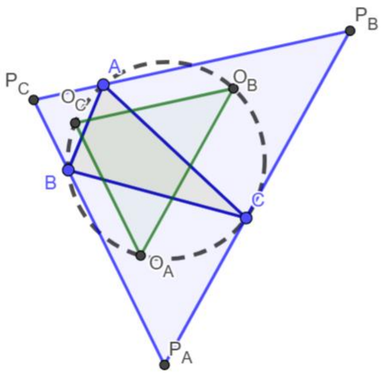
(二)原三角形內心=旁心三角形垂心=真內三角形外心=真內切三角形外心=

真 W 三角形外心 (性質 17)

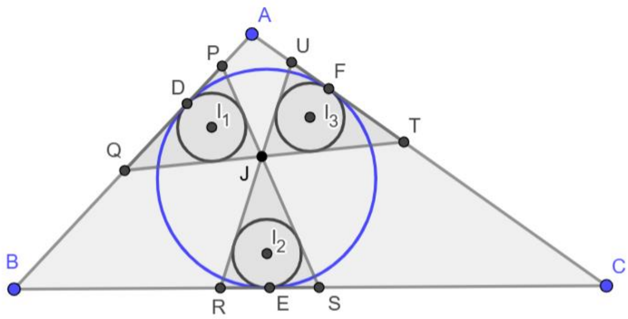




(三)原三角形外心=旁外三角形外心 (性質 21)



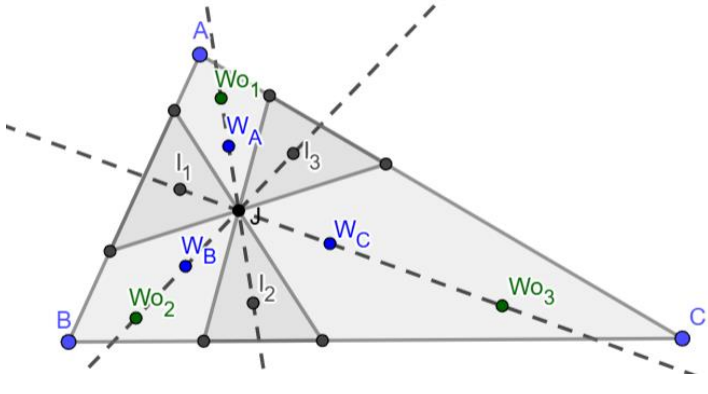
(四)原三角形內切圓與三邊切點與真心三角形三內切圓與三邊切點共點(性質 16)



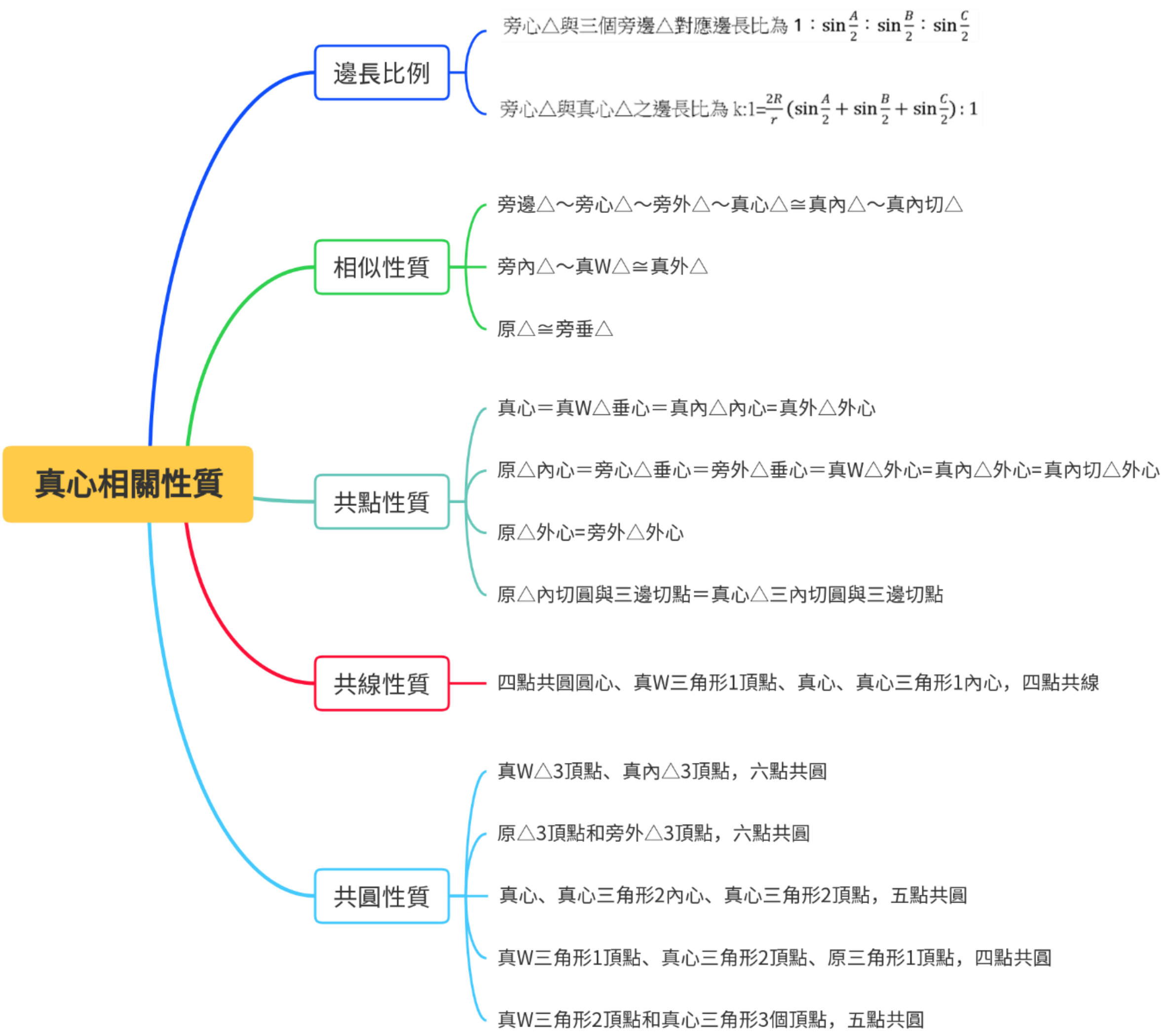
四、共線性質

(一) 四點共圓圓心、真 W 三角形頂點、真心、真心三角形內心，四點共線

且三線交於真心 (性質 23)



我們將以上四個性質整理重點如下圖：



柒、參考文獻資料

一、chris cambré。Wabash Center 。資料引自：

https://www.geogebra.org/m/PBVRXsdU

二、hua0127。MathPro 數學補給站。資料引自：

https://math.pro/db/thread-1971-1-5.html

三、中華民國第 58 屆中小學科學展覽會。用“心” 。資料引自：

https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/58/pdf/NPHSF2018-030405.pdf

四、百度百科。旁心三角形。資料引自：

https://baike.baidu.com/item/%E6%97%81%E5%BF%83%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2/8746734#reference-3