新竹市第四十三屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：　數學科

組　　別：　國中組

作品名稱：　多邊形對角線內接相似形之研究

關 鍵 詞：　多邊形、對角線

編　　號：

多邊形對角線內接相似形之研究

摘要

我們對多邊形對角線內接的圖形有濃厚興趣，並希望透過科展深入探索這些圖形的數學特性。研究的核心問題是如何透過對角線連接形成內接的相似多邊形，並分析這些圖形之間的面積關係與數學規律。研究方法：1.先手繪多邊形並利用坐標計算面積。2.轉而使用 GeoGebra（GGB） 繪圖工具，提高研究效率。3.透過三角函數（和差角公式） 計算內接圖形的面積與中心距離。4.研究不同跳點數的對角線 如何影響內接多邊形的大小。主要發現：1.不同跳點數的對角線形成不同大小的內接多邊形，跳點數越多，內接多邊形越小。2.正多邊形內部可形成多種相似的內接多邊形，其面積與邊數存在數學關係。3.推導出多邊形內接圖形的數學公式，描述內接圖形的面積與頂點到中心的距離。

壹、 前言

我們選擇研究這個主題,是因為我們三個都對多邊形對角線內接的圖形很有興趣,從小沒事就會正多邊的對角線連起來,畫出類似纏繞畫的圖樣.因此我們想要透過這次科展,對這個主題進行深入的研究。

將多邊形的對角線互相連接,可以得到一個較小的多邊形,而且新的多邊形與最外層的原始多邊形相似（如下圖 1~圖 4），依照每條對角線經過的頂點數,我們將這些對角線歸類為跳點數 1,2,3...跳點數 1 代表該對角線從一頂點出發，經過另外一個頂點,也就是這條線上總共包含了 2 個多邊形的頂點,是多邊形的一條邊。跳點數 2 則表示經過 3 個頂點，是多邊形最外層的對角線。不同跳點數對角線可以構成不同尺寸的內部多邊形，具有下列性質：

一、跳點數越多的對角線,所連成的內部多邊形越小。

二、最外層多邊形邊數越多，可在內部形成越多種不同跳點數的對角線,即能形成越多種不同大小的內部多邊形。

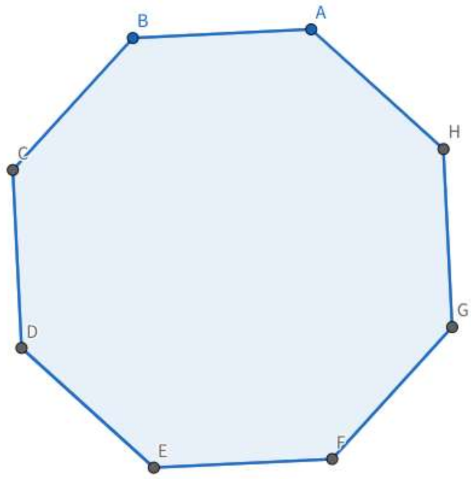


圖 1 跳點數 1（原始圖形）

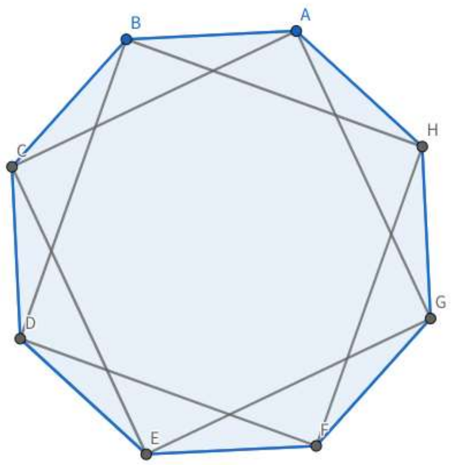


圖 2 跳點數 2

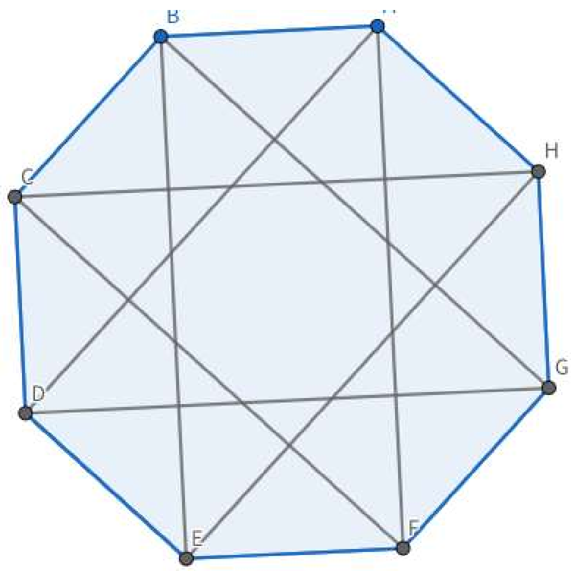


圖 3 跳點數 3

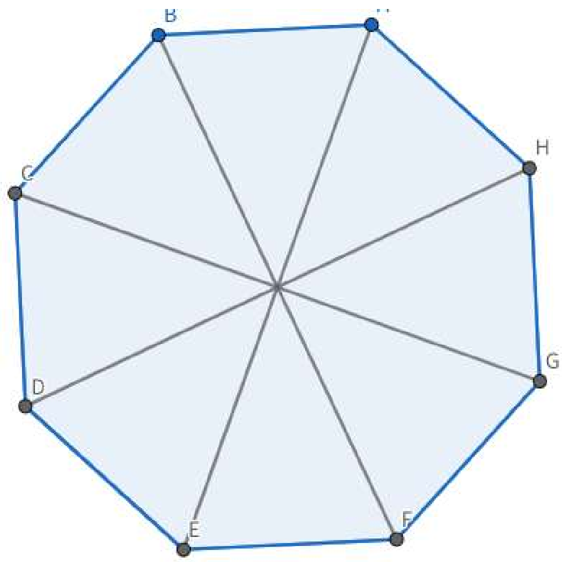


圖 4 跳點數 4(聚集成一點）

貳、 研究設備及器材

電腦 GGB 繪圖、紙筆

參、 研究過程或方法

因為我們一開始找不到合適的參考文獻，所以先用手繪的方式,把圖形繪出來後用坐標三角計算,這樣可以求出不同跳點數的面積,但因為這種方式速度太慢,後來改用 GGB 電腦繪圖,進度就加快了許多,也成功求出一般性的公式。

首先，我們將研究正多邊形其內部對角線,如何連接成一個與原本圖形相似但較小的正多邊形，並探討不同跳點數的對角線所形成的圖樣。在這過程中，我們會著重分析內接正多邊形與原正多邊形之間的面積關係，並試圖找出一般性的數學公式，進一步揭示其中的規律與特徵。

之後，我們將這些研究結果擴展到非正多邊形，探索這些圖形的對角線連接是否會產生類似的面積關係，並研究內接圖形面積的極值，尋找可能的數學模型和公式。我們希望通過這樣的研究，解答關於對角線內接圖形的數學問題，並深入理解其在不同原多邊形狀況下的變化與特徵，並為未來的數學探討奠定基礎。

使用公式：三角函數（和差角公式）

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

geogebra

一、在代數區把操作變量(n 邊形)製成滑桿（n)

圖 5

二、把應變量寫出（k：層數)

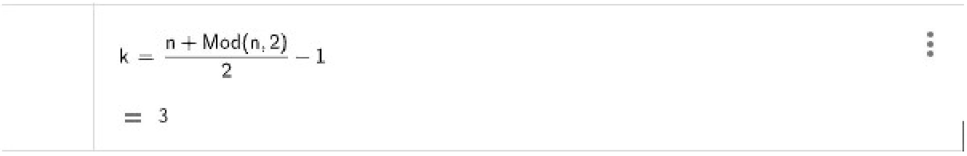


圖 6

三、打點：在繪圖區上把當基準(最大）的多邊形的頂點點出（其中 angle 為360°)（list1)

