新竹市第四十三屆中小學科學展覽會

作品說明書

參賽科別：數學科

組別:國中組

作品名稱：轉呀轉~凸多邊形車輪與曲線的關係

關　鍵　詞：懸鏈線、車輪滾動軌跡、多邊形車輪

編號:114JA-M008

摘要

本研究旨在推導出一種能使多邊形車輪平穩前進的曲線方程式。利用畢氏定理與三角函數取極限的方式來證明，我們計算了微分後的斜率，並推導出正 n 邊形車輪的中心在同高度滾動時的曲線方程式。結果顯示，推導出該曲線為懸鏈線，並證明懸鏈線能讓車輪有效地保持平穩運動。

研究過程中，我們從正 n 邊形推導至一般沒有特殊形狀的多邊形，更分析了沒有特殊形狀的多邊形車輪的幾何特性，並通過實驗，驗證了懸鏈線的理論模型。在未來，將可以為多邊形車輪的設計與運行提供新的思路，並可能在交通、機械設計及自動化設備中發揮重要作用，了解懸鏈線的特性將促進相關技術的創新與發展。

壹、前言

一、研究動機

車輪作為人類交通工具的重要組成部分，隨著時代的演進，對車輪形狀與運行原理的探索也逐漸深入。傳統上，我們對圓形車輪有著深刻的認識，並已經運用了幾百年。然而，隨著幾何學和力學的發展，越來越多的人開始關注非圓形車輪在不同道路上的運行特性，並思考其可能帶來的創新應用。

▲取自 https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Triciclo_de_Rodas_Quadradas.jpg

其中，一種特別的車輪形狀—方形車輪，在平地上行駛時，由於其重心的上下起伏，會產生顯著的跳躍，從而難以實現平穩的移動。然而，若將方形車輪放置在由倒置懸鏈線組成的軌道上，情況卻大不相同。在這樣的道路上，方輪的每個邊始終與懸鏈線的最低點相切，並且方輪的四個直角正好落於懸鏈線的最低點，這使得方輪的重心能夠做直線運動，實現平穩前進。這一發現揭示了車輪形狀與道路曲線之間密切的幾何關係，並引發了對其他正多邊形車輪的興趣。

也基於此，我們希望進一步探索，當車輪形狀從方形改為五邊形、六邊形甚至八邊形時，能否在類似的懸鏈線道路上保持平穩運行，在某些特殊地形下，或許能有比傳統圓形車輪更佳的效果。我們也將探討這些車輪與道路形狀之間的幾何關聯，以及如何根據不同形狀的車輪調整道路設計，以達到最佳的運行效果。這不僅能幫助我們更深入理解力學與幾何的應用，還可能為未來交通工具的創新設計提供新的思路。

二、文獻探討

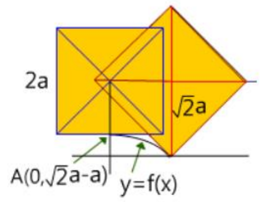
(一)中華民國第 60 屆國中組科展數學科球解懸鍊線-以 nanodots 模擬數學曲線 雖然主題與我們不同，但研究中都需要計算懸鍊線，可以作為研究的參考。

(二)網路查詢得知，正方形車輪所需的曲線為懸鏈線，方程式為:

$$y = a\sqrt{2} - a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$y > 0$$

其中:正方形邊長為 2a



▲取自 http://www.mathland.idv.tw/life/squarewheel.htm

正方形中心高度為其中心到頂點直線距離

三、研究目的

(一) 正多邊形車輪與曲線的幾何關係

從計算車輪的邊長、角度、曲率半徑之間的關係，從而找出最合適的道路形狀？

車輪幾何學的應用：找出何種方程式畫出的曲線與正 n 邊形車輪的幾何結構最吻合?

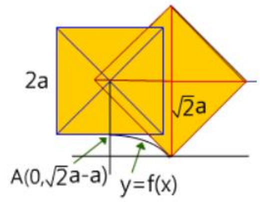
(二) 正多邊形車輪與懸鏈線的幾何關係

網路查詢得知，正方形車輪所需的曲線為懸鏈線，方程式為:

$$y = a\sqrt{2} - a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$y > 0$$

其中:正方形邊長為 2a



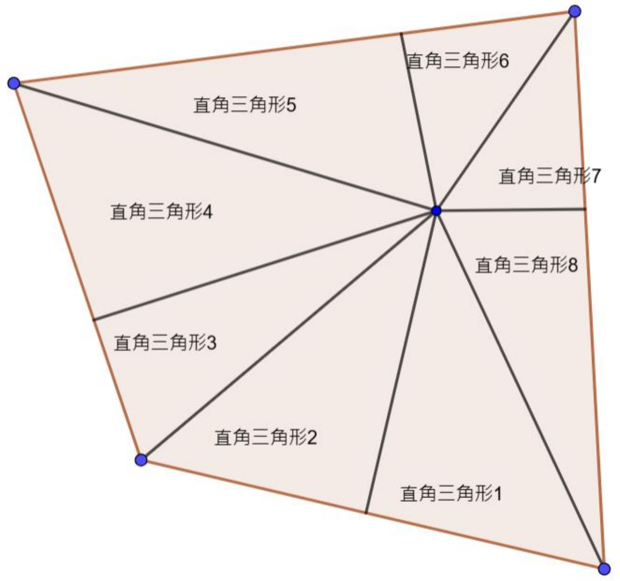
▲取自 http://www.mathland.idv.tw/life/squarewheel.htm

正方形中心高度為其中心到頂點直線距離

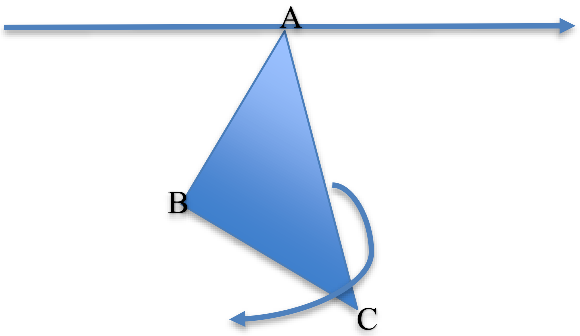
這讓我們不禁好奇，其他正多邊形車輪對應到的曲線是否也是懸鏈線?

