

新竹市第四十二屆中小學科學展覽會
作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：孔明神跳

關 鍵 詞：孔明棋、獨子棋、三角形棋盤

編號：

孔明神跳

摘要

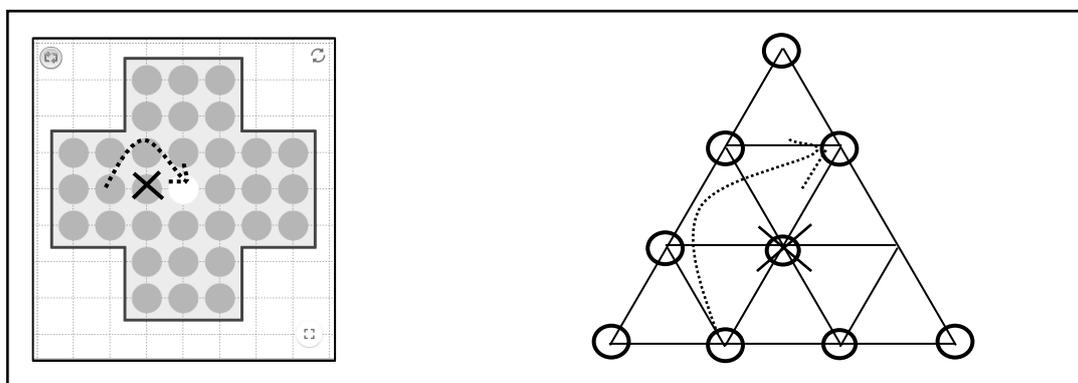
本研究主要探討在 3 層和 4 層的三角形棋盤的孔明棋題型與解法。研究成果如下：

- 一、我們從研究了 3 層所有題型，找出共有 18 種題型（5 種有解、13 種無解）。
- 二、我們有找出 4 層的 59 種題型（21 種有解、38 種無解）。
- 三、棋盤上不同位置的棋子（角棋、邊棋、心棋），在移動性或能否被消除上，具有不同特性。
- 四、可以利用棋子能否移動或被消失的特性，以及有解的 < 字形或菱形單位，來幫忙判斷題型是否有解。
- 五、我們檢驗前人研究的三色定理，並不能準確的預測題型是否有解。
- 六、利用有解的 < 字形或菱形單位解法，可以延伸應用到解更大棋盤上的題型。

壹、前言

一、研究動機

學校數學社團的老師，帶我們玩了許多數學小遊戲。其中有一個叫做「孔明棋」的遊戲，讓我們最感興趣，也有網站可以和電腦對戰（<https://www.geogebra.org/m/nWUCWZ3p>）。原本的孔明棋盤是如圖 1 左所示，遊戲規則是：當一個棋子跳過另一個棋子時，就可以將它吃掉，但是如果旁邊沒有棋子時，則不能跳。最後的解是棋盤上只留下 1 顆棋子，或是能留下的棋子越少越好。



(圖 1) 孔明棋原始棋盤 (左) 與本研究的孔明跳棋棋盤 (右)

因為原始的孔明棋遊戲，已經有許多人研究過解法。我們搜尋科展研究報告，發現有一篇作品也是研究三角形的棋盤：三角獨子棋（第 56 屆中小學科學展覽會國中組），但是他們的研究是從 5 層棋盤的有解盤面來研究，只研究有解盤面和解法，延伸到 8 層的盤面也只是針對缺 1 個洞的題型，研究方法上則是有應用到三色定理來研究。

因為他們的研究，並沒有針對包括無解的其他題型來比較如何判斷有解或無解，而且也只研究了 5 層以上較大的題型。所以我們想要從最小的棋盤（3 層~4 層）來開始來研究，看看能不能發現如何判斷有解或無解題型的方法，或是找出其他解題方法的規律性。

二、研究目的

1. 探討 3 層棋盤的所有題型與解題結果
2. 探討 3 層棋盤題型與解法具有的規律性。
3. 探討 4 層棋盤的可能題型與解題結果。
4. 探討 4 層棋盤題型與解法具有的規律性。
5. 探討可延伸到 5 層以上題型的解題策略。