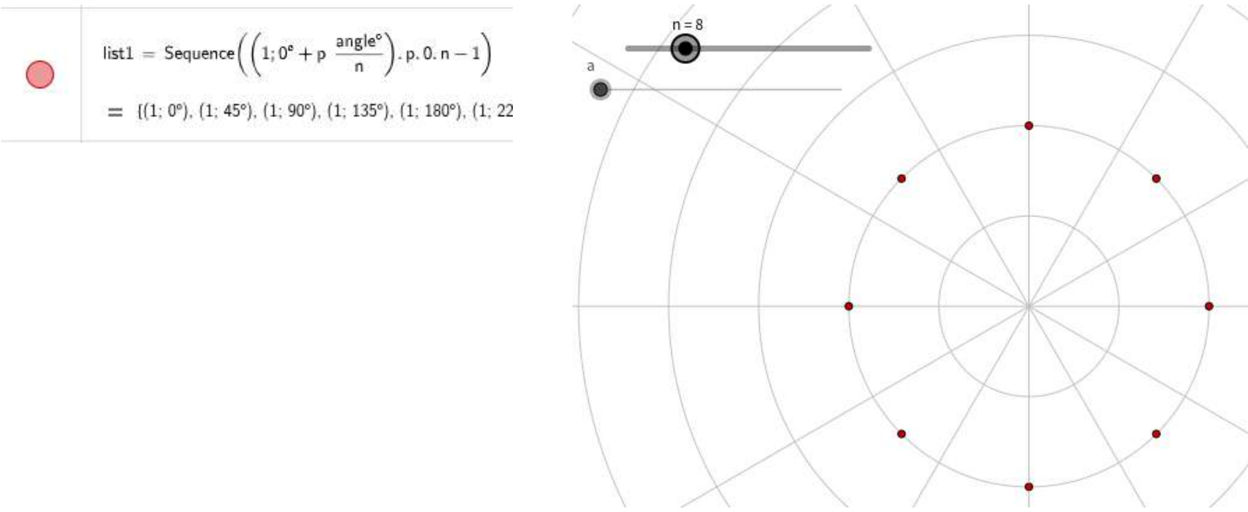


圖 7

四、連線：將 list1(最大正多邊形的頂點)的所有點連線

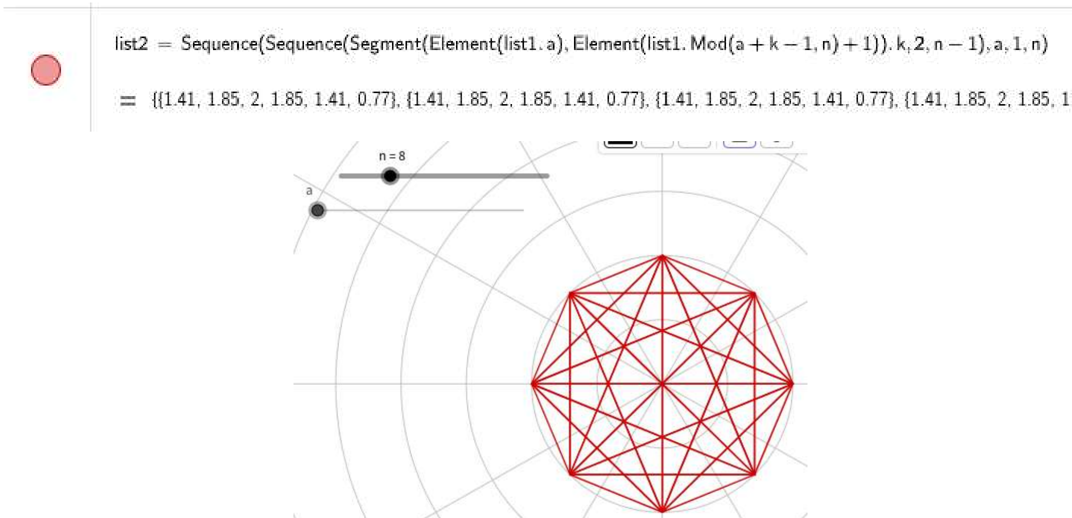


圖 8

五、將所有多邊形的頂點點出

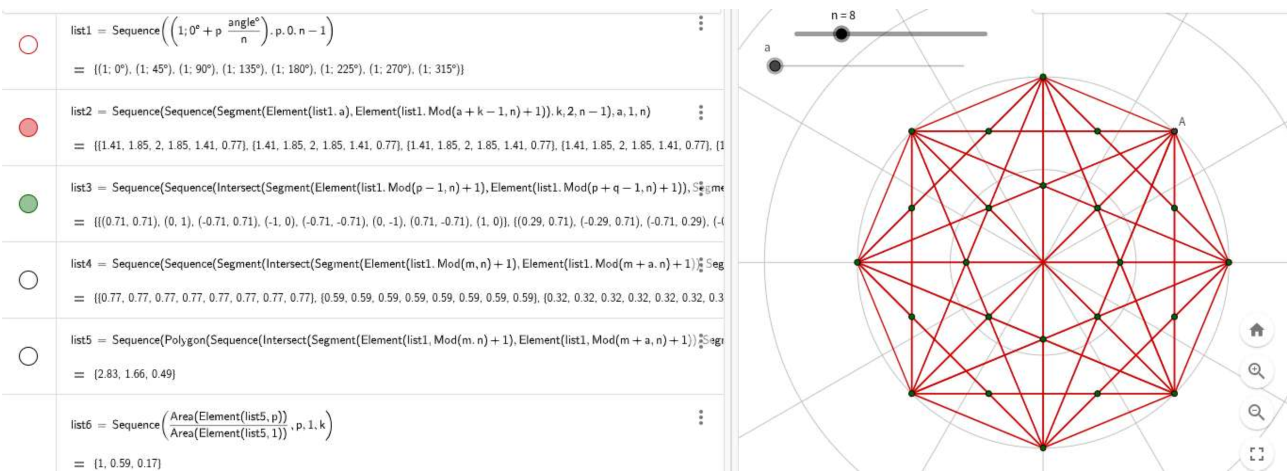


圖 9

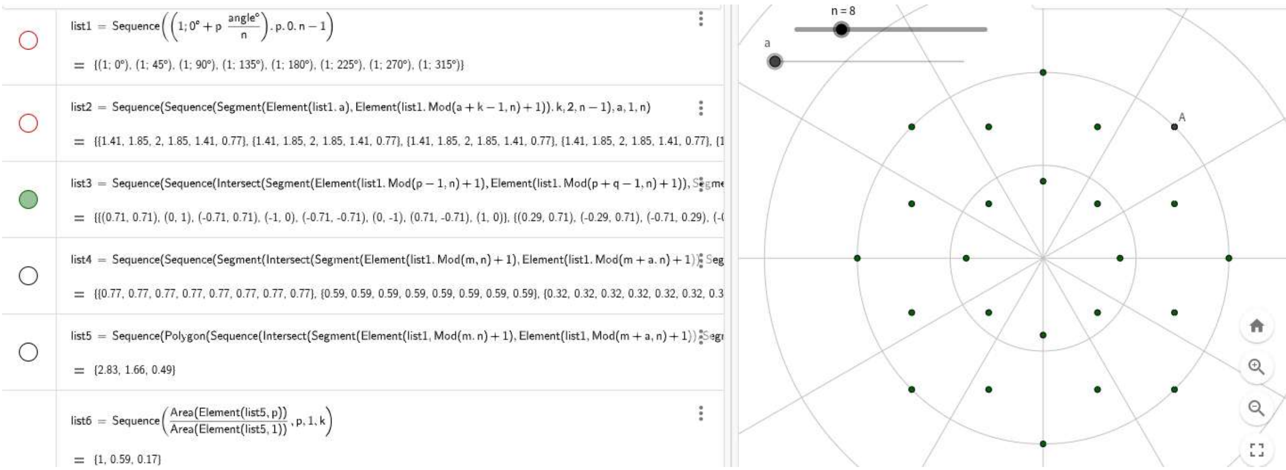


圖 10

六、將頂點連成多邊形

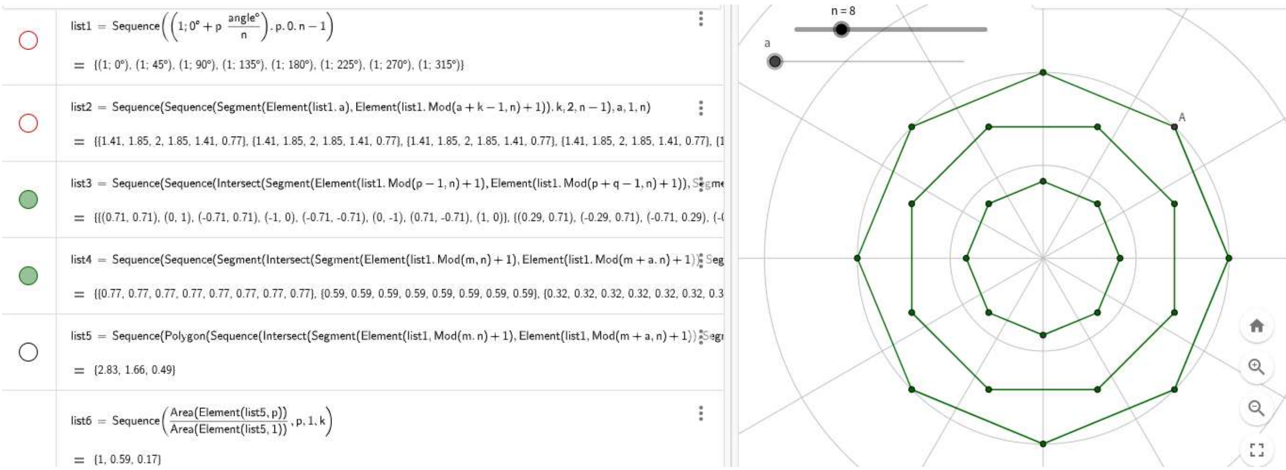


圖 11

七、將多邊形的頂點連到圓心

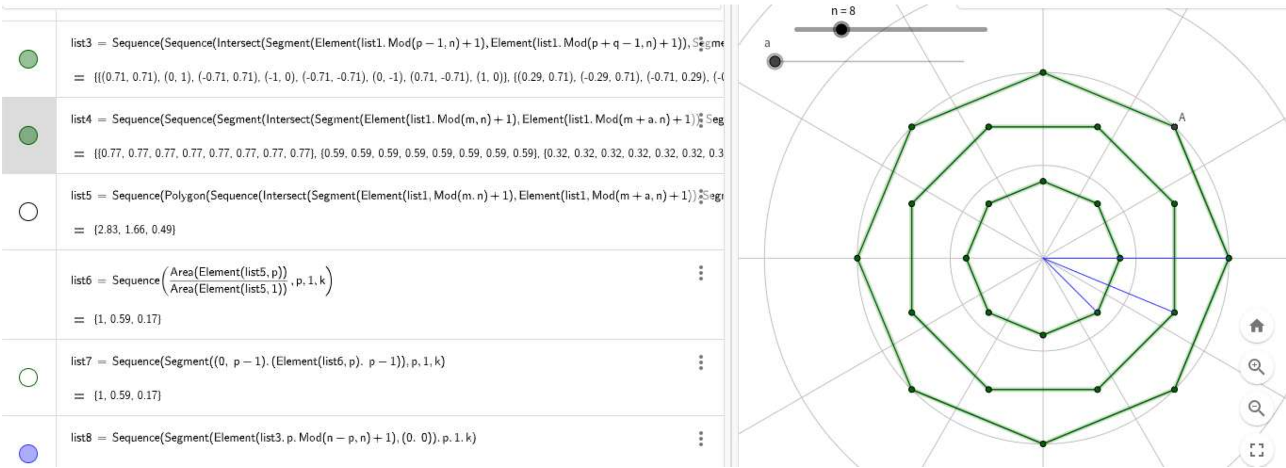


圖 12

肆、　研究結果

正 n 邊形的內接多邊形 $\phi = \dfrac{360^\circ}{n}$

$\alpha = \cos(a\phi) - 1$ ， $\beta = \cos(a\phi + \phi) - \cos(\phi)$
多邊形頂點到中心點的距離(如圖 13 藍色線段）
其中 a 為從外往內數的層數(例如 $a = 1$ 就是圖中最長的藍色線段

$$x^2 + y^2 = \frac{\cos(a\phi) + 1}{\cos(\phi) + 1}$$

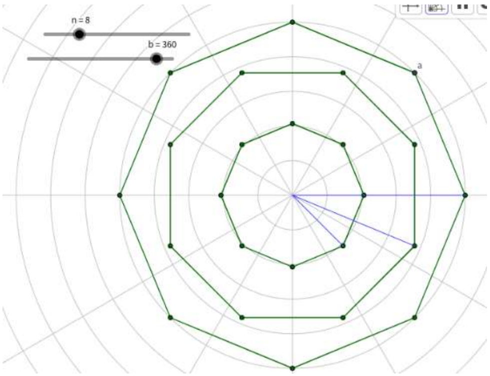
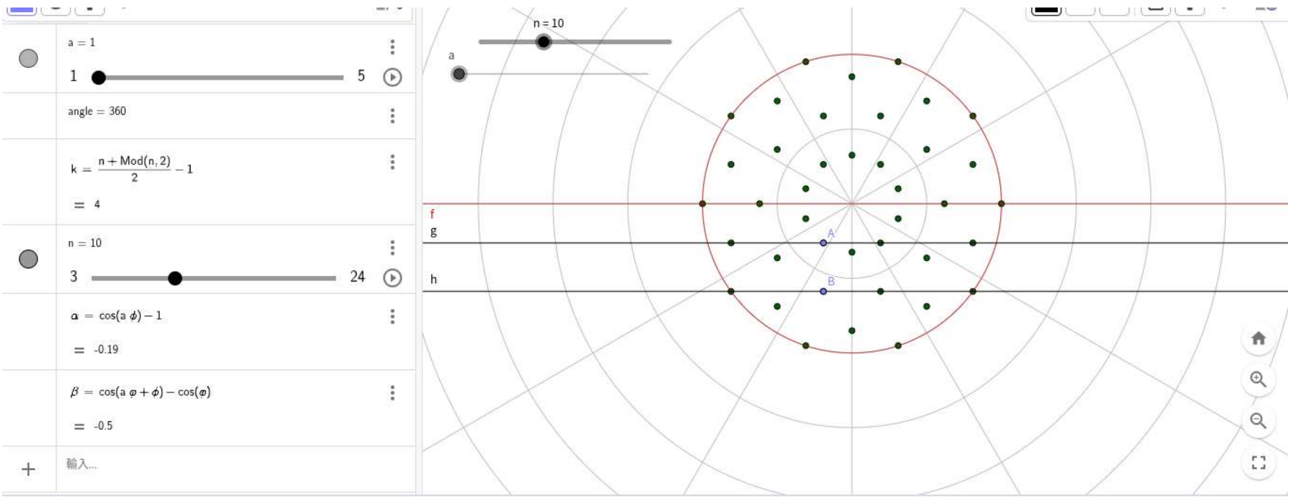
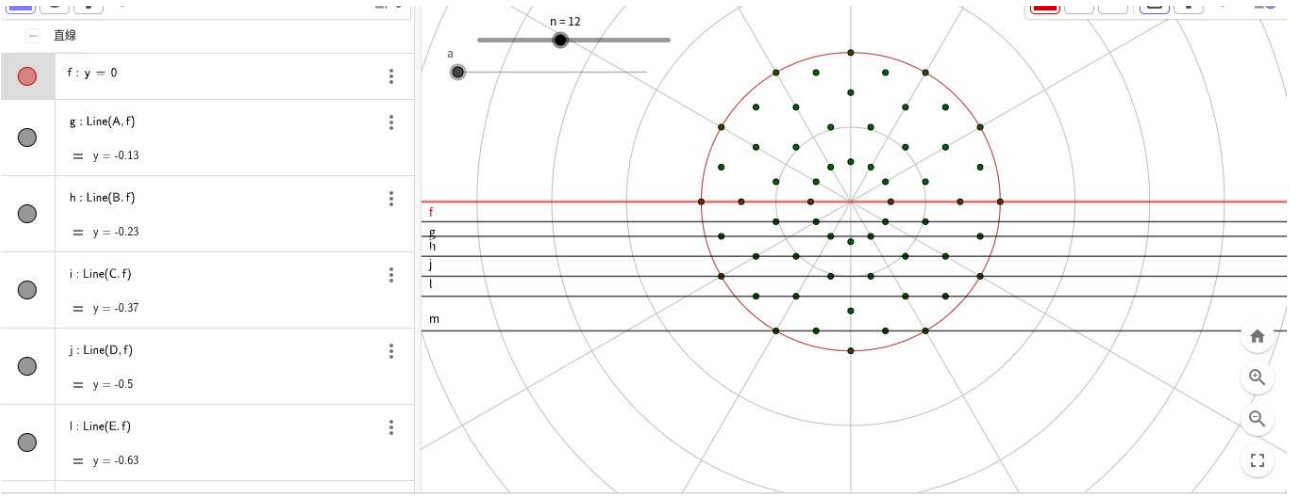


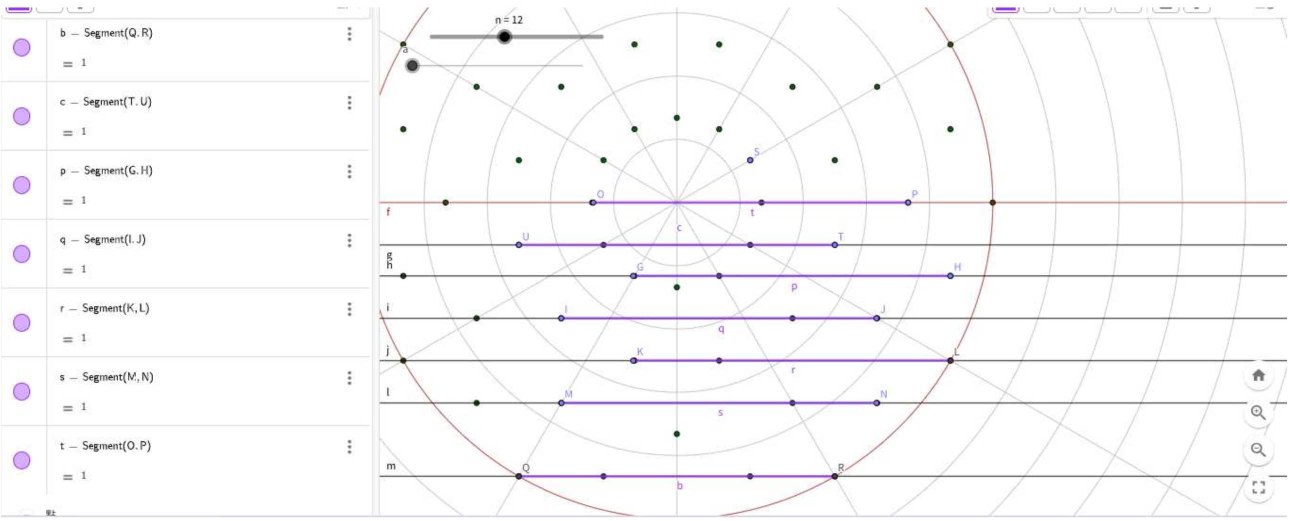
圖 13

在 ggb 中發現會有超過兩點在 $y = k$ $(k \in \mathbb{R})$ 上共線





且發現有多段線段的長度和最大的正多邊形長度相等



將 $x^2 + y^2 = \dfrac{\cos(a\phi)+1}{\cos(\phi)+1}$ 帶入 excel (n 為 3~24)，如下表

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	1										
4	1										
5	1	0.1459									
6	1	0.3333									
7	1	0.4789	0.0610								
8	1	0.5858	0.1716								
9	1	0.6646	0.2831	0.0341							
10	1	0.7236	0.3820	0.1056							
11	1	0.7687	0.4658	0.1874	0.0220						
12	1	0.8038	0.5359	0.2679	0.0718						
13	1	0.8317	0.5943	0.3423	0.1334	0.0154					
14	1	0.8540	0.6431	0.4090	0.1981	0.0521					
15	1	0.8723	0.6841	0.4680	0.2613	0.0998	0.0114				
16	1	0.8873	0.7187	0.5198	0.3209	0.1522	0.0396				
17	1	0.8999	0.7481	0.5652	0.3759	0.2056	0.0775	0.0088			
18	1	0.9105	0.7733	0.6051	0.4260	0.2578	0.1206	0.0311			
19	1	0.9195	0.7950	0.6401	0.4715	0.3075	0.1659	0.0619	0.0070		
20	1	0.9272	0.8138	0.6709	0.5125	0.3542	0.2113	0.0979	0.0251		
21	1	0.9339	0.8302	0.6982	0.5496	0.3976	0.2557	0.1365	0.0506	0.0057	
22	1	0.9397	0.8445	0.7223	0.5830	0.4377	0.2983	0.1761	0.0810	0.0207	
23	1	0.9447	0.8572	0.7438	0.6131	0.4747	0.3388	0.2157	0.1143	0.0422	0.0047
24	1	0.9492	0.8683	0.7630	0.6403	0.5087	0.3770	0.2543	0.1490	0.0681	0.0173