(三) 直角三角形與曲線的幾何關係

凸多邊形是不規則圖形，無法利用上面求正多邊形的方式求其對應到的曲線方程式，但我們可以將其切分成數個直角三角形分別討論(如圖)，最後再整合在一起。



因此，必須求出當直角三角形之斜邊與一股的頂點為中心，向前滾時(如圖)，其所對應的曲線之方程式。

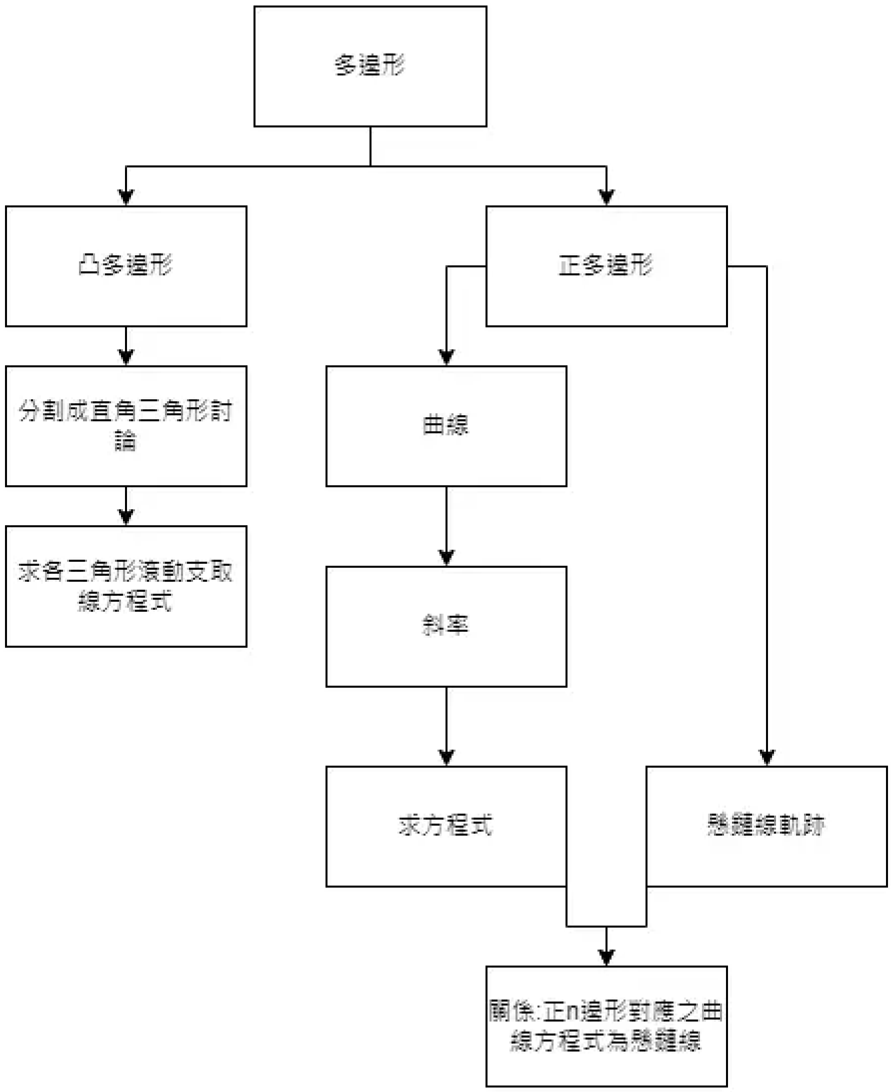


貳、研究設備及器材

軟體:GeoGebra、Desmos、Blender

參、研究過程與方法

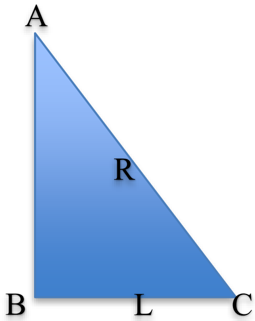
一、研究架構圖



二、名詞定義

(一) 斜率公式

下面的研究會用到這一個公式:



$$L = R \cdot \sqrt{\frac{1}{m^2 + 1}}$$

其中:

L 為直角三角形底邊單位長度數量

R 為直角三角形斜邊單位長度數量

m 為直角三角形斜邊斜率

證明:

由畢氏定理:

$$R^2 = L^2 + \overline{AB}^2$$

$$\overline{AB} = \sqrt{R^2 - L^2}$$

$$m = \frac{\sqrt{R^2 - L^2}}{L}$$

$$m^2L^2 = R^2 - L^2$$

$$(m^2 + 1)L^2 = R^2$$

$$L = R \cdot \sqrt{\frac{1}{m^2 + 1}}$$

(二) $\mathbf{M}$函數

研究時，會出現兩個含有Σ的式子，為了方便整合式子而創建一個函數$\mathbf{M}$

其定義如下:

若

$$S=\sum_{a=n}^{m} f(a)$$

則

$$m=\left(\mathop{\mathbf{M}}_{f(a)}^{s} a=n\right)$$

例如:

$$\left(\mathop{\mathbf{M}}_{a}^{10} a=1\right)=4$$

(三) A_n

圖形轉動 n 弧度時，與曲線的焦點

三、　正多邊形車輪與曲線的幾何關係

【已知】

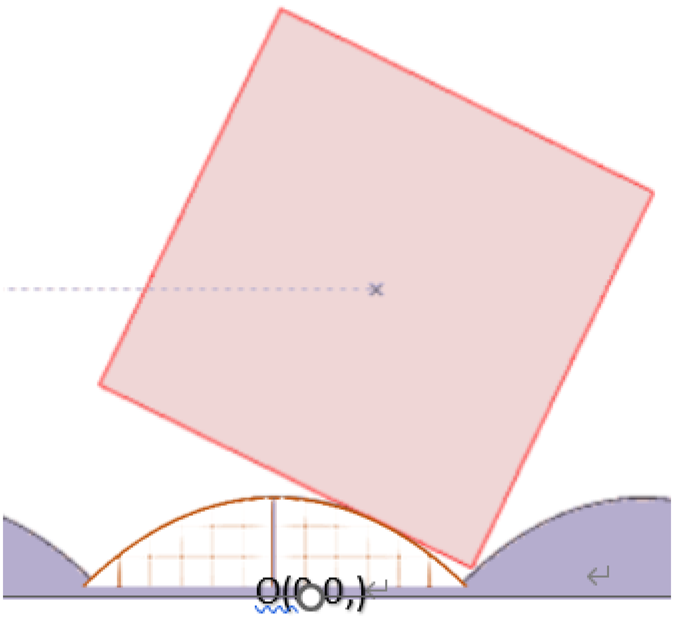
1. 正 n 邊形中心高度皆為 r
2. 正多邊形中心到頂點最長距離為 r
3. 正 n 邊形與曲線相切

註:以下角度單位為弧度

【目的】

求出曲線方程式

【方式】



▲The original uploader was Danielkwalsh at English Wikipedia. (Filled in color Jahobr)

先考慮線的右側

當正 n 邊形轉動任意度數(w)時，與曲線交點A_w:

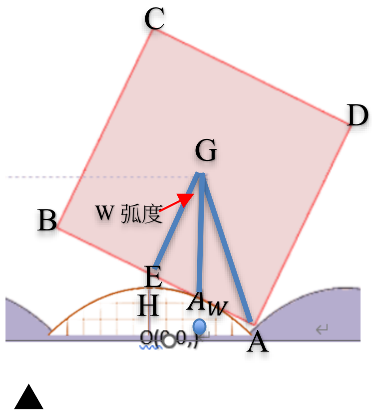
1. A_w的斜率(m_w)為:

   因正 n 邊形的邊與曲線相切→A_w斜率為正 n 邊形底邊的斜率

   因正 n 邊形轉了 w 度，因此:

正 n 邊形底邊斜率= tan (w)

$$m_w = tan(w)$$



The original uploader was Danielkwalsh at English Wikipedia. (Filled in color Jahobr)