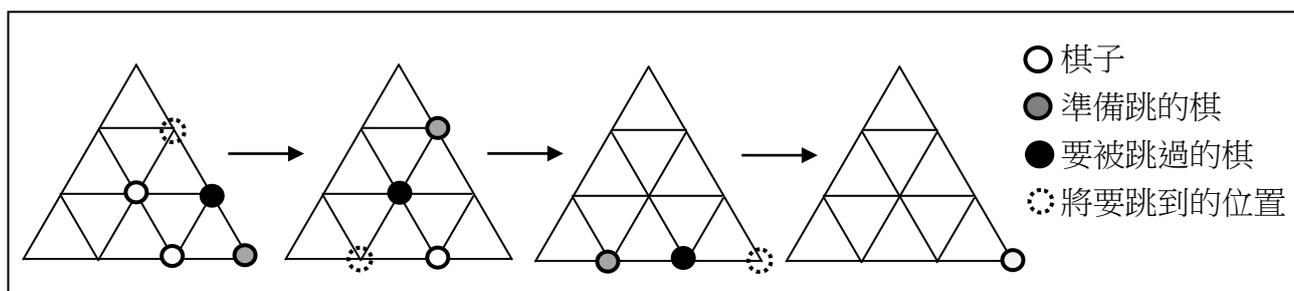
貳、研究設備及器材

紙、筆、電腦（整理報告）。

參、研究過程與結果

一、遊戲規則

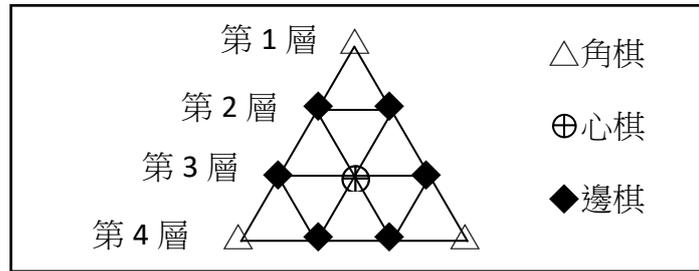
孔明跳棋的遊戲規則，是在一個三角形棋盤上的棋子，不能直接移位到旁邊的空位，只能用類似跳棋的跳動方式跳過旁邊的棋子，而被跳過的棋子就消失。跳到最後棋盤上只剩下一顆棋就成功了（有解）。如果剩下的棋子數 >1 ，就是無解。



(圖 2)孔明跳棋遊戲規則說明

二、名詞定義

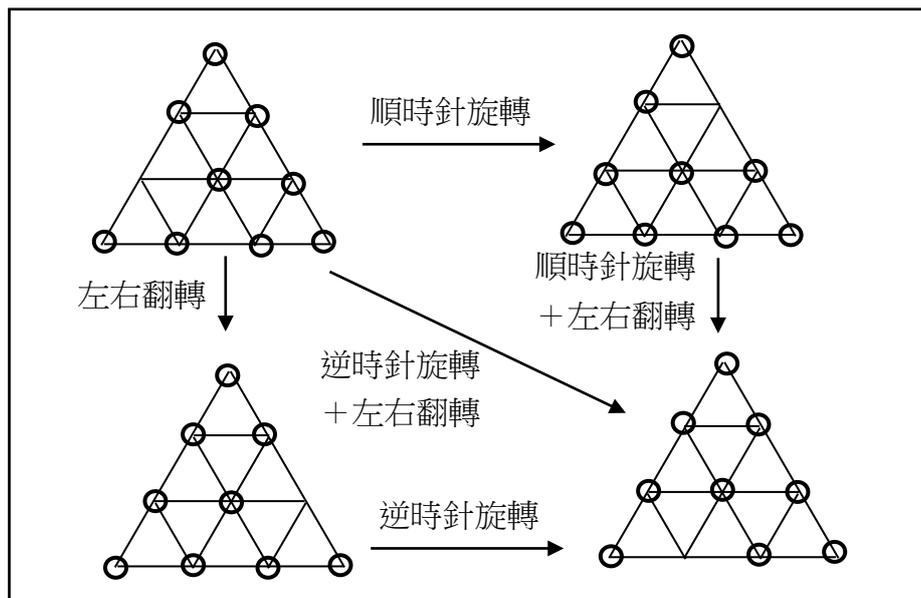
1.棋子的種類：以棋子在棋盤上的位置來命名「角棋」、「心棋」和「邊棋」（如圖 3）。



(圖 3) 棋子命名與棋盤位置示意圖

2.棋盤層數：從上到下計算棋盤層數，如圖 3 所示是 4 層的棋盤。

3.題型與編號：相同數量的棋子，在棋盤上的擺放位置，如果經過旋轉或翻轉後會重合，就會被當成相同題型而排除。例如在圖 4 中幾個棋盤上的棋子，因為彼此經過旋轉或翻轉之後可以重合，只能算是同一種題型。