伍、　討論

一、發現相鄰的兩個正多邊形兩兩距離最近頂點的距離相等（如圖 14 紅線）

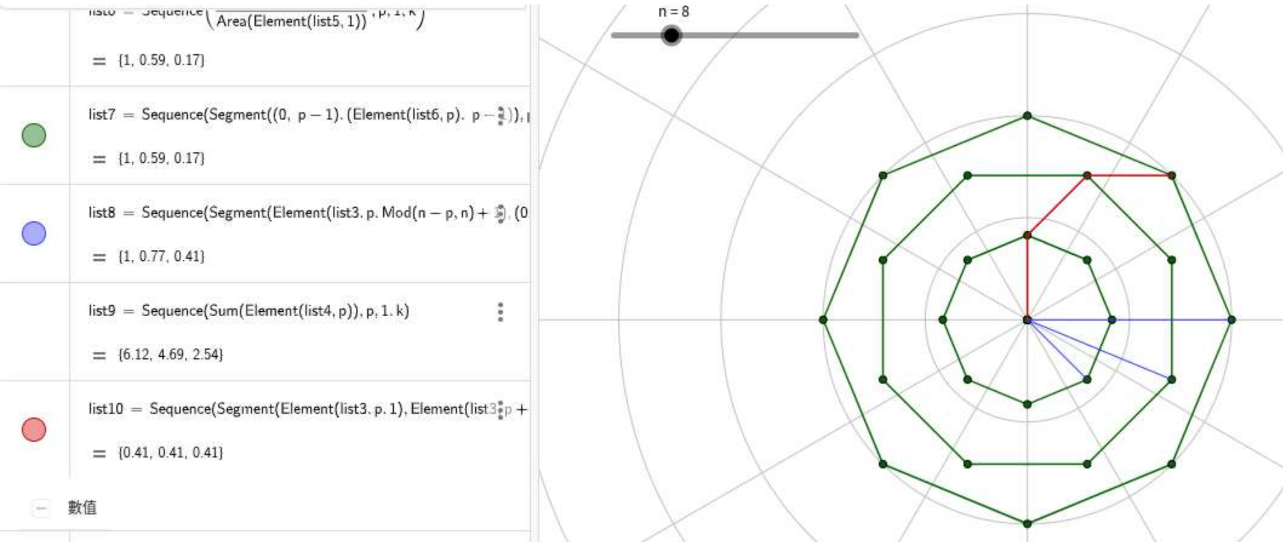
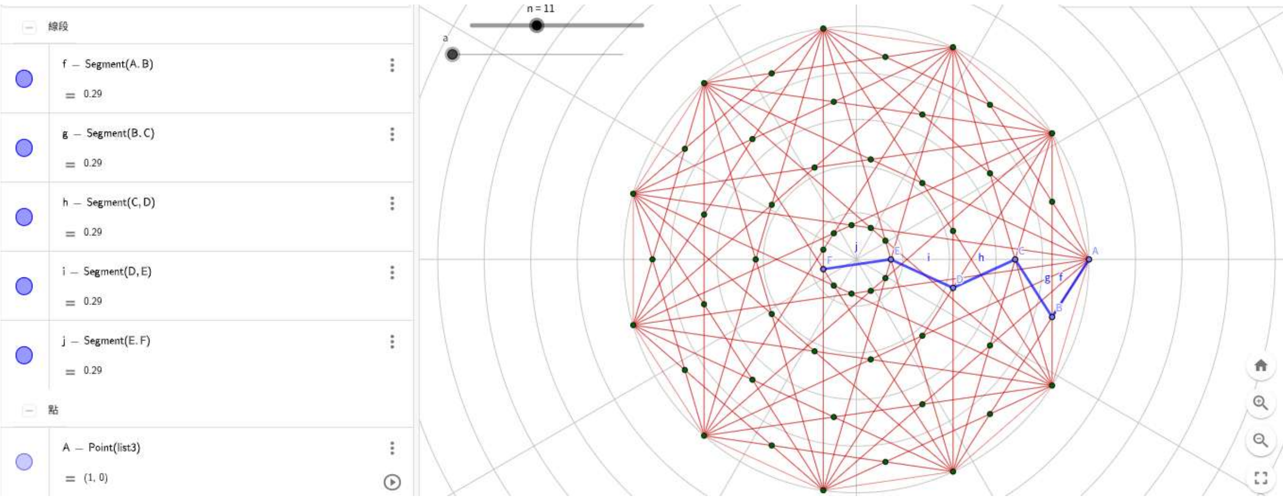
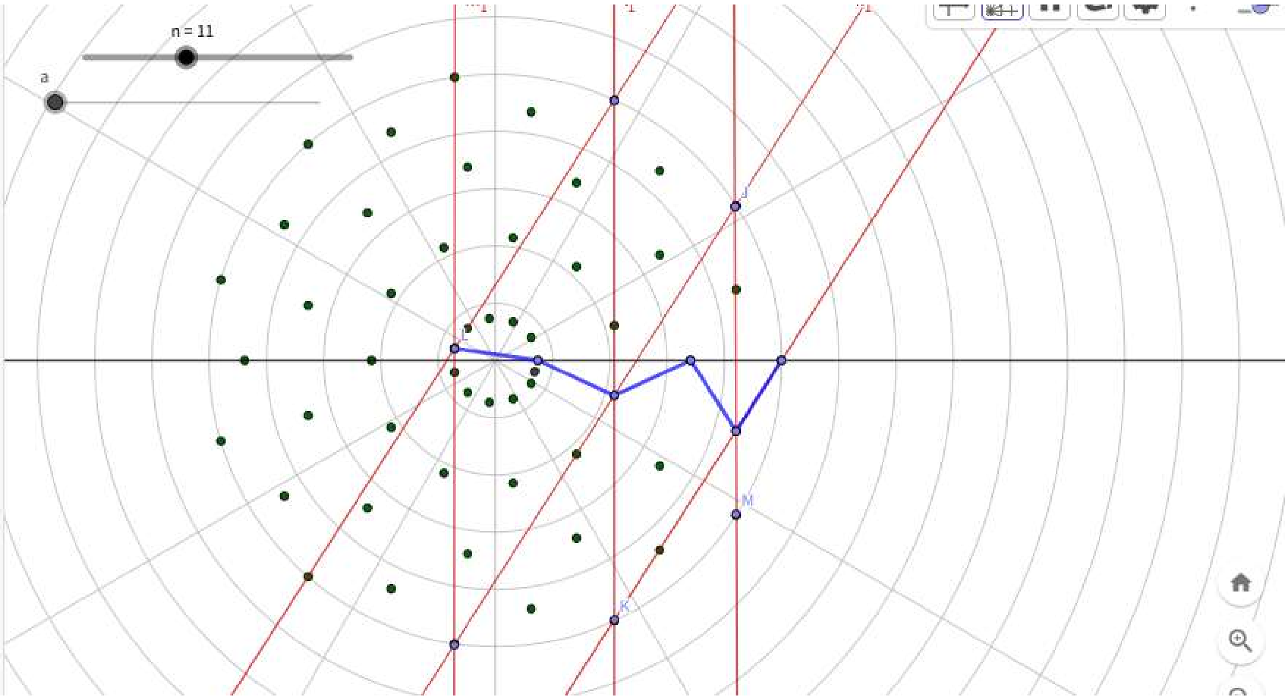


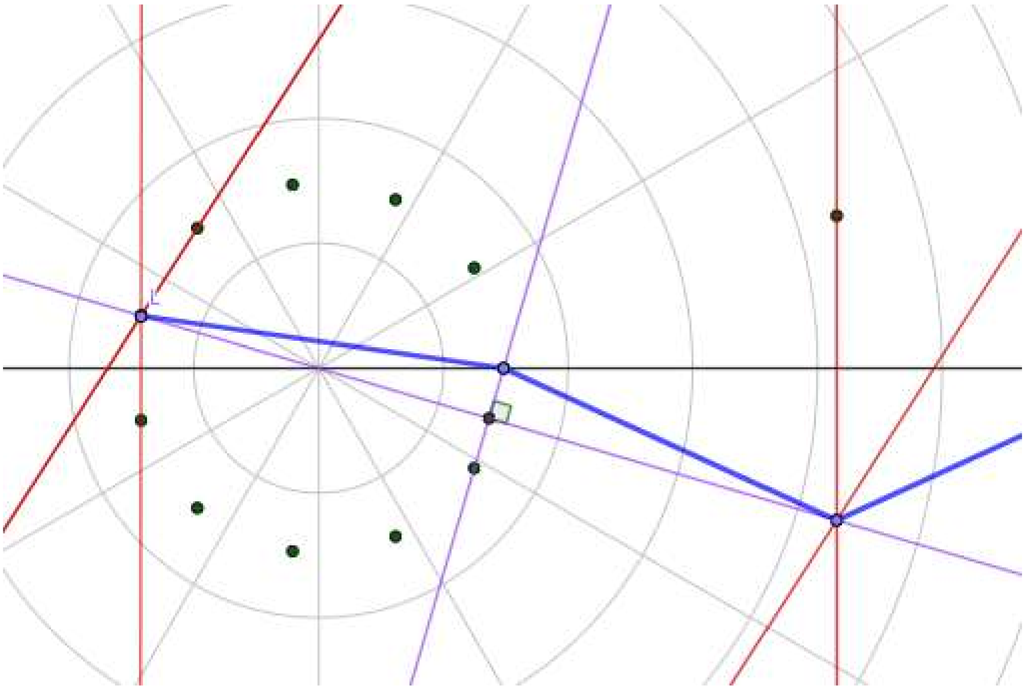
圖 14

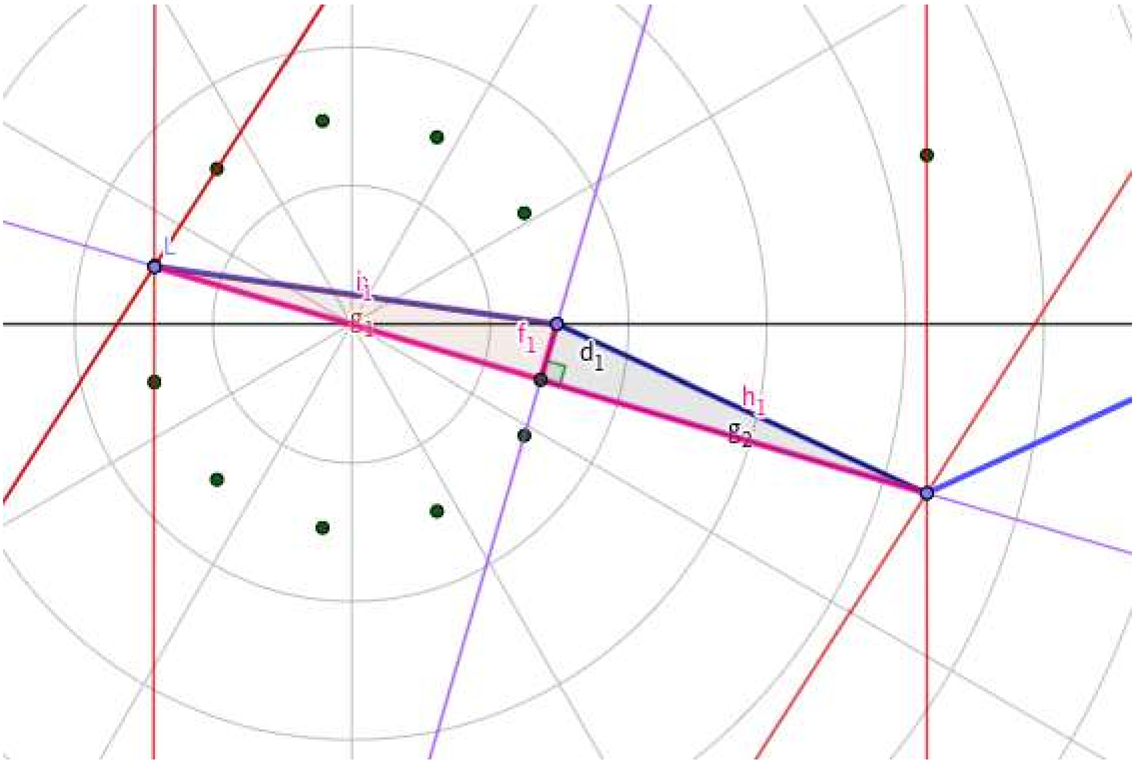


但對計算各個正多邊形的連心距或面積的幫助不大。



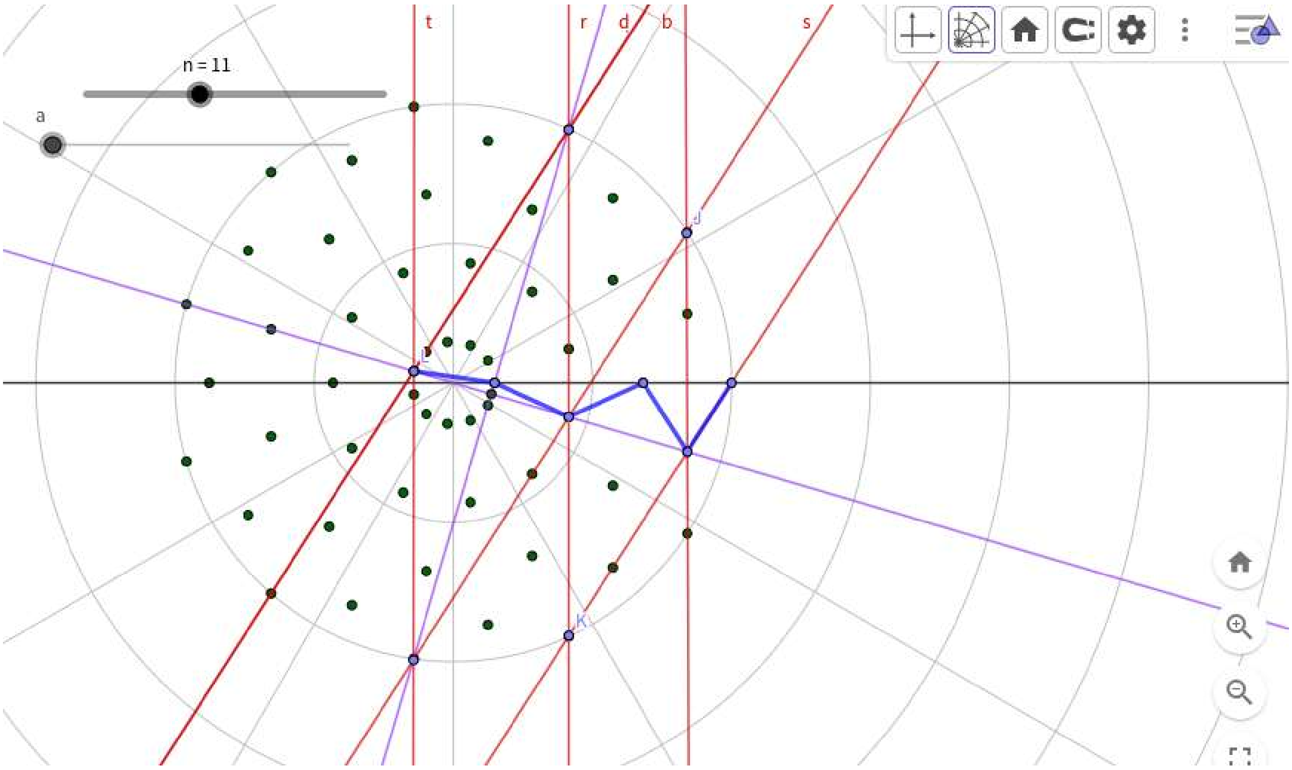
由上圖（邊數為奇數）可知四條紅色直線圍成的區域為平行四邊形，且因為紫色線段為對稱軸（也是對角線），所以對角線互相垂直平分，可知紅色直線圍成的區域為菱形。



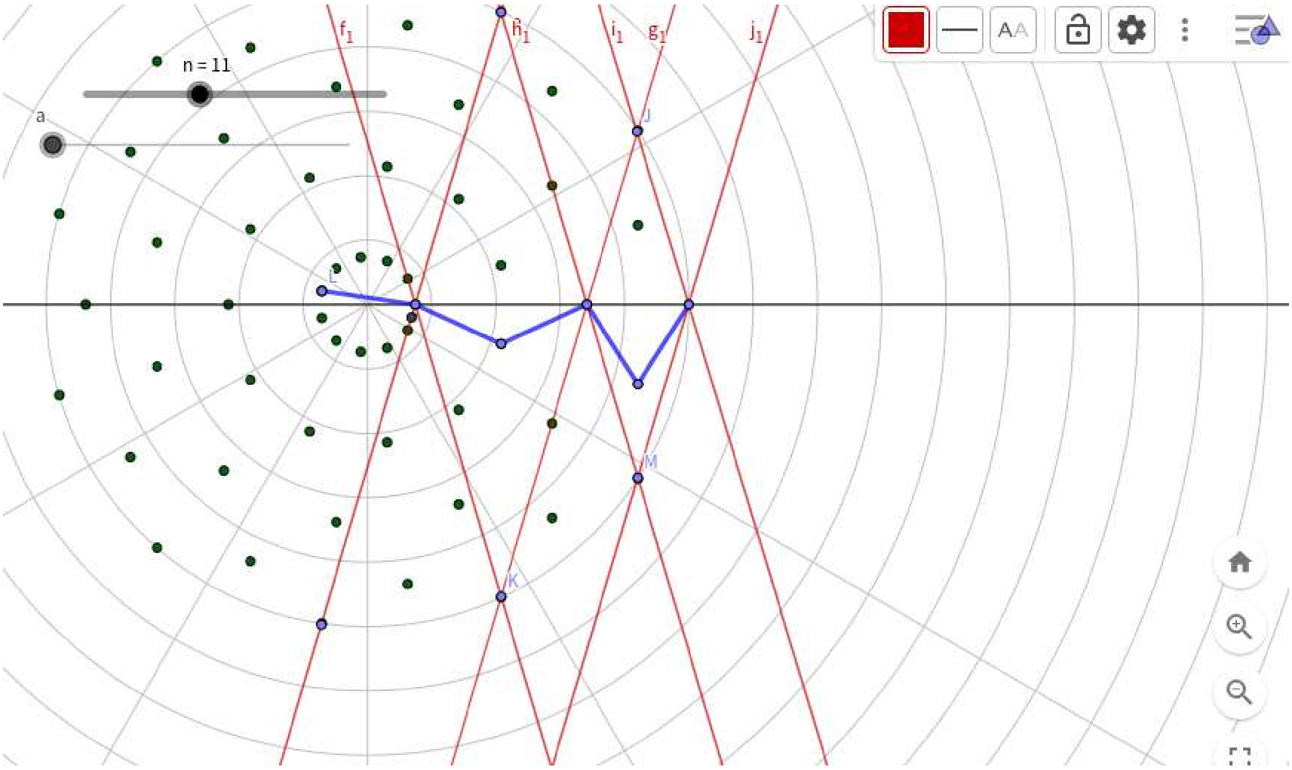


因為棕色三角形和黑色三角形有一個共用邊，且皆有一個 90°，且直角的另一條臨邊等長（菱形的對角線互相垂直平分），所以棕色三角形和黑色三角形全等，可知菱形內部的兩條藍色線段等長。