2. A_w與曲線最高點(H)相距(L):

由圖可知:

$$L = \overline{EA_w}$$

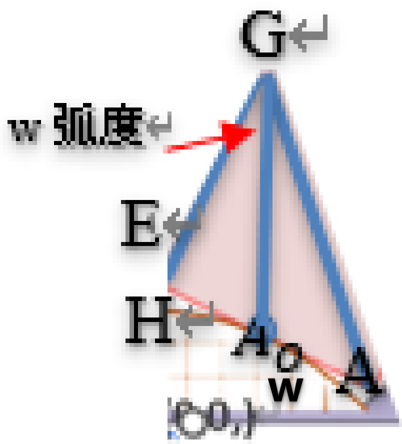
由三角函數:

1. $L = \overline{GE} \cdot tan(w)$

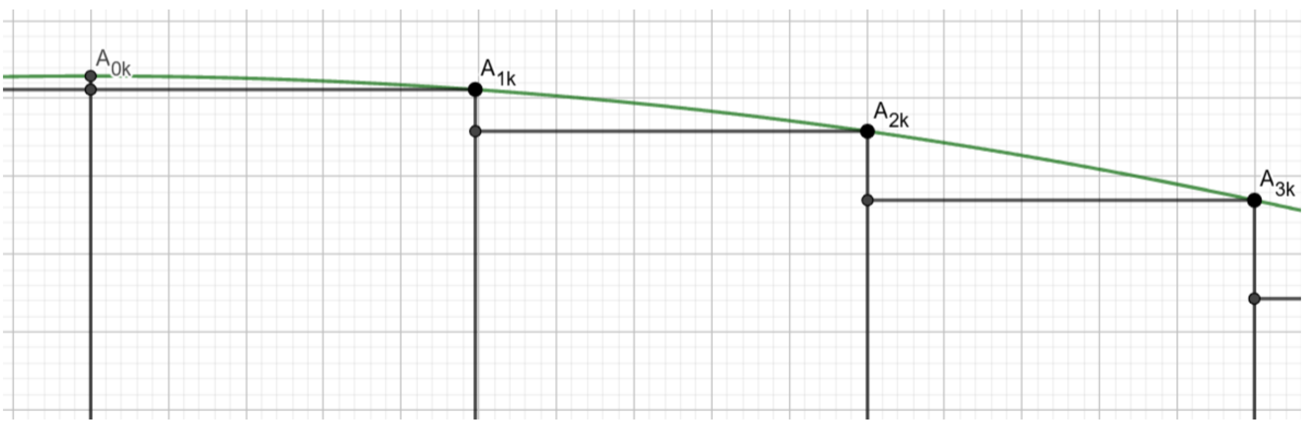
2. $\overline{GE} = rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

由上述二式:

3. $L = rcos\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot tan(w)$



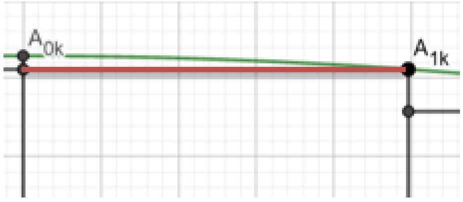
因此:



A_{1k}之 x 座標(x_{1k})與 y 座標(y_{1k})分別為:

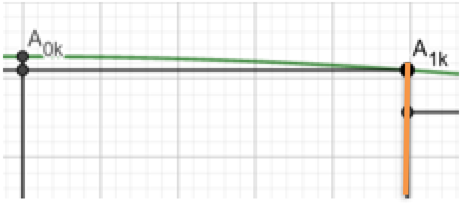
1. x_{1k}

由[定義]中的斜率公式:



$$x_{1k}=\lim_{k\to 0}\left(rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\tan(k)\cdot\sqrt{\frac{1}{\tan^2(k)+1}}\right)$$

2. y_{1k}



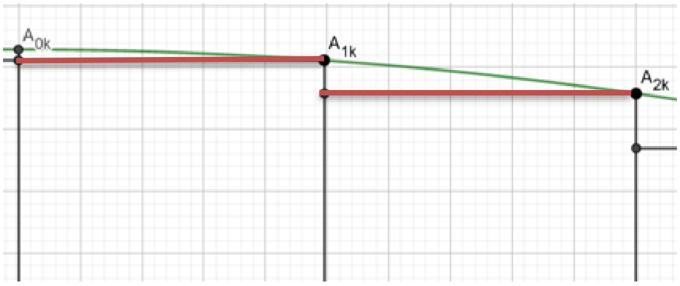
$$y_{1k}=\lim_{k\to 0}\left(r-rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)-rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\tan(k)\cdot\sqrt{\frac{1}{\cot^2(k)+1}}\right)$$

$$y_{1k}=\lim_{k\to 0}\left(r\left(1-cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)-rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\tan(k)\cdot\sqrt{\frac{1}{\cot^2(k)+1}}\right)$$

A_{2k}之 x 座標(x_{2k})與 y 座標(y_{2k})分別為:

1. x_{2k}

由[定義]中的斜率公式:

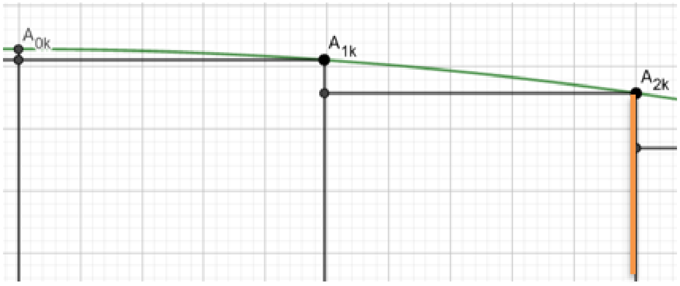


$$x_{2k}=\lim_{k\to 0}\left(rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\tan(2k)\cdot\sqrt{\frac{1}{\tan^2(2k)+1}}+rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot(\tan(2k)-\tan(k))\cdot\sqrt{\frac{1}{\tan^2(2k)+1}}\right)$$

$$x_{2k}=\lim_{k\to 0}\left(rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\tan(k)\sqrt{\frac{1}{\tan^2(k)+1}}+(\tan(2k)-\tan(k))\sqrt{\frac{1}{\tan^2(2k)+1}}\right)\right)$$

$$x_{2k}=\lim_{k\to 0}\left(rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\sum_{a=1}^{2}(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\tan^2(ak)+1}}\right)\right)$$

2. y_{2k}



$$y_{2k}=\lim_{k\to 0}\left(r-rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)-rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\tan(2k)\cdot\sqrt{\frac{1}{\cot^2(2k)+1}}-rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right.$$

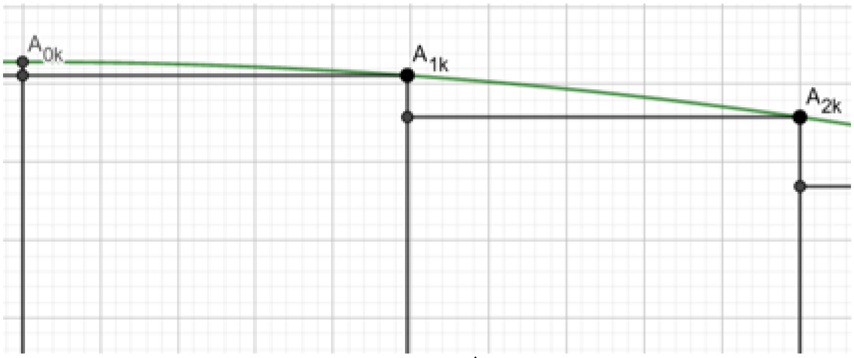
$$\left.\cdot(\tan(2k)-\tan(k))\cdot\sqrt{\frac{1}{\cot^2(2k)+1}}\right)$$

$$y_{2k}=\lim_{k\to 0}\left(r\left(1-cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\right.$$

$$\left.-rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\tan(k)\sqrt{\frac{1}{\cot^2(k)+1}}+(\tan(2k)-\tan(k))\sqrt{\frac{1}{\cot^2(2k)+1}}\right)\right)$$

$$y_{2k}=\lim_{k\to 0}\left(r\left(1-cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)-rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\sum_{a=1}^{2}(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\cot^2(ak)+1}}\right)\right)$$