同理，剩下的藍色線段也兩兩等長

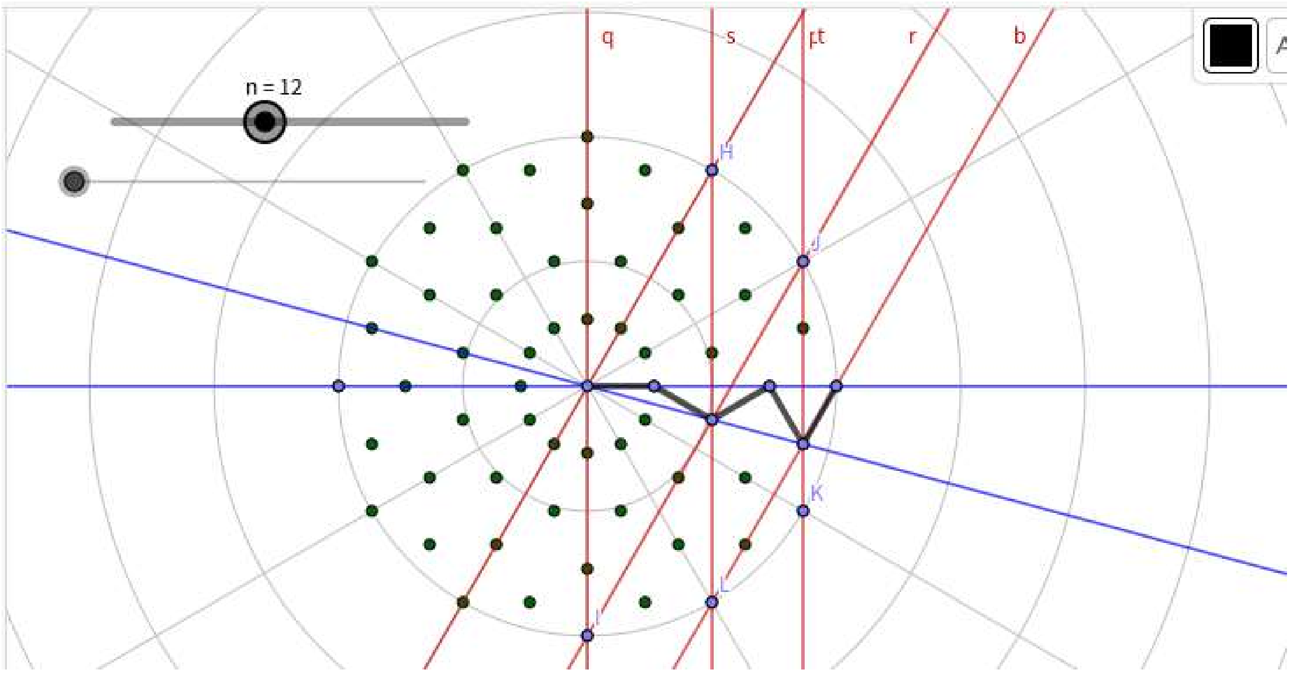


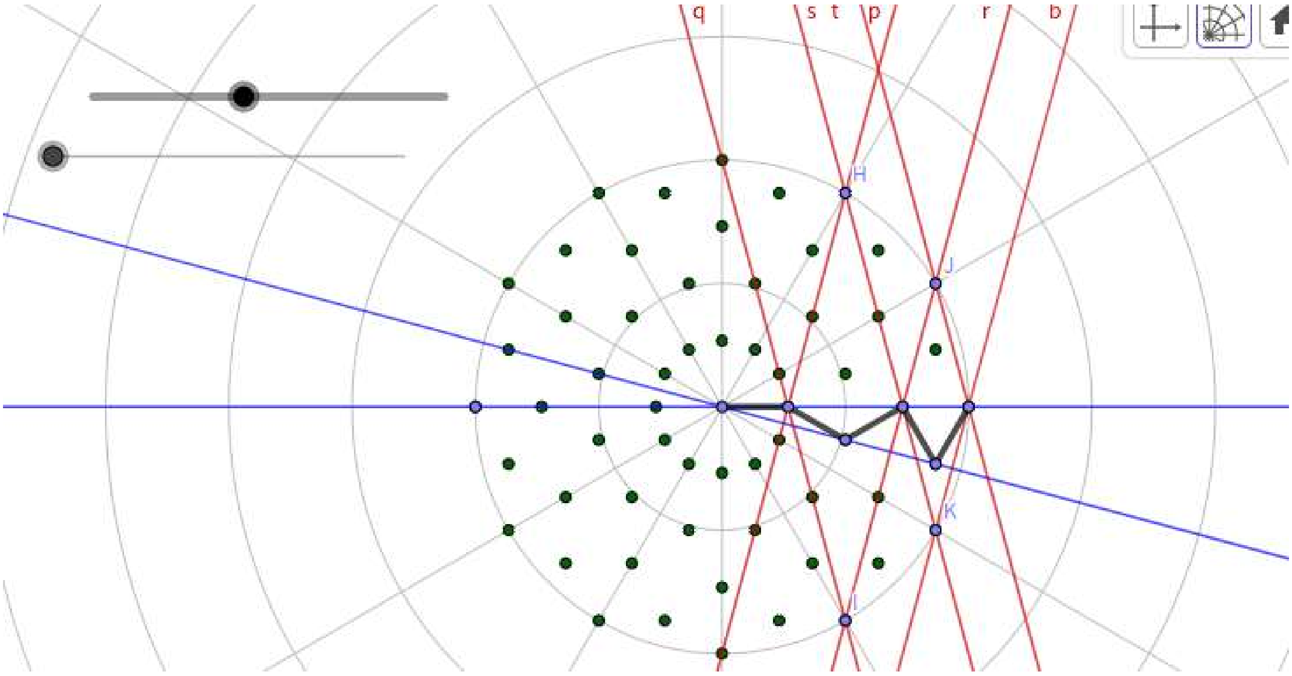
將紅色線段（菱形）換個方向（如下圖）
在這些紅色菱形內的藍色線段也等長。



結合上面的結果，可得藍色線段皆等長（針對邊數為奇數的正多邊形）

用相同的方法分析邊數為偶數的正多邊形





接著試著算各正多邊形的邊長（圖 17 中紫色加粗的部分）是否有能轉變成通式的可能。

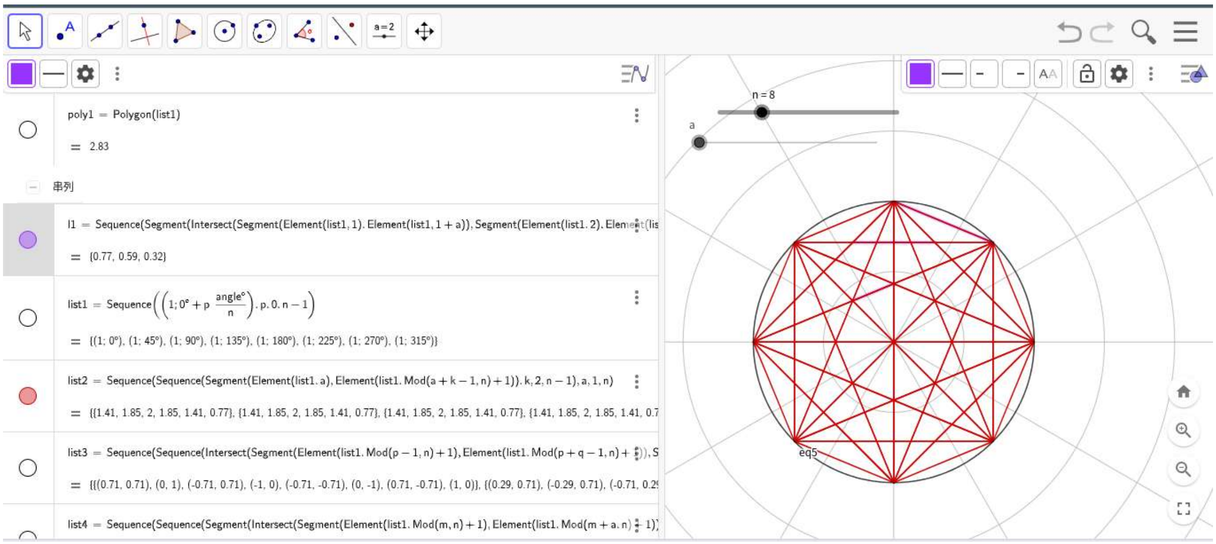


圖 15

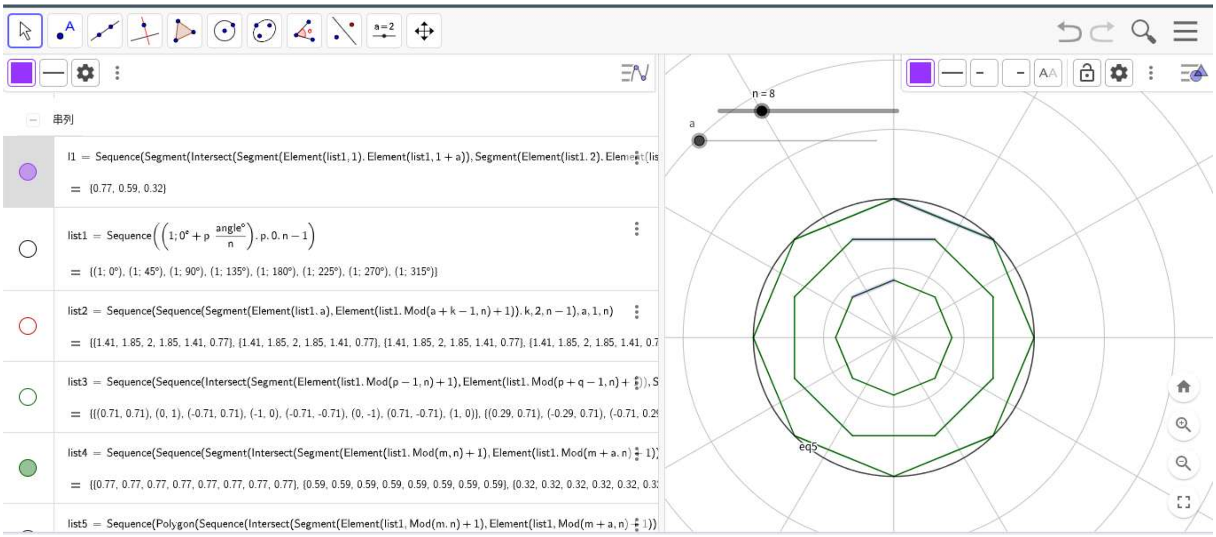


圖 16

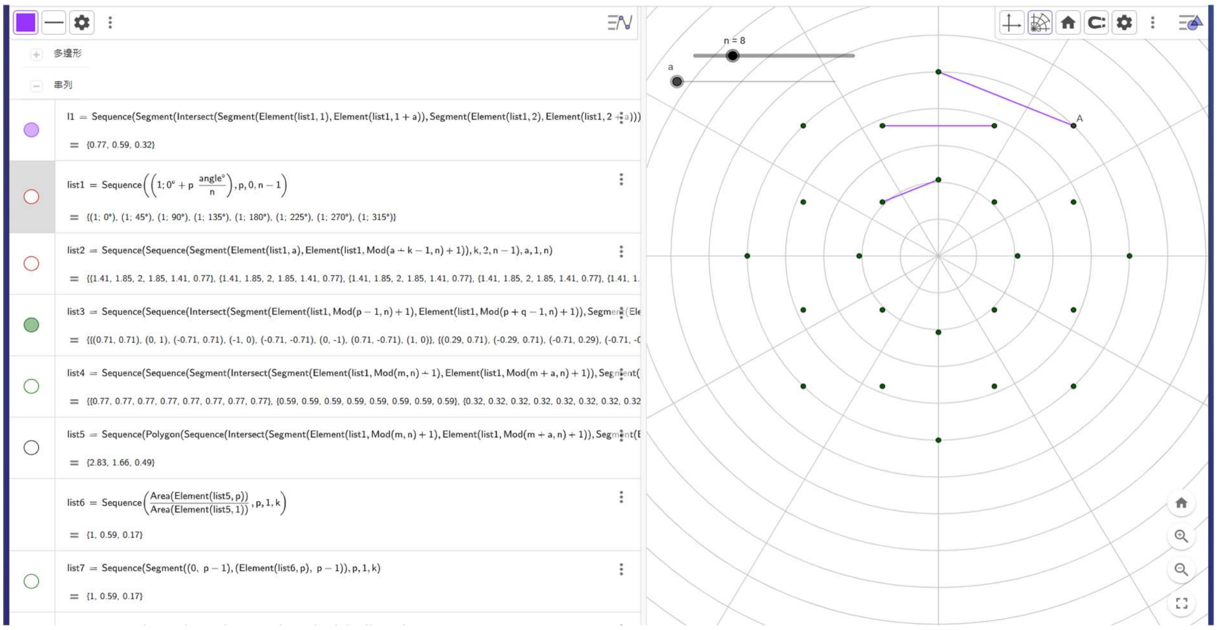


圖 17

二、利用三角函數計算各個正多邊形的連心距,移像處理後得到

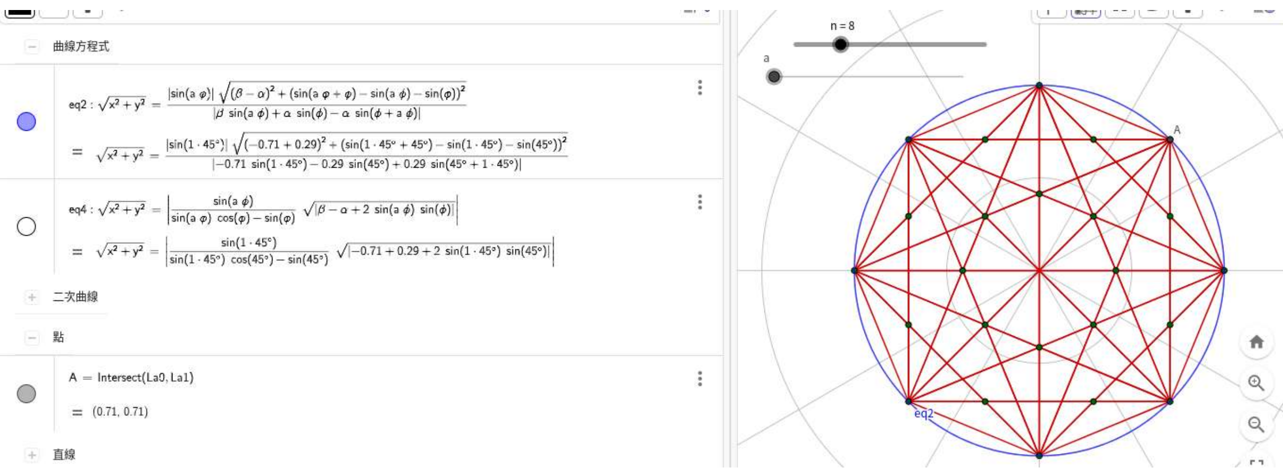


圖 18

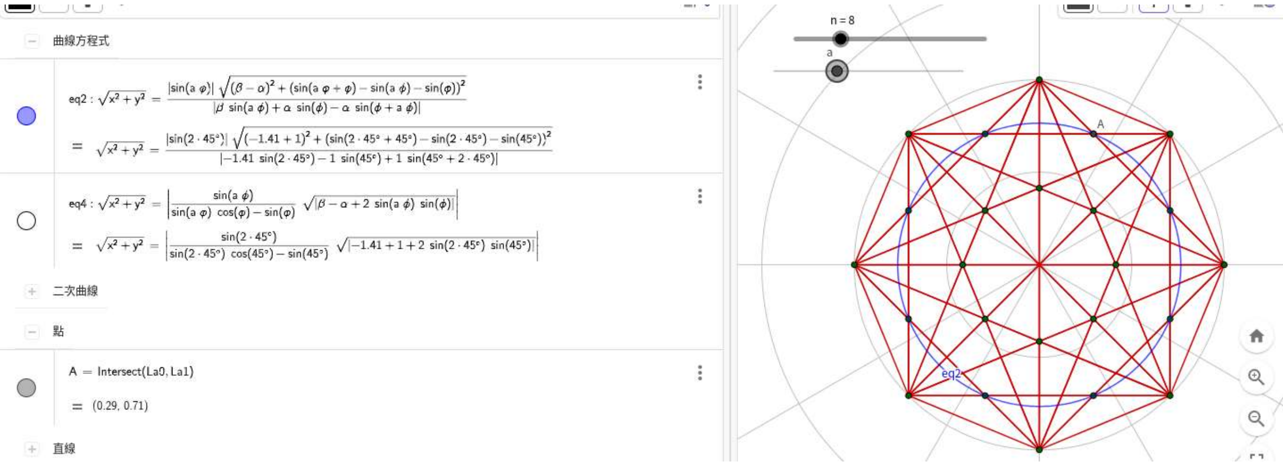


圖 19

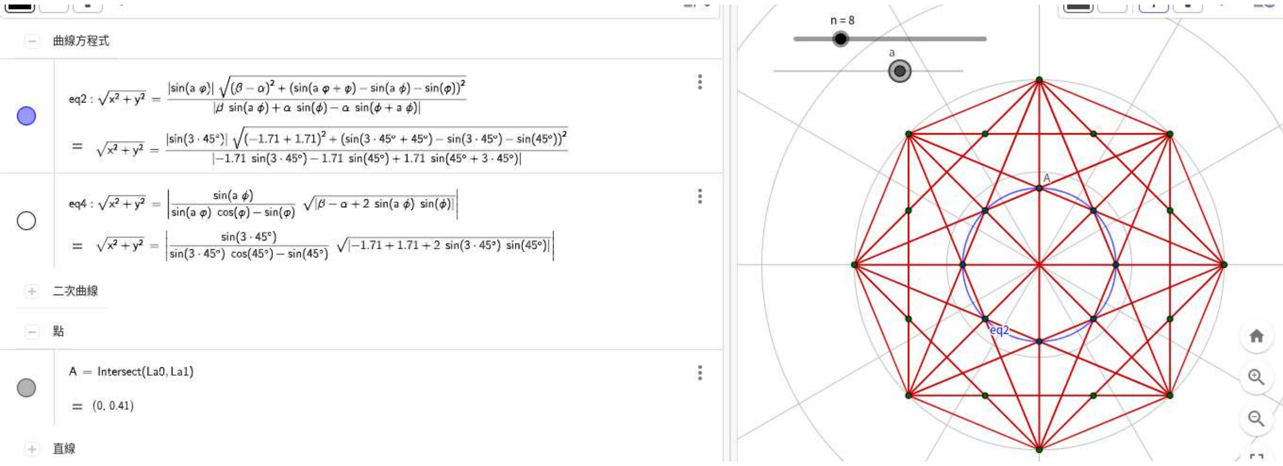


圖 20

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{|sin(a\phi)|\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(sin(a\phi+\phi)-sin(a\phi)-sin(\phi))^2}}{|\beta sin(a\phi)+\alpha sin(\phi)-\alpha sin(a\phi+\phi)|}$$

進一步化簡得到

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{|sin(a\phi)|\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(sin(a\phi+\phi)-sin(a\phi)-sin(\phi))^2}}{|-2sin(\phi)+sin(a\phi+\phi)-sin(a\phi-\phi)|}$$

將根號內的數在化簡得到

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2|sin(a\phi)|\sqrt{|(cos(\phi)\ -\ 1)\ (cos(a\ \phi)\ -\ 1)|}}{|-2sin(\phi)+sin(a\phi+\phi)-sin(a\phi-\phi)|}$$

約分後得到

$$\sqrt{x^2+y^2}=|\frac{sin(a\phi)\sqrt{(cos(\phi)-1)(cos(a\phi)-1)}}{sin(\phi)(cos(a\phi)-1)}|$$

即連心線長度

兩邊同時平方

$$x^2+y^2=\frac{cos(a\phi)+1}{cos(\phi)+1}$$

反向半角公式

$$x^2+y^2=\left(\frac{cos(\frac{a\phi}{2})}{cos(\frac{\phi}{2})}\right)^2$$

同開根號

$$\sqrt{x^2+y^2}=\left(\frac{cos(\frac{a\phi}{2})}{cos(\frac{\phi}{2})}\right)$$

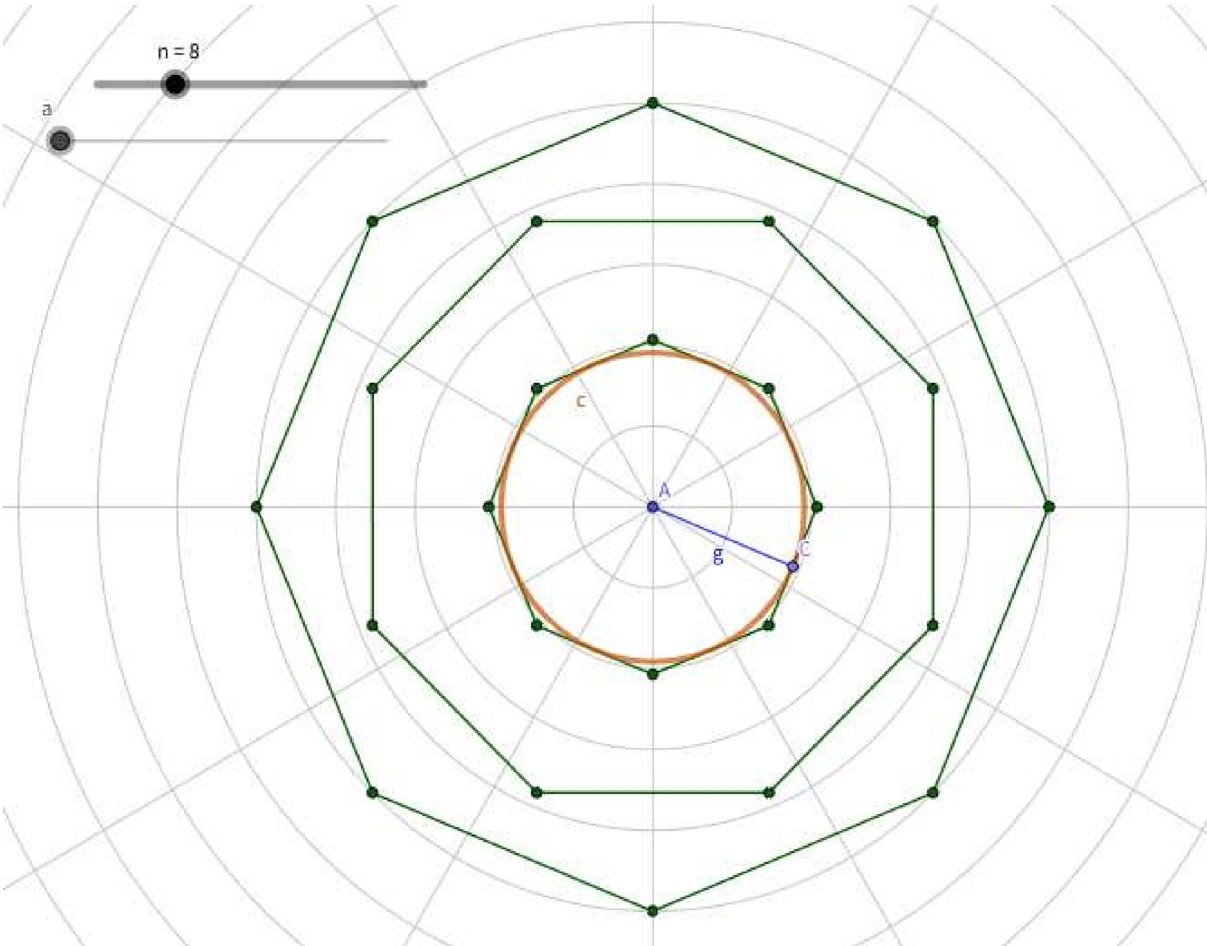
利用前面的公式，推論內接正多邊形半徑和原正多邊形的半徑比是$cos(\frac{\phi}{2})$：$cos(\frac{a\phi}{2})$

所以原正多邊形半徑 $\times\ cos(\frac{a\phi}{2}) =$ 內接正多邊形半徑 $\times\ cos(\frac{\phi}{2})$

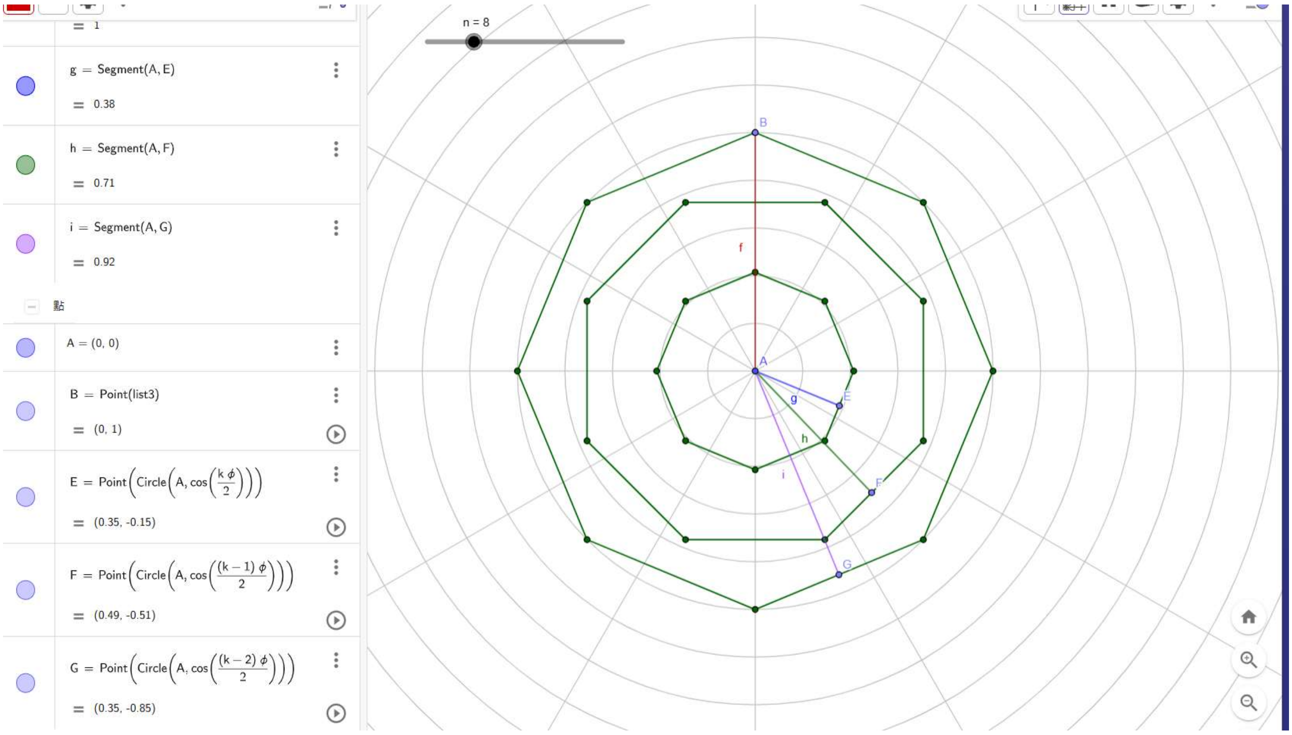
用 ggb 畫出 原正多邊形半徑 $\times \cos\left(\frac{a\phi}{2}\right)$的長度(圖中藍色線段)

並觀察是否會落在對角線上

「原正多邊形半徑 $*\,cos(\frac{k\phi}{2})$」（k 為內接正多邊形總數，包括原正多邊形）

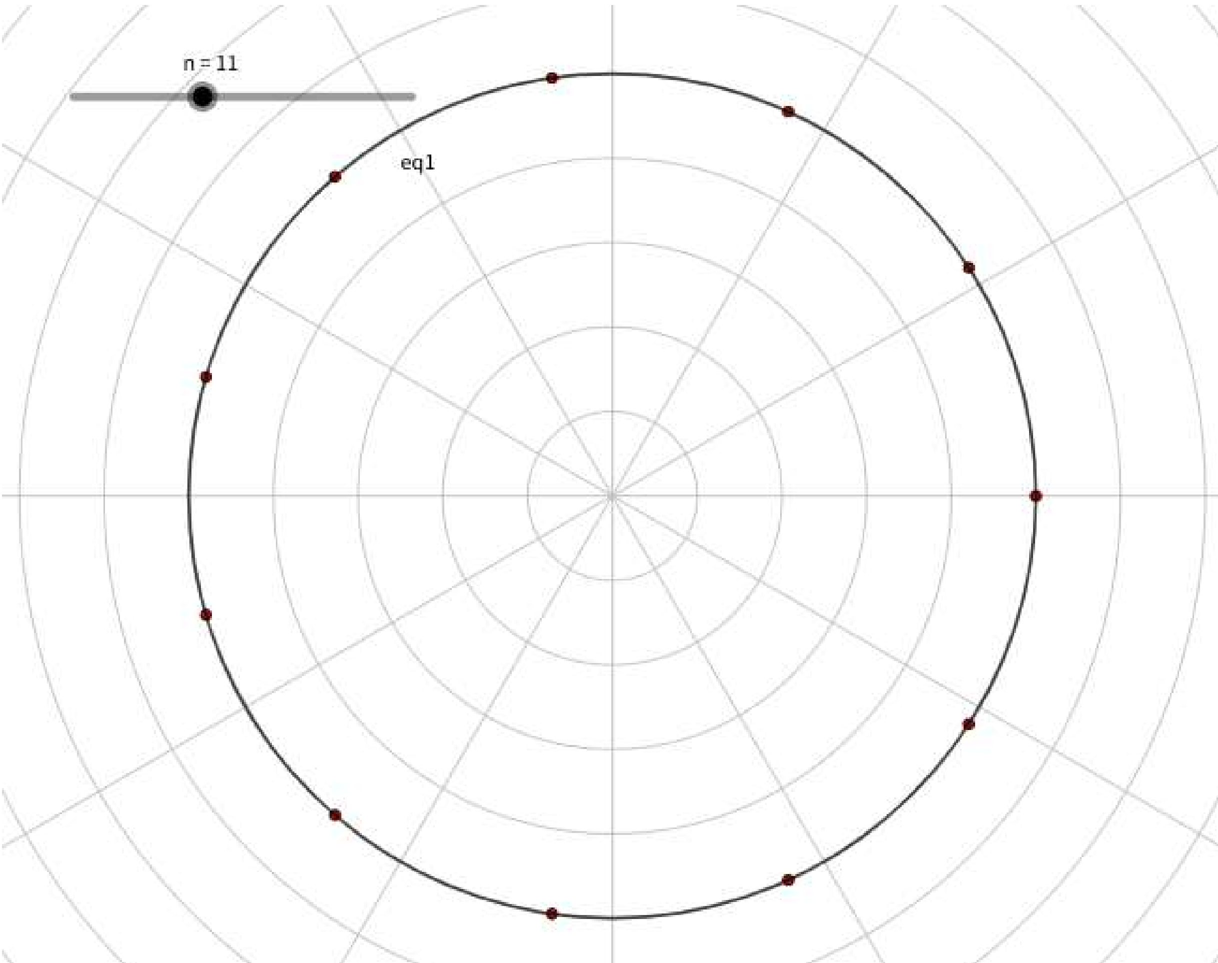


將以原正多邊形的頂點到圓心的距離設為斜邊 (r) ，原點（0,0）為圓心，做半徑為 $r\times cos(\frac{a\phi}{2})$的圓形發現交點會在正多邊形的邊的中點。