由上述幾式可推知，A_{sk}:



……

$$x_{sk}=\lim_{k\to 0}\left(rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\sum_{a=1}^{s}(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\tan^2(ak)+1}}\right)\right)$$

$$y_{sk}=\lim_{k\to 0}\left(r\left(1-cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)-rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\sum_{a=1}^{s}(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\cot^2(ak)+1}}\right)\right)$$

化簡上式(用$\mathbf{M}$函數表示):

$$y_{sk}=\lim_{k\to 0}\left(r\left(1-cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)-rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\sum_{a=1}^{s}(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\cot^2(ak)+1}}\right)\right)$$

$$s=\lim_{k\to 0}\left(\mathop{\mathbf{M}}_{rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\tan^2(ak)+1}}}^{x_{sk}} a=1\right)$$

而因正 n 邊形由滾線最高點出發後，轉動角度必小於$\frac{\pi}{n}$，大於0。

因此:

$$y_{sk}=\lim_{k\to 0}\left(r\left(1-cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)-rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\sum_{a=1}^{s}(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\cot^2(ak)+1}}\right)\right)$$

$$0\le s=\lim_{k\to 0}\left(\mathop{\mathbf{M}}_{rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\tan^2(ak)+1}}}^{x_{sk}} a=1\right)\le\lim_{k\to 0}\left(\frac{\pi}{nk}\right)$$

因線上任何一點皆能以上述方式推導，

因此，此曲線方程式為:

$$y=\lim_{k\to 0}\left(r\left(1-cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)-rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\sum_{a=1}^{s}(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\cot^2(ak)+1}}\right)\right)$$

$$0\le s=\lim_{k\to 0}\left(\mathop{\mathbf{M}}_{rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\tan^2(ak)+1}}}^{x} a=1\right)\le\lim_{k\to 0}\left(\frac{\pi}{nk}\right)$$

因$x>0$:

$$y=\lim_{k\to 0}\left(r\left(1-cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)-rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\sum_{a=1}^{s}(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\cot^2(ak)+1}}\right)\right)$$

$$0 \le s = \lim_{k\to 0}\left(\mathop{\mathbf{M}}_{r cos\left(\frac{\pi}{n}\right)(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\tan^2(ak)+1}}}^{|x|} a = 1 \right) \le \lim_{k\to 0}\left(\frac{\pi}{nk}\right)$$

現在考慮左側:

因左側圖形與右側圖形為鏡像關係，

因此，左側圖形的方程式為:

$$y = \lim_{k\to 0}\left(r\left(1 - cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) - r cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\sum_{a=1}^{s}(\tan(ak) - \tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\cot^2(ak)+1}}\right)\right)$$

$$0 \le s = \lim_{k\to 0}\left(\mathop{\mathbf{M}}_{r cos\left(\frac{\pi}{n}\right)(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\tan^2(ak)+1}}}^{|-x|} a = 1 \right) \le \lim_{k\to 0}\left(\frac{\pi}{nk}\right)$$

因左側圖形與右側圖形方程式是一樣的，

因此，上述方程式的圖形是由左側圖形與右側圖形組成，即是要求的圖形。

所以，正 n 邊形滾線的方程式為:

$$y = \lim_{k\to 0}\left(r\left(1 - cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) - r cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\sum_{a=1}^{s}(\tan(ak) - \tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\cot^2(ak)+1}}\right)\right)$$

$$0 \le s = \lim_{k\to 0}\left(\mathop{\mathbf{M}}_{r cos\left(\frac{\pi}{n}\right)(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\tan^2(ak)+1}}}^{|x|} a = 1 \right) \le \lim_{k\to 0}\left(\frac{\pi}{nk}\right)$$

正 n 邊形車輪對應到的曲線之方程式為:

$$y = \lim_{k\to 0}\left(r\left(1 - cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) - rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\sum_{a=1}^{s}(\tan(ak) - \tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\cot^2(ak)+1}}\right)\right)$$

$$0 < s = \lim_{k\to 0}\left(\underset{rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\tan^2(ak)+1}}}{\overset{|x|}{\mathbf{M}}} a = 1\right) < \lim_{k\to 0}\left(\frac{\pi}{nk}\right)$$

其中:

n 為正多邊形邊數

r 為正多邊形中心到頂點最長距離

四、 正多邊形車輪與懸鏈線的幾何關係

【已知】

1. 以求出正 n 邊形對應的曲線方程式皆為:

$$y = \lim_{k\to 0}\left(r\left(1 - cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) - rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\sum_{a=1}^{s}(\tan(ak) - \tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\cot^2(ak)+1}}\right)\right)$$

$$0 \le s = \lim_{k\to 0}\left(\underset{rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\tan^2(ak)+1}}}{\overset{|x|}{\mathbf{M}}} a = 1\right) \le \lim_{k\to 0}\left(\frac{\pi}{nk}\right)$$

其中: r 為正 n 邊形中心到頂點直線距離

中心高度為 r

2. 正方形對應到的曲線為懸鏈線，方程式為:

$$y = a\sqrt{2} - \mathrm{acosh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$y > 0$$

其中:正方形邊長為 2a

正方形中心高度為其中心到頂點直線距離

且可寫成:

$$y = r\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{r}{\sqrt{2}}\left(1 - \cosh\left(x \cdot \frac{\sqrt{2}}{r}\right)\right)$$

$$y > 0$$

【求證】

正 n 邊形對應到的曲線是否為懸鏈線

【方式】

由【已知】可知:

$$y = \lim_{k \to 0}\left(r\left(1 - cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - rcos\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\sum_{a=1}^{s}(\tan(ak) - \tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\cot^2(ak)+1}}\right)\right)$$

$$0 \leq s = \lim_{k \to 0}\left(\sum_{(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\tan^2(ak)+1}}}^{\frac{|x|}{rcos\left(\frac{\pi}{4}\right)}} a = 1\right) \leq \lim_{k \to 0}\left(\frac{\pi}{4k}\right)$$

可化簡為:

$$y = r\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + rcos\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(1 - \cosh\left(\frac{|x|}{rcos\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)\right)$$

$$y > 0$$

因此:

$$\sum_{a=1}^{\mathbf{M}^{\frac{|x|}{rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)}}_{(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\tan^2(ak)+1}}}a=1} (\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\cot^2(ak)+1}} = 1-\cosh\left(\frac{|x|}{rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)$$

所以:

$$y = \lim_{k\to 0}\left(r\left(1-cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)-rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\sum_{a=1}^{s}(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\cot^2(ak)+1}}\right)\right)$$

$$0 \le s = \lim_{k\to 0}\left(\mathbf{M}^{|x|}_{rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\tan^2(ak)+1}}} a=1\right) \le \lim_{k\to 0}\left(\frac{\pi}{nk}\right)$$