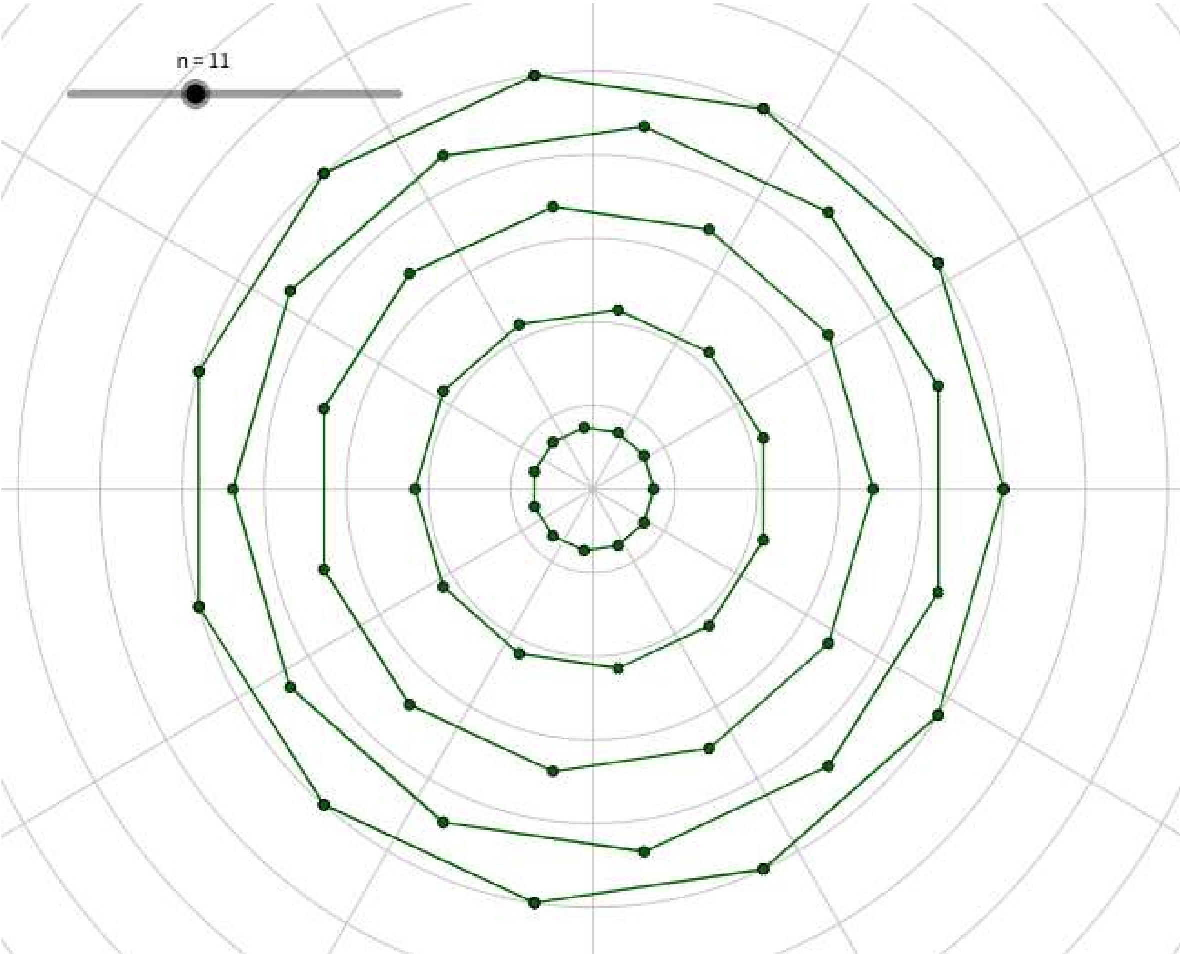


依上述提到的方法，可以把證明過程簡化：

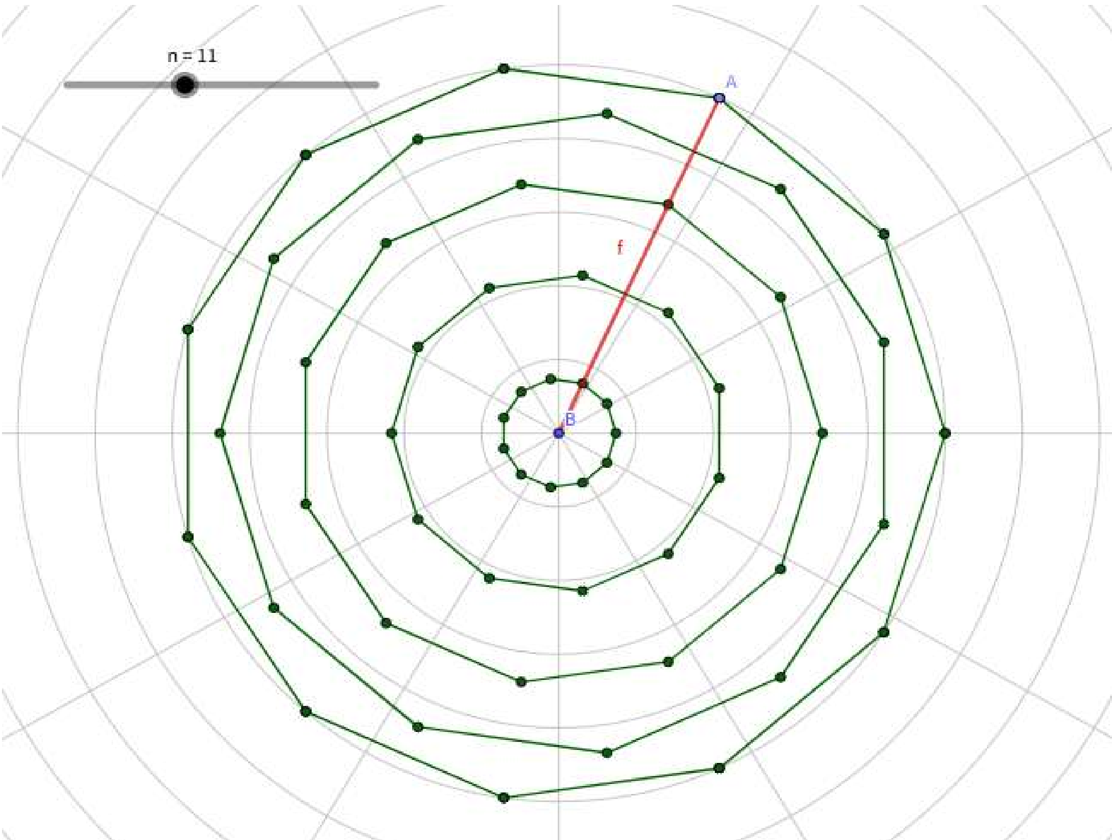
1. 先畫出一個半徑為 R 的圓形
2. 畫出一個內接正多邊形的頂點（在圓周上）



3. 將內接正多邊形畫出來

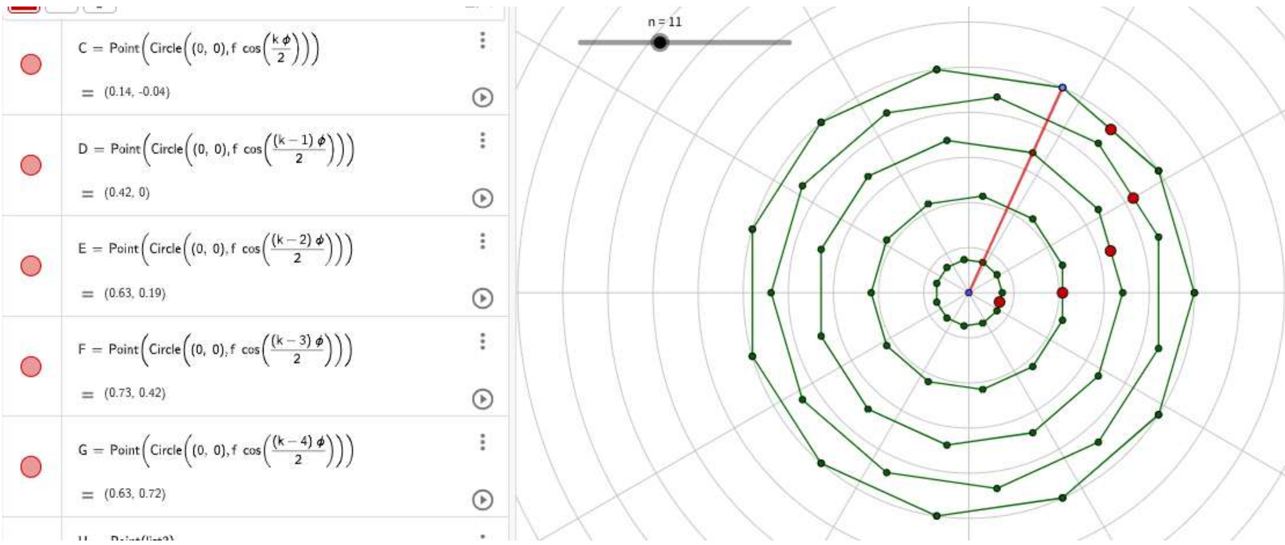


4. 原點和最大的正多邊形連線

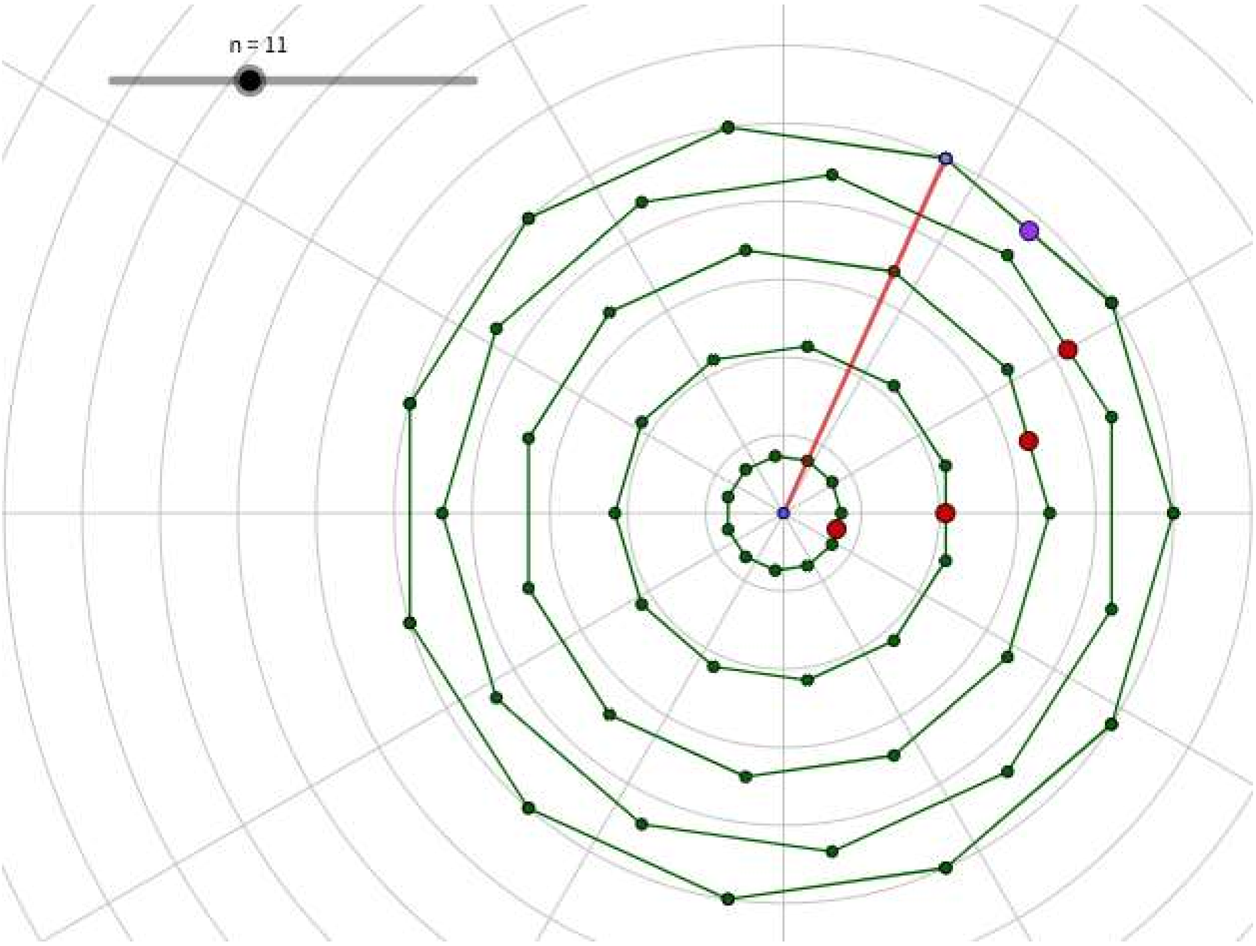


5.

把紅色線段 $\times cos(\frac{a\phi}{2})$, 其中$a$從 1 到$k$



得到上圖的紅色點



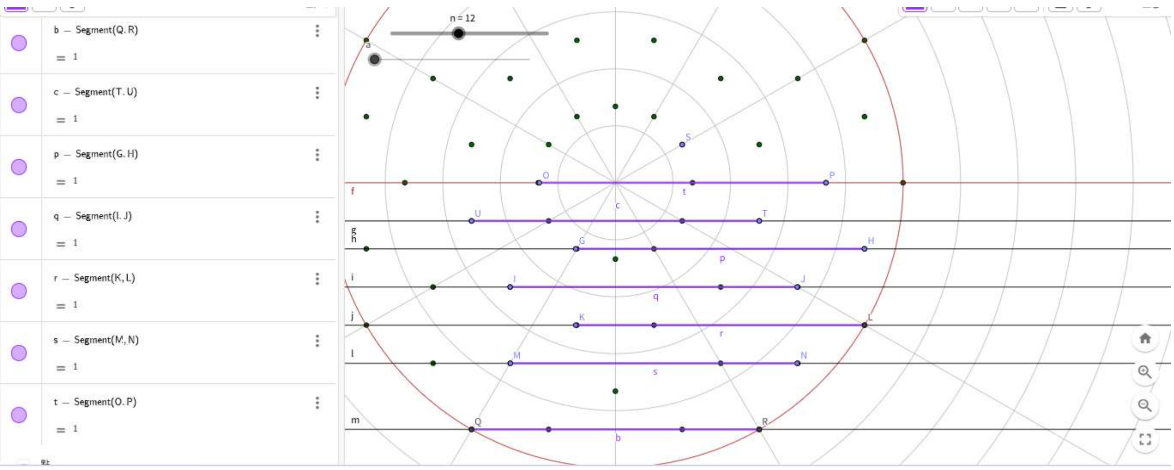
6. 可以的得到最外圈的點（紫點）和所有點（紅點）的比例為$cos(\frac{\phi}{2})$：$cos(\frac{a\phi}{2})$，

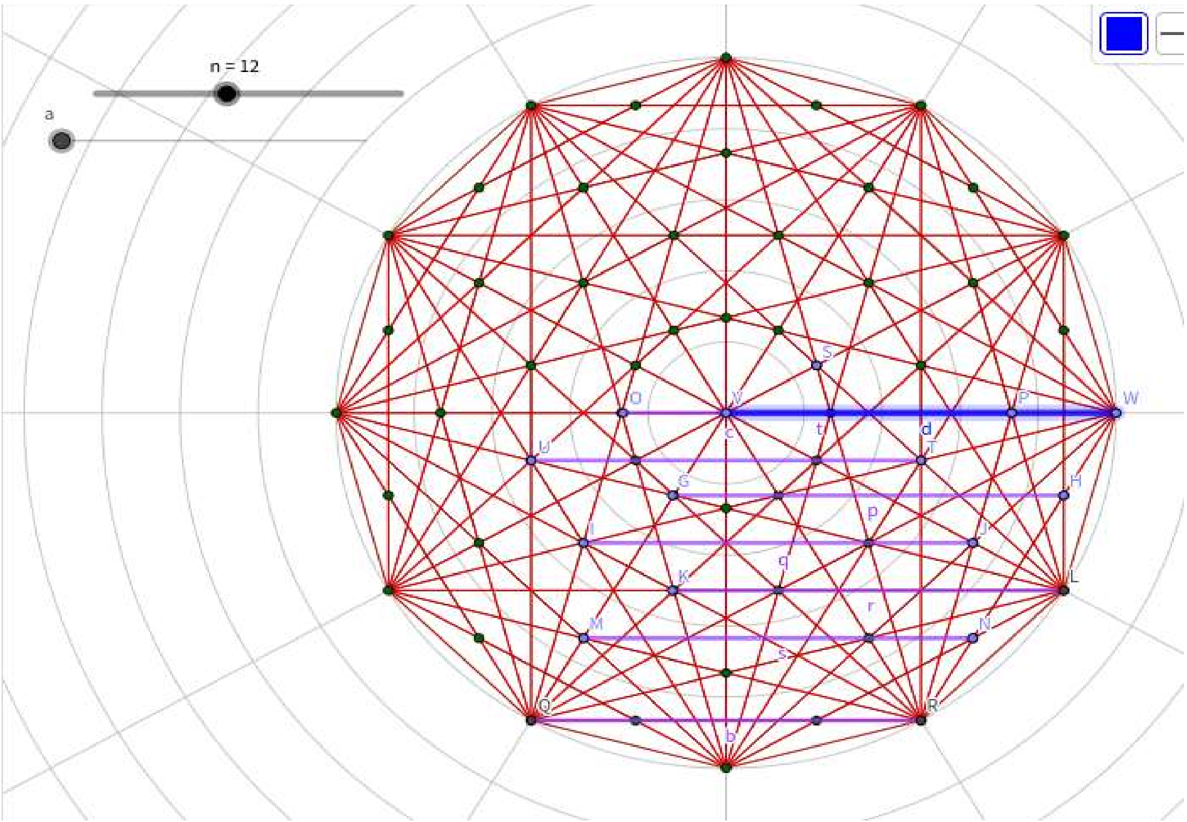
所以內接正多邊形的頂點到圓心的長度為$r*\dfrac{\cos\left(\frac{a\phi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)}$，

和原正多邊形的面積比值為$(\dfrac{\cos\left(\frac{a\phi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)})^2$，

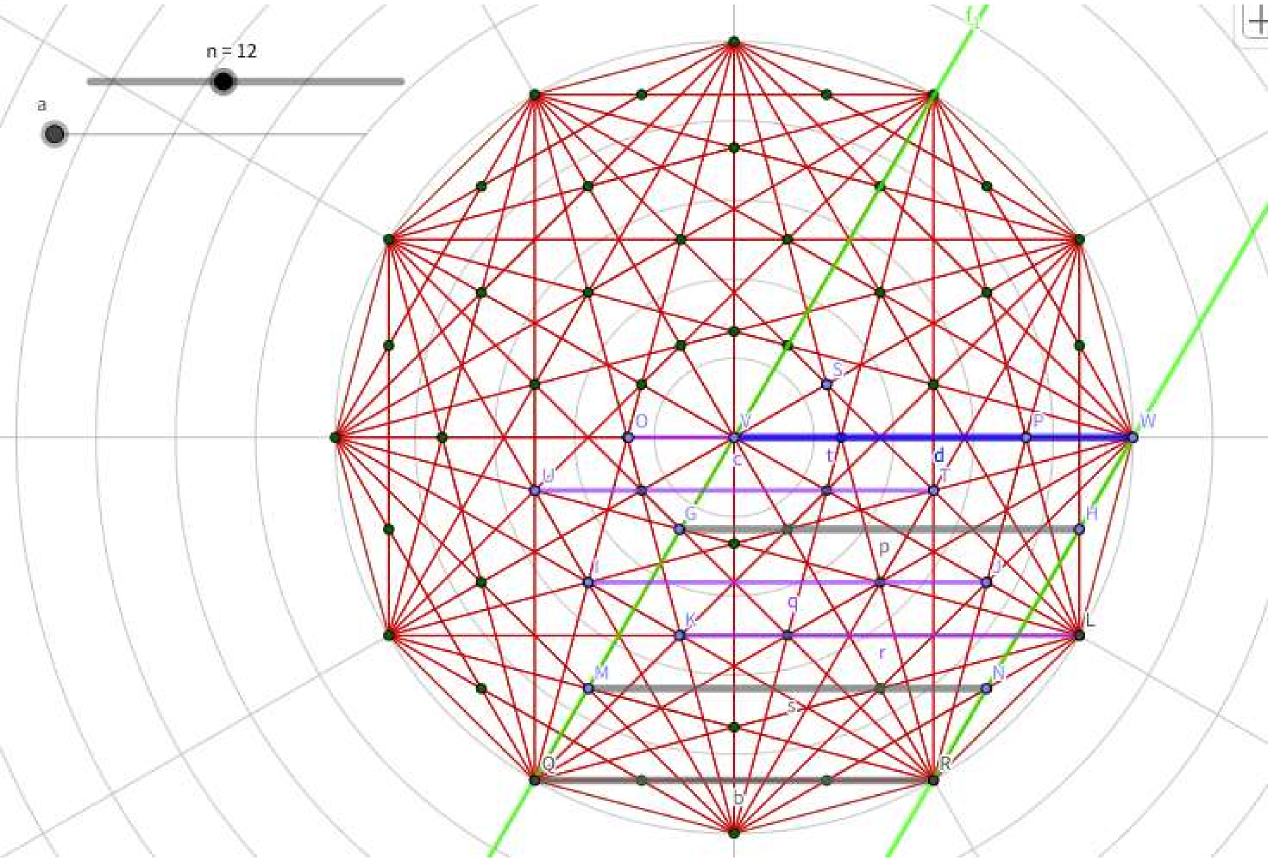
再利用半角公式算出$(\dfrac{\cos\left(\frac{a\phi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)})^2=\sqrt{\dfrac{\frac{cos(a\phi)+1}{2}}{\frac{cos(\phi)}{2}}}^2=\dfrac{cos(a\phi)+1}{cos(\phi)+1}$

接著討論正多邊形和正多邊形的頂點中可以找到有多段和半徑等長

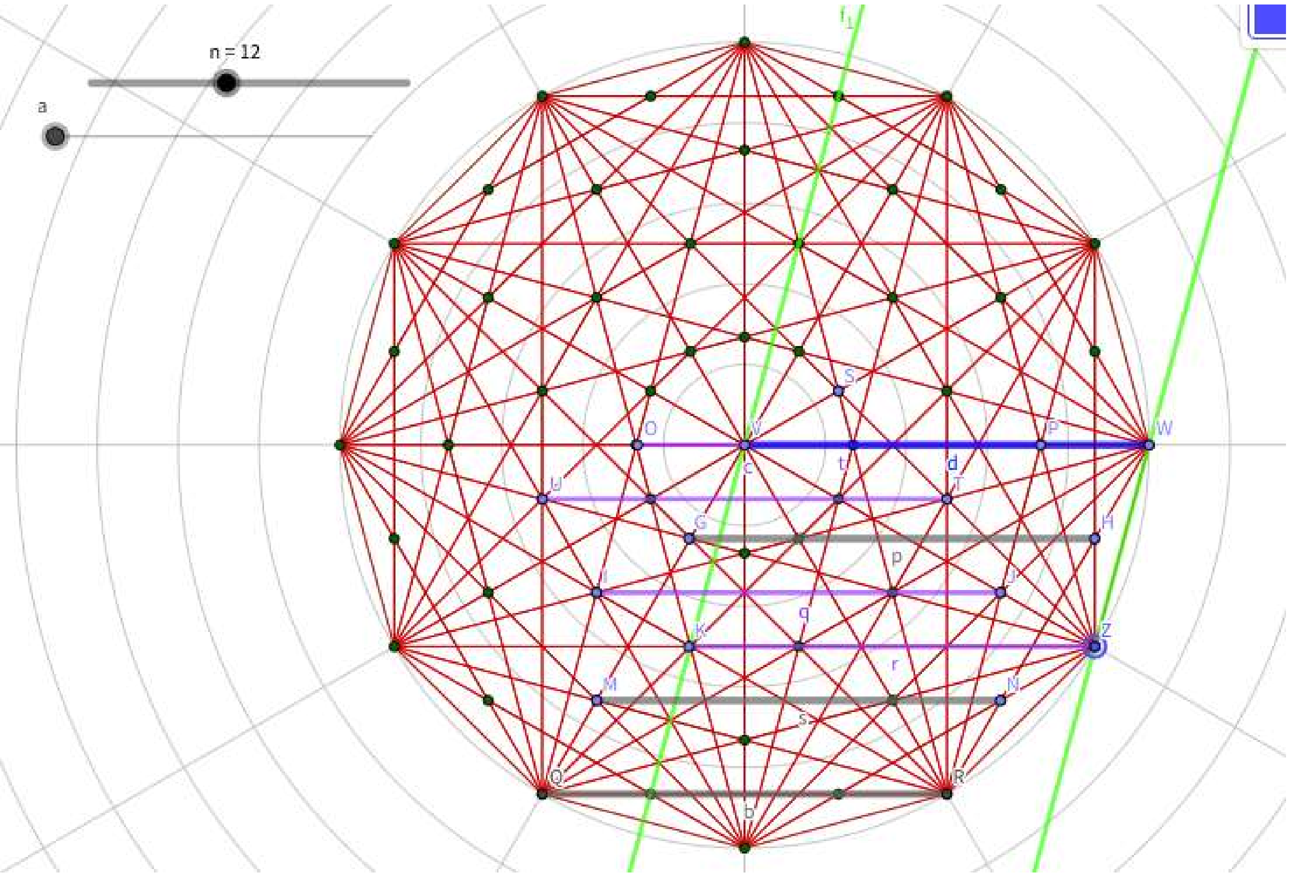


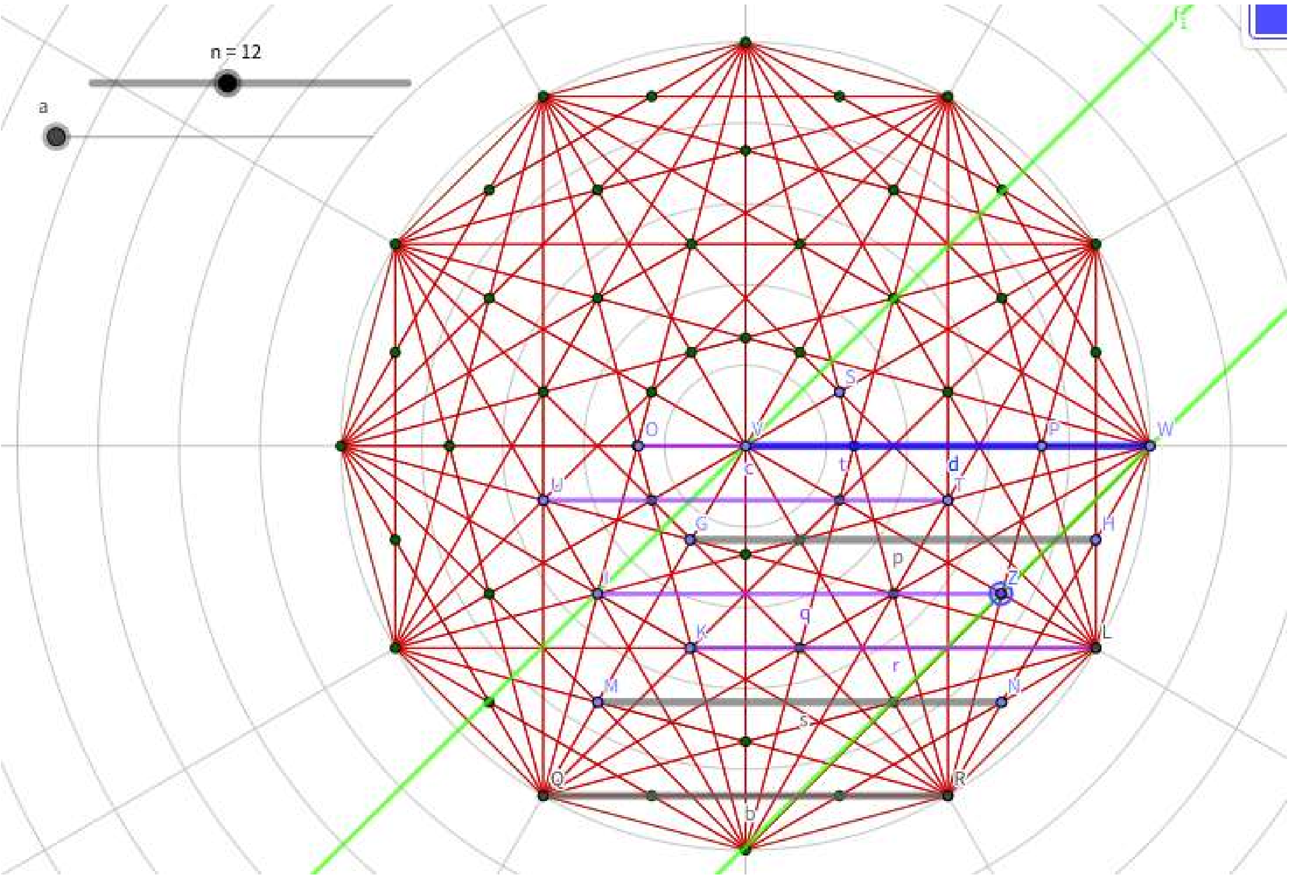


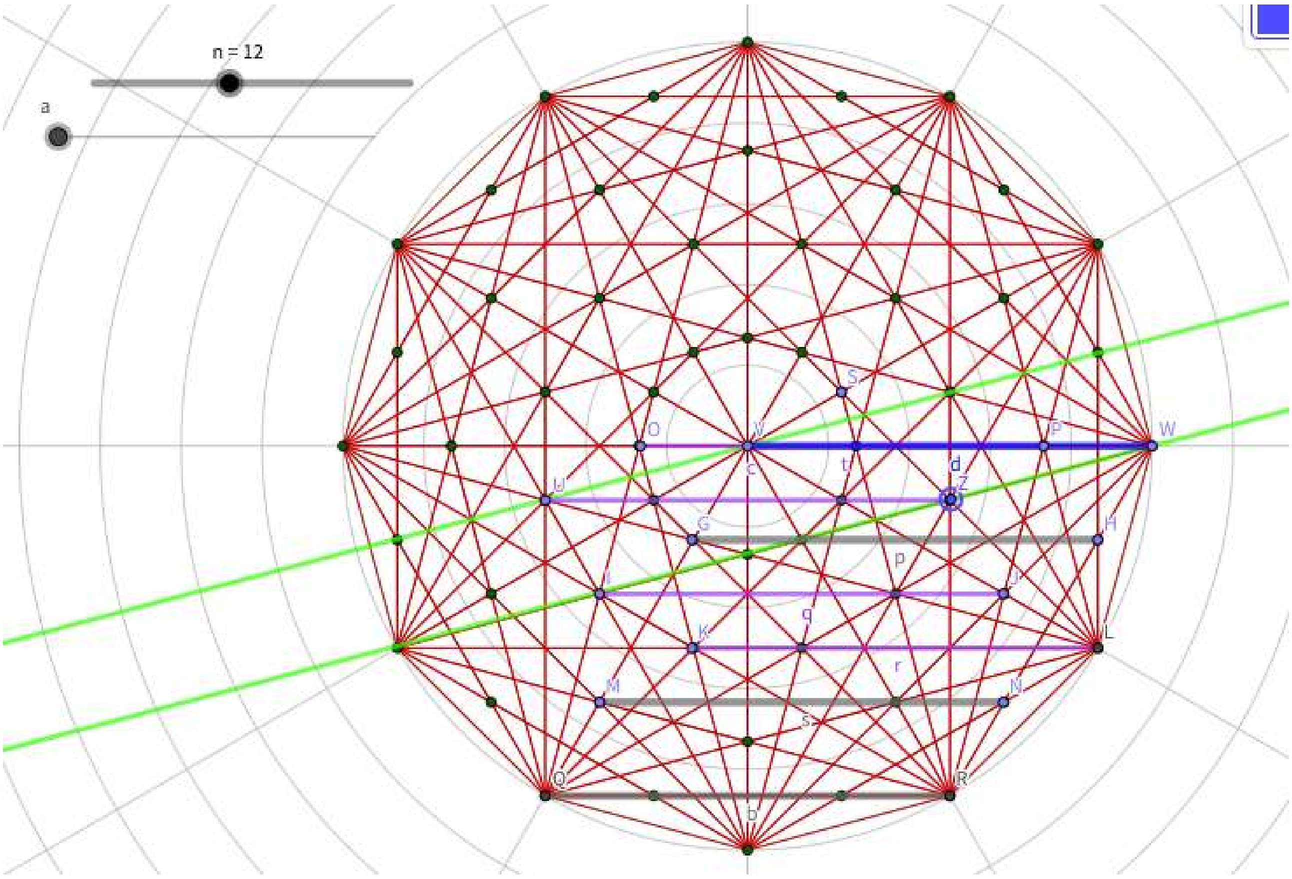
利用圓形的切線性質：平行線截等弧，所以兩條線截下的弧如果等長，兩條線就平行。
利用上述原理，可以讓兩條截等弧的線個別通過半徑的兩端點