可化簡為:

$$y = r\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)+rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(1-\cosh\left(\frac{|x|}{rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)\right)$$

$$y > 0$$

也就是:

$$y = r-rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cosh\left(\frac{x}{rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)$$

$$y > 0$$

正 n 邊形車輪對應到的曲線之方程式可由

$$y = \lim_{k \to 0} \left(r\left(1 - cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) - rcos\left(\frac{\pi}{n}\right) \left(\sum_{a=1}^{s} (\tan(ak) - \tan(ak - k)) \sqrt{\frac{1}{\cot^2(ak) + 1}} \right) \right)$$

$$0 \leq s = \lim_{k \to 0} \left(\mathop{\mathbf{M}}\limits_{rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)(\tan(ak) - \tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\tan^2(ak)+1}}}^{|x|} a = 1 \right) \leq \lim_{k \to 0} \left(\frac{\pi}{nk} \right)$$

化簡為為:

$$y = r - rcos\left(\frac{\pi}{n}\right) \cosh\left(\frac{x}{rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \right)$$

$$y > 0$$

其中:

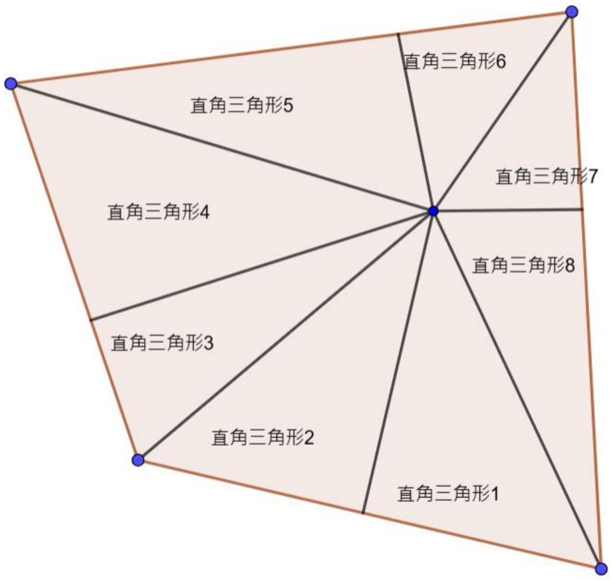
n 為正多邊形邊數

r 為正多邊形中心到頂點最長距離

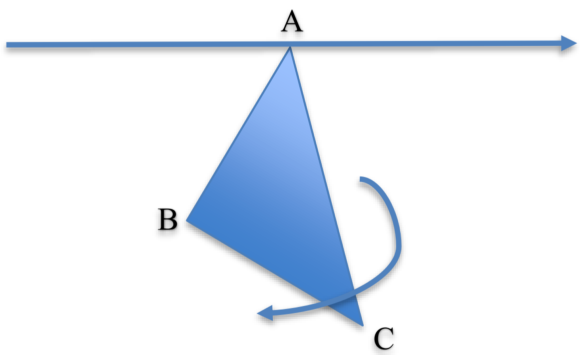
正 n 邊形車輪對應到的曲線之方程式為懸鏈線

五、直角三角形與曲線的幾何關係

凸多邊形是不規則圖形，無法利用上面求正多邊形的方式求其對應到的曲線方程式，但我們可以將其切分成數個直角三角形分別討論(如圖)，最後再整合在一起。



因此，必須求出當直角三角形之斜邊與一股的頂點為中心，向前滾時(如圖)，其所對應的曲線之方程式。



(一)斜邊在右側的直角三角形

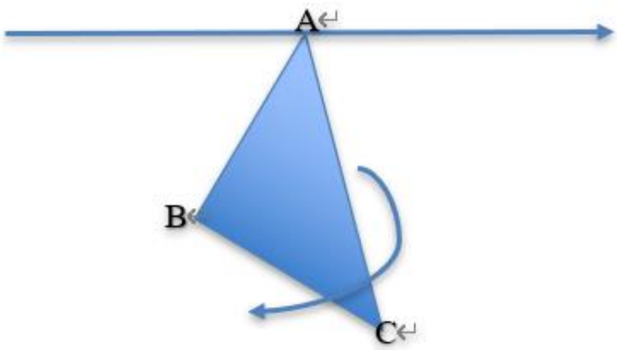
【已知】

1.直角三角形旋轉中心(如圖中 A 點)高度為$\overline{AC}$長度(r 單位長度)

2.$\overline{BC}$與曲線相切

3.∠A 為 w 弧度

註:以下角度單位為弧度



【目的】

求出曲線方程式

【方式】

當直角三角形轉動任意度數(Q)時，與曲線交點A_Q:

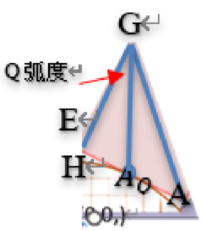
1.A_Q的斜率(m_Q)為:

因直角三角形的邊與曲線相切→A_Q斜率為$\overline{EA}$的斜率

因直角三角形轉了 Q 度，因此:

$\overline{EA}$斜率= $\tan(Q)$

$$m_Q = tan(Q)$$



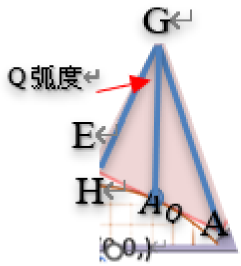
▲The original uploader was Danielkwalsh at English Wikipedia. (Filled in color Jahobr)

2.A_w與曲線最高點(H)相距(L):

由圖可知:

$L = \overline{EA_Q}$

由三角函數:



▲The original uploader was Danielkwalsh at English Wikipedia. (Filled in color Jahobr)

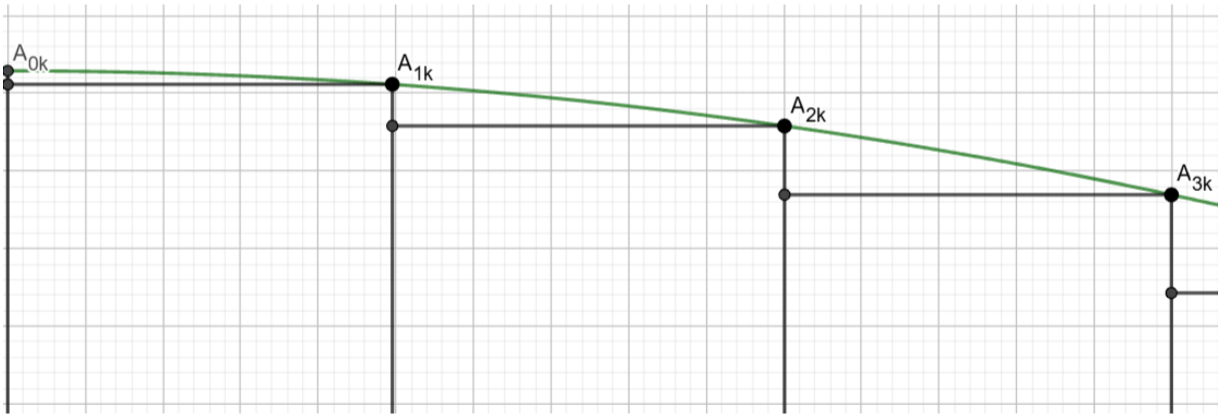
$$L = \overline{GE} \cdot tan(Q)$$

$\overline{GE} = rcos(w)$

由上述二式:

$L = rcos(w) \cdot tan(Q)$

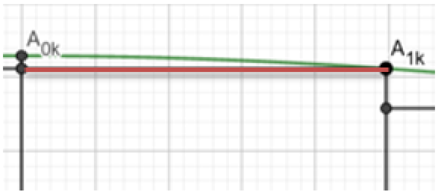
因此:



A_{1k}之 x 座標(x_{1k})與 y 座標(y_{1k})分別為:

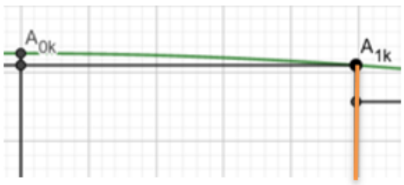
1.x_{1k}

由[定義]中的斜率公式:



$$x_{1k} = \lim_{k \to 0} \left(rcos(w) \cdot \tan(k) \cdot \sqrt{\frac{1}{\tan^2(k) + 1}} \right)$$

2.y_{1k}



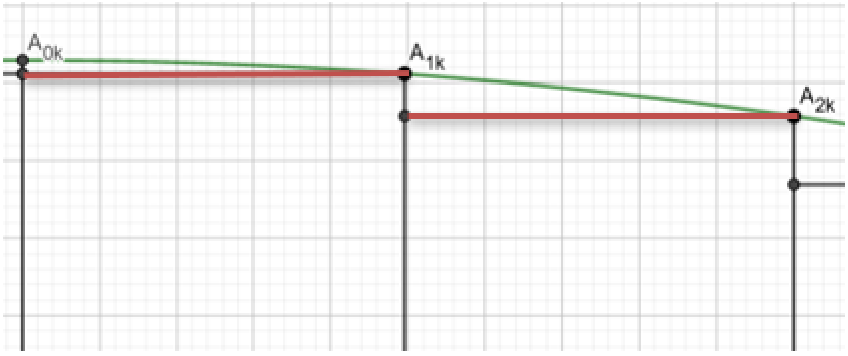
$$y_{1k} = \lim_{k \to 0} \left(r - rcos(w) - rcos(w) \cdot \tan(k) \cdot \sqrt{\frac{1}{\cot^2(k) + 1}} \right)$$

$$y_{1k} = \lim_{k \to 0} \left(r\big(1 - cos(w)\big) - rcos(w) \cdot \tan(k) \cdot \sqrt{\frac{1}{\cot^2(k) + 1}} \right)$$

A_{2k}之 x 座標(x_{2k})與 y 座標(y_{2k})分別為:

1.x_{2k}

由[定義]中的斜率公式:

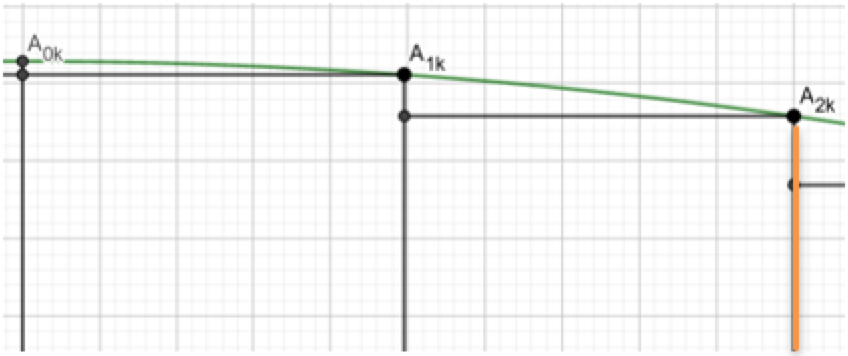


$$x_{2k}=\lim_{k\to 0}\left(rcos(w)\cdot\tan(2k)\cdot\sqrt{\frac{1}{\tan^2(2k)+1}}+rcos(w)\cdot(\tan(2k)-\tan(k))\cdot\sqrt{\frac{1}{\tan^2(2k)+1}}\right)$$

$$x_{2k}=\lim_{k\to 0}\left(rcos(w)\left(\tan(k)\sqrt{\frac{1}{\tan^2(k)+1}}+(\tan(2k)-\tan(k))\sqrt{\frac{1}{\tan^2(2k)+1}}\right)\right)$$

$$x_{2k}=\lim_{k\to 0}\left(rcos(w)\left(\sum_{a=1}^{2}(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\tan^2(ak)+1}}\right)\right)$$

2.y_{2k}

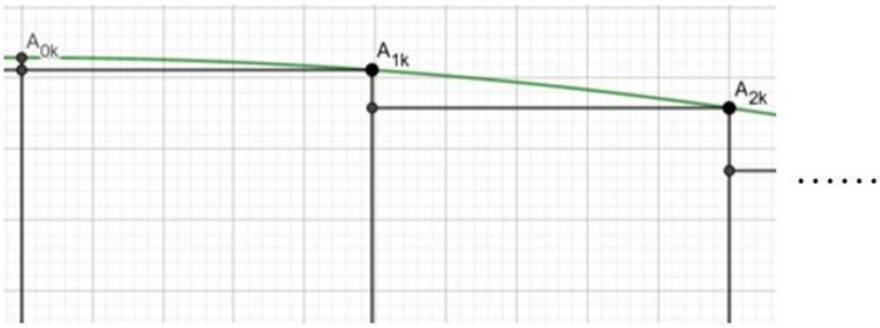


$$y_{2k}=\lim_{k\to 0}\left(r-rcos(w)-rcos(w)\cdot\tan(2k)\cdot\sqrt{\frac{1}{\cot^2(2k)+1}}-rcos(w)\cdot(\tan(2k)-\tan(k))\cdot\sqrt{\frac{1}{\cot^2(2k)+1}}\right)$$

$$y_{2k}=\lim_{k\to 0}\left(r(1-cos(w))-rcos(w)\left(\tan(k)\sqrt{\frac{1}{\cot^2(k)+1}}+(\tan(2k)-\tan(k))\sqrt{\frac{1}{\cot^2(2k)+1}}\right)\right)$$

$$y_{2k}=\lim_{k\to 0}\left(r(1-cos(w))-rcos(w)\left(\sum_{a=1}^{2}(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\cot^2(ak)+1}}\right)\right)$$

由上述幾式可推知，A_{sk}:



$$x_{sk}=\lim_{k\to 0}\left(rcos(w)\left(\sum_{a=1}^{s}(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\tan^2(ak)+1}}\right)\right)$$

$$y_{sk}=\lim_{k\to 0}\left(r(1-cos(w))-rcos(w)\left(\sum_{a=1}^{s}(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\cot^2(ak)+1}}\right)\right)$$

化簡上式(用$\mathbf{M}$函數表示):

$$y_{sk} = \lim_{k\to 0}\left(r\big(1 - cos(w)\big) - rcos(w)\left(\sum_{a=1}^{s}(\tan(ak) - \tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\cot^2(ak)+1}}\right)\right)$$

$$s = \lim_{k\to 0}\left(\mathop{\mathbf{M}}\limits_{rcos(w)(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\tan^2(ak)+1}}}^{x_{sk}} a = 1 \right)$$