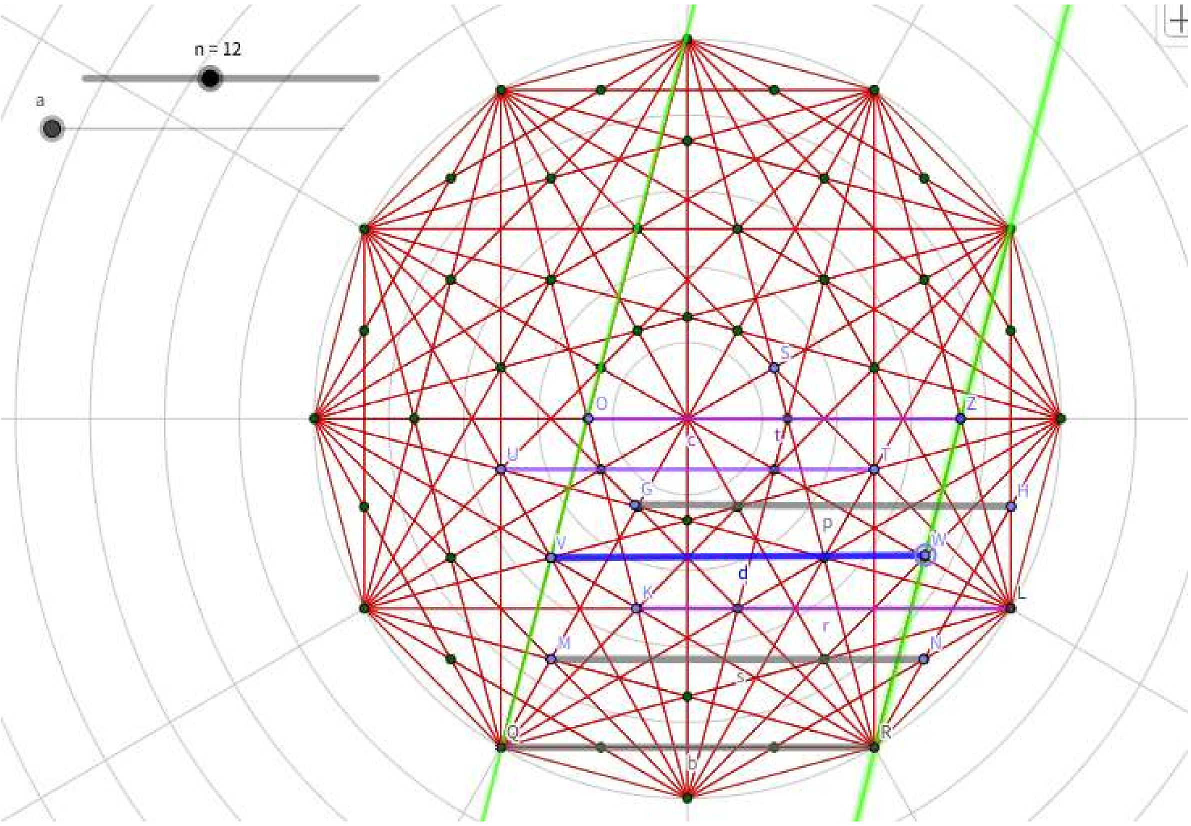
可得知圖中的灰線段和藍線段（半徑）等長，把平行線旋轉，可得其餘的線段也和半徑等長



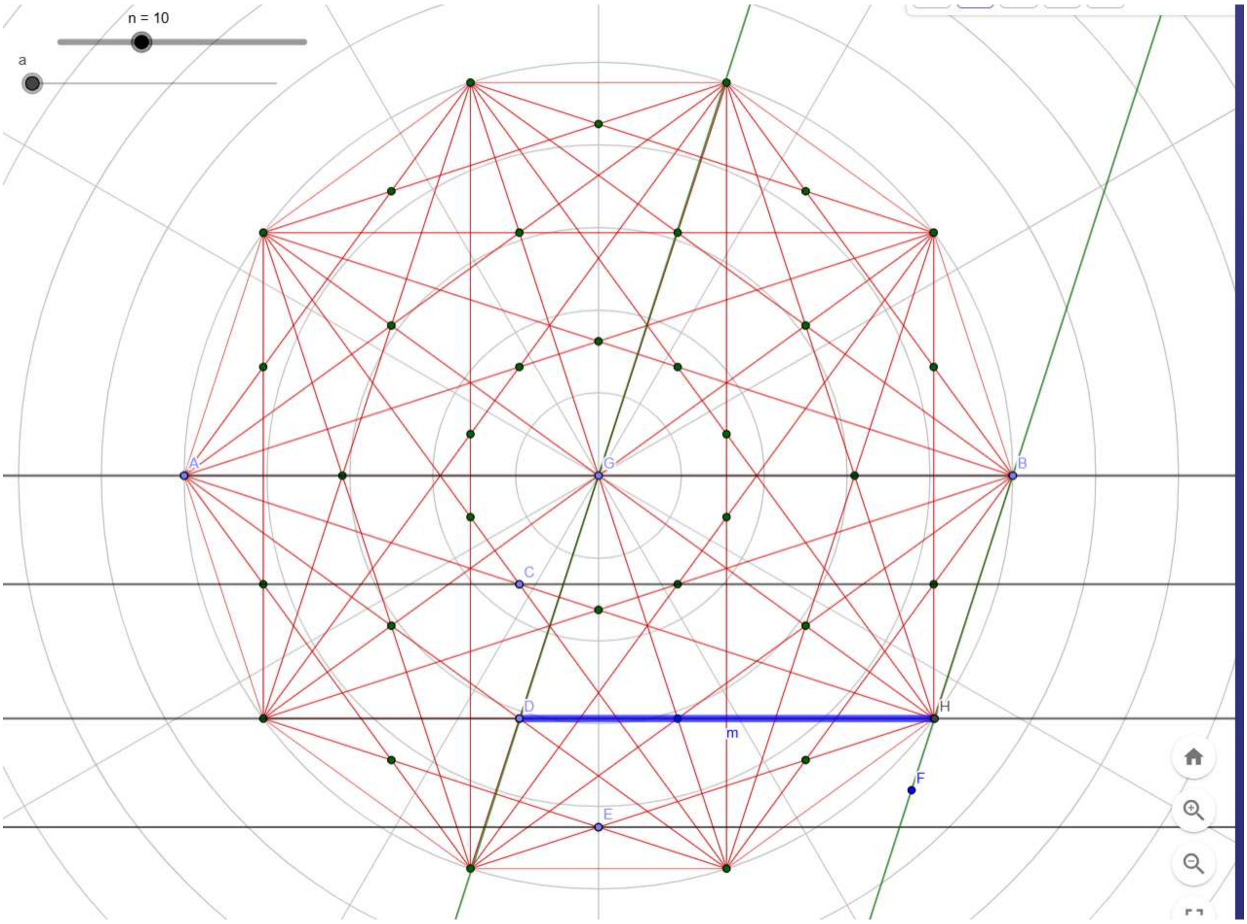


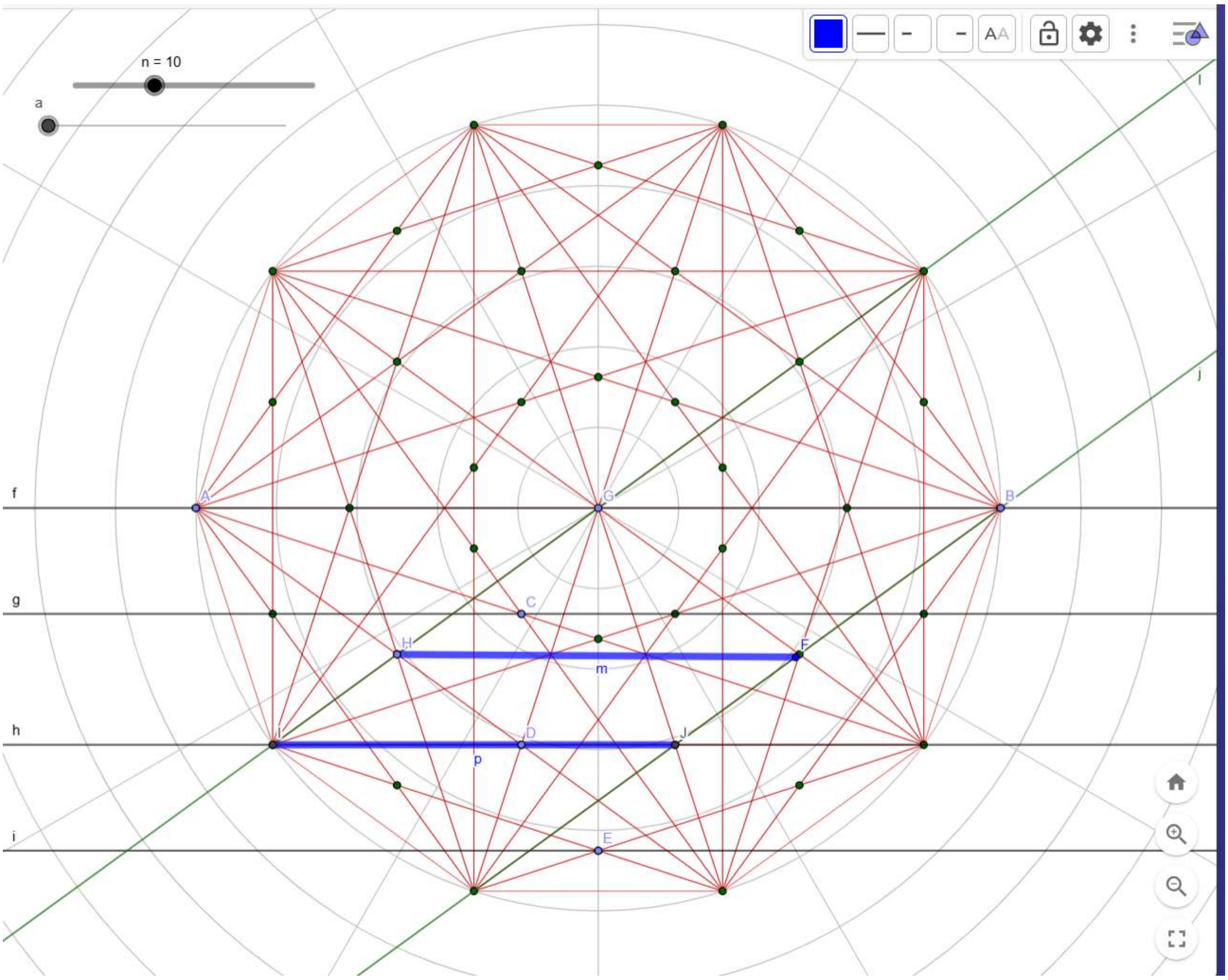


最後再用推出的等長線段逆推在半徑上的線段也等長



而不只正十二邊形有這樣的特性，其他正多邊形(偶數)也可以用一樣的方法（平行線對等弧）證明





陸、　結論

推導出以下公式：

$$x^2+y^2=$$

$$\left(\frac{(\beta-\alpha)sin(a\phi)}{\beta sin(a\phi)-\alpha sin(a\phi+\phi)+\alpha sin(\phi)}\right)^2+\left(\frac{sin(a\phi)(sin(a\phi+\phi)-sin(a\phi)-sin(\phi))}{\beta sin(a\phi)-\alpha sin(a\phi+\phi)+\alpha sin(\phi)}\right)^2$$

化簡後:

$$x^2+y^2=\frac{\cos(a\phi)+1}{\cos(\phi)+1}\left(\phi\text{為}\frac{360}{n}\right)$$

or $$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{cos(a\cdot\frac{\phi}{2})}{cos(\frac{\phi}{2})}$$

正多邊形中的內接正多邊形之間的最短距離：
將奇數和偶數分開討論：
當 n 為奇數

由最裡面的藍色線段可以知道，藍色線段為最小的正多邊形的 $2r \times cos(\frac{\phi}{4})$

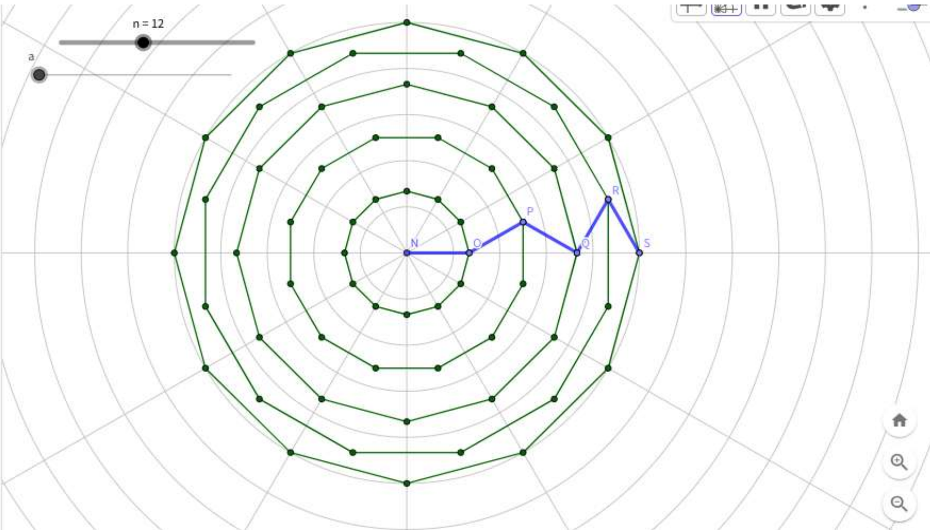
最大正多邊形半徑：藍色線段(內接正多邊形之間的最短距離)

$$= 1 : 2\sqrt{\frac{cos(a\phi)+1}{cos(\phi)+1}} \times cos(\frac{\phi}{4})$$

當 n 為偶數
由最中間的藍色線段可得，它們皆為最小的正多邊形的半徑

（最外圈半徑 $\times \sqrt{\frac{cos(a\phi)+1}{cos(\phi)+1}}$）

最大正多邊形半徑：藍色線段(內接正多邊形之間的最短距離) $= 1 : \sqrt{\frac{cos(a\phi)+1}{cos(\phi)+1}}$



柒、 參考文獻資料

目前網路上找不到符合我們研究（多邊形跳點數）的文獻
三角函數有關公式：
巫老師. (n.d.). *三角函數公式懶人包：Sin Cos Tan 公式表大全*. https://top1tutorinasia.com/%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%87%BD%E6%95%B8%E5%85%AC%E5%BC%8F%E6%87%B6%E4%BA%BA%E5%8C%85%EF%BC%9Asin-cos-tan%E5%85%AC%E5%BC%8F%E8%A1%A8%E5%A4%A7%E5%85%A8/.html

112 學測三角函數考前精華｜sin、cos、tan 常見公式一次看. (2022, October 22). https://tw.amazingtalker.com/blog/zh-tw/k12/72308/

ggb 使用方法：
GeoGebra 使用指南. (n.d.). https://www.geogebra.org/m/xy83dFeY

Markus hohenwarter, & Judith preiner. (2007). GeoGebra 使用說明. *Www.Geogebra.Org*.