而因正 n 邊形由滾線最高點出發後，轉動角度必小於$\frac{\pi}{n}$，大於0。

因此:

$$y_{sk} = \lim_{k\to 0}\left(r\big(1 - cos(w)\big) - rcos(w)\left(\sum_{a=1}^{s}(\tan(ak) - \tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\cot^2(ak)+1}}\right)\right)$$

$$0 \le s = \lim_{k\to 0}\left(\mathop{\mathbf{M}}\limits_{rcos(w)(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\tan^2(ak)+1}}}^{x_{sk}} a = 1 \right) \le \lim_{k\to 0}\left(\frac{w}{k}\right)$$

因線上任何一點皆能以上述方式推導，

因此，此曲線方程式為:

$$y = \lim_{k\to 0}\left(r\big(1 - cos(w)\big) - rcos(w)\left(\sum_{a=1}^{s}(\tan(ak) - \tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\cot^2(ak)+1}}\right)\right)$$

$$0 \le s = \lim_{k\to 0}\left(\mathop{\mathbf{M}}\limits_{rcos(w)(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\tan^2(ak)+1}}}^{x} a = 1 \right) \le \lim_{k\to 0}\left(\frac{w}{k}\right)$$

因為:

$$\sum_{a=1}^{\mathop{\mathbf{M}}\limits_{(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\tan^2(ak)+1}}}^{\frac{|x|}{rcos\left(\frac{\pi}{4}\right)}} a=1} (\tan(ak) - \tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\cot^2(ak)+1}} = 1 - \cosh\left(\frac{|x|}{rcos\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)$$

所以方程式可化簡為:

$$y = r - rcos(w)\cosh\left(\frac{x}{rcos(w)}\right)$$

$y > 0$

(二)斜邊在左側的直角三角形

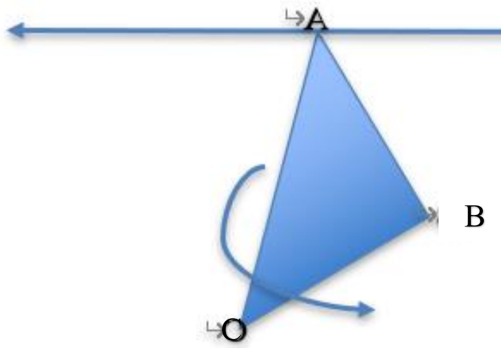
【已知】

1.直角三角形旋轉中心(如圖中 A 點)高度為$\overline{AC}$長度(r 單位長度)

2.$\overline{BC}$與曲線相切

3.∠A 為 w 弧度

註:以下角度單位為弧度



【目的】

求出曲線方程式

【方式】

斜邊在左的方程式與右側方程式關係為鏡像

→方程式為:

$$y = r - rcos(w)\cosh\left(\frac{-x}{rcos(w)}\right)$$

$y > 0$

直角三角形對應到的曲線之方程式:

1.斜邊在右

$$y = r - rcos(w)\cosh\left(\frac{x}{rcos(w)}\right)$$

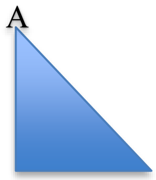
$$y > 0$$

2.斜邊在左

$$y = r - rcos(w)\cosh\left(\frac{-x}{rcos(w)}\right)$$

$$y > 0$$

其中:



w 為∠A 度數

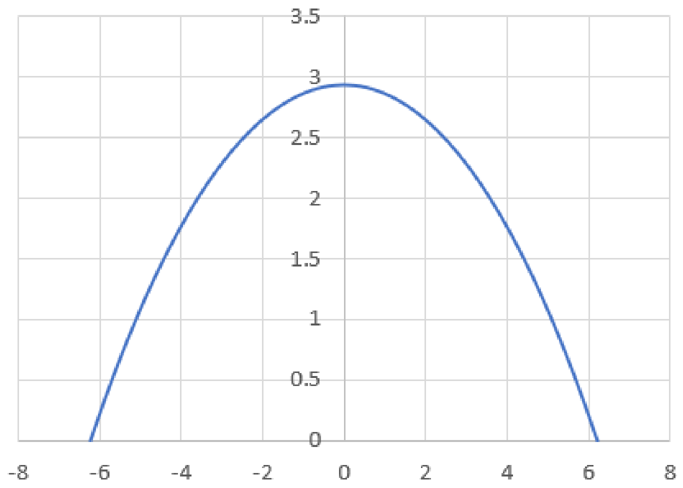
r 為斜邊長

肆、研究結果

一、正 n 邊形車輪對應到的曲線之方程式為:

$$y=\lim_{k\to 0}\left(r\left(1-cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)-rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\sum_{a=1}^{s}(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\cot^2(ak)+1}}\right)\right)$$

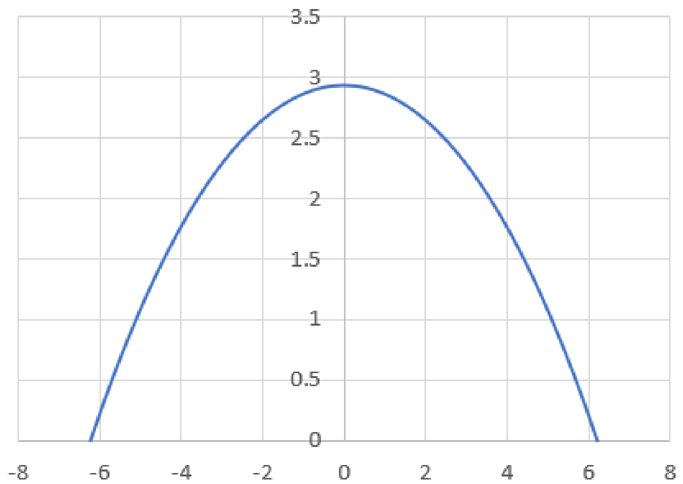
$$0<s=\lim_{k\to 0}\left(\mathop{\mathbf{M}}_{rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)(\tan(ak)-\tan(ak-k))\sqrt{\frac{1}{\tan^2(ak)+1}}}^{|x|} a=1\right)<\lim_{k\to 0}\left(\frac{\pi}{nk}\right)$$



二、正 n 邊形車輪對應到的曲線之方程式可由上式化簡為:

$$y=r-rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cosh\left(\frac{x}{rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)$$

$$y>0$$



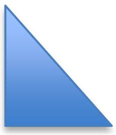
三、$y=r-rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cosh\left(\frac{x}{rcos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)$

$y>0$

為懸鏈線方程式

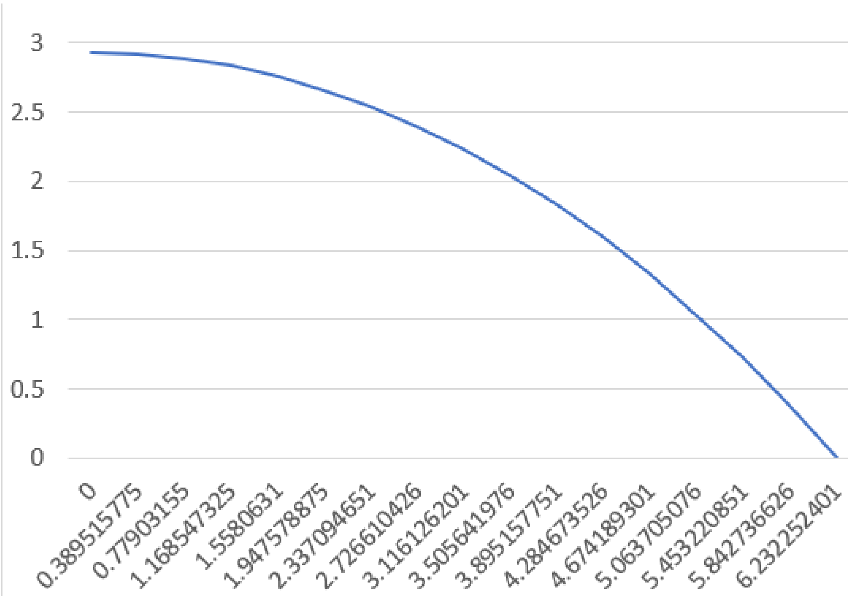
→正 n 邊形車輪對應到的曲線為懸鏈線

四、斜邊在右的直角三角形對應到的曲線

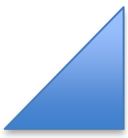


$y=r-rcos(w)\cosh\left(\frac{x}{rcos(w)}\right)$

$y>0$

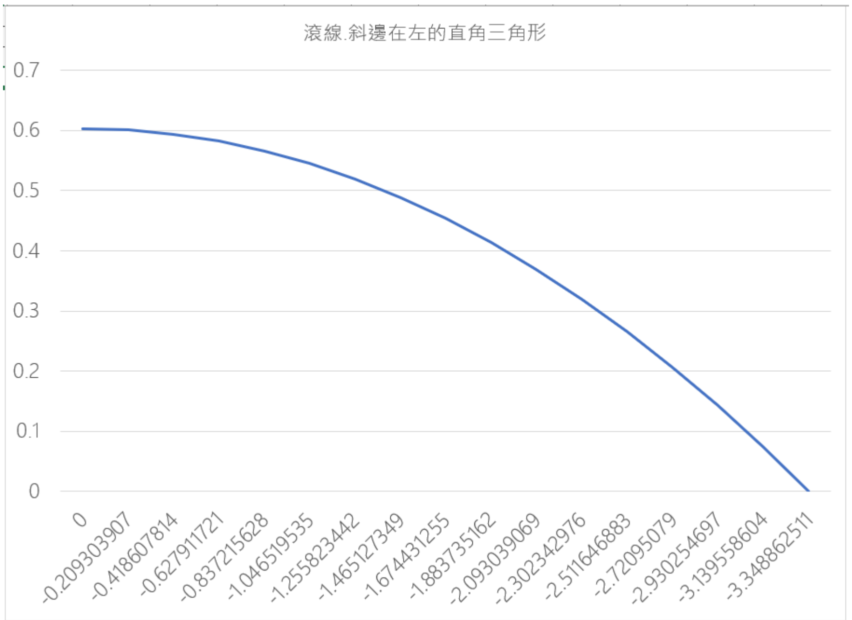


五、斜邊在左的直角三角形對應到的曲線



$y=r-rcos(w)\cosh\left(\frac{-x}{rcos(w)}\right)$

$y>0$



伍、討論

一、未來展望

若未來還有機會做到與這相關的科展，會朝下列方向發展:

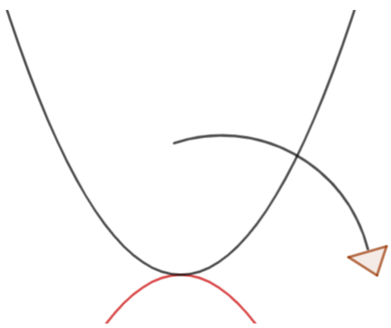
1.邊長不是直線的車輪滾動狀態

在此研究中，我們計算出邊長為直線的圖形車輪，對應到的曲線。

這不禁讓我們好奇，邊不是直線，而是弧線的輪子(例如:勒洛三角形)，是否也有對應到的曲線?

2.非封閉圖形滾動狀態

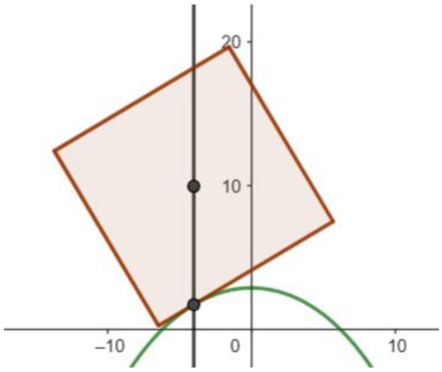
本研究中的圖形皆為封閉圖形，那非封閉曲線是否也有對應到的曲線?例如:拋物線?



3.正多邊形車輪與路面焦點位置

當我們在測試正多邊形滾動狀態時，發現其與路面交點位置似乎都在中心點下方。

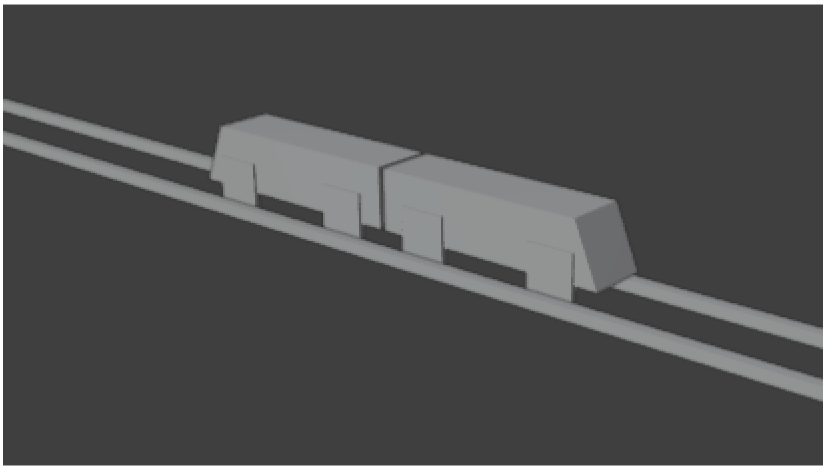
這讓我們不禁好奇，這是因為錯覺，還是事實?



二、應用

利用求出的結果，說不定能將裝了差速器的軌道車，將軌道換成懸鏈線，並將輪子換成適當正多邊形，在特定情況下，也許能增加剎車效率。

如果未來要設計交通工具，可以參考我們的研究結果，來設計相應的道路。



陸、參考資料及其他

The use of Square shaped wheels in ship harbouring using an inverted catenary surface

https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2012/pdf/010061.pdf

球解懸鍊線-以 nanodots 模擬數學曲線

https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/60/pdf/NPHSF2020-030410.pdf

物質科學|開放博物館

https://openmuseum.tw/muse/exhibition/d5647c8b265628a1ccb87e5605aed268#basic-5fvegdxu61

方形輪腳踏車

http://www.mathland.idv.tw/life/squarewheel.htm

Square Wheels - Reinventing the Wheel:

https://www.youtube.com/watch?v=PfLz7haFvkk

維基百科.懸鏈線

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%82%AC%E9%93%BE%E7%BA%BF