(圖 4) 相同題型示例圖

題型的標號方式為：No.層數-空格數-序號。例如：No.3-1-1，代表是 3 層棋盤、1 個空位、第 1 種題型。

三、3 層孔明跳棋的所有題型與解法

因為準備要跳的棋、被跳過的棋和空位要在同一直線上，所以至少要 3 層的棋盤才能讓棋子可以直線跳躍移動。所以我們從 3 層的棋盤開始研究所有可能的題型與解法。

3層共有 $1+2+3=6$ 個位置可以擺放棋子，至少要有 1 個空位，所以最多可以放 5 個棋子。而 5 個空位（1 個棋）不用找解，4 個空位（2 個棋）很容易直接判斷有沒有解以及解法，所以我們就研究 1 個空位（5 個棋）~3 個空位（3 個棋）的所有題型，找出每個題型最後可以得到的最佳解（剩下最少棋子）。研究結果整理於表 1。

(表 1) 3 層所有題型與解題結果整理表 (灰底為有解題型)

題型	No.3-1-1 	No.3-1-2 	No.3-2-1 	No.3-2-2 	<u>No.3-2-3</u>
結果	No.3-4-1 	無法移動	No.3-4-1 	No.3-3-1 	<u>No.3-5-1</u>
題型	No.3-2-4 	No.3-3-1 	<u>No.3-3-2</u> 	No.3-3-3 	NO.3-3-4
結果	無法移動	No.3-4-2 	<u>No.3-5-1</u> 	No.3-4-1 	無法移動
題型	NO.3-3-5 	<u>No.3-4-3</u> 	No.3-4-4 	<u>No.3-5-1</u> 	No.3-5-2
結果	無法移動	<u>No.3-5-1</u> 	無法移動	本題自解	本題自解

【研究發現】

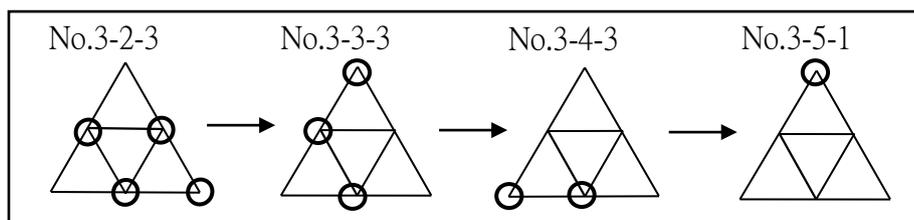
- 3 層棋盤共有 18 種題型（5 種有解、13 種無解）。其中：
 - 1 個空位的有 2 種（0 種有解、2 種無解）；
 - 2 個空位的有 4 種（1 種有解、3 種無解）；

3 個空位的有 6 種（1 種有解、5 種無解）；

4 個空位的有 4 種（1 種有解、3 種無解）；

5 個空位的 2 種題型，都只剩下 1 個棋，直接就是此題型的解。其中只有 1 個角棋的題型，是其他 3 層棋盤有解的最後結果。

2. 棋盤至少要 2 個以上的空位（洞）才能有解，2 洞、3 洞、4 洞唯一的 1 種的有解題型，是連續跳動解題過程（如圖 5 所示）中可以變化出來的題型。



(圖 5) 3 層有解題型變化圖

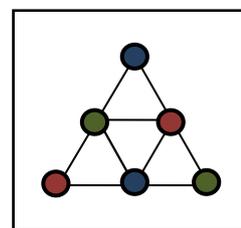
3. 3 層棋盤只有角棋可以移動，而且只能跳到角棋。
4. 3 層的邊棋而邊棋不能移動，只能被角棋跳過而消失，而角棋只能跳到角棋，沒有機會被消掉。所以最後得到的解，都是留下 1 個角棋。
5. 因為角棋不能被消掉，所以有解的題型，都只能有 1 個角棋；超過 1 個角棋的題型，都無解。如圖 5 所示，1 個角棋搭配 1 顆相鄰的邊棋，或是再加上另一顆不相鄰的邊棋（3 顆棋排列成 **ㄩ** 字形），或是搭配 3 顆邊棋（4 顆排成 **菱形**），都有解。
6. 因為邊棋只能被角棋消掉，所以只有邊棋的題型，如果是兩顆以上就無解，而只有一顆棋的本身就是解。
7. 從三色定理來解釋(如圖 6 所示)，三層棋盤大於 2 個棋的有解題型都要有 1 個角棋、且只能有 1 個角棋：

1 顆棋子的題型 = 1 個角棋，或是 1 個邊棋；

2 顆棋子的題型 = 1 個角棋 + 1 顆不同顏色邊棋；

3 顆棋的題型 = 1 個角棋 + 1 顆同色邊棋 + 1 顆不同色邊棋；

4 顆棋的題型 = 1 個角棋 + 1 顆同色邊棋 + 2 顆不同色邊棋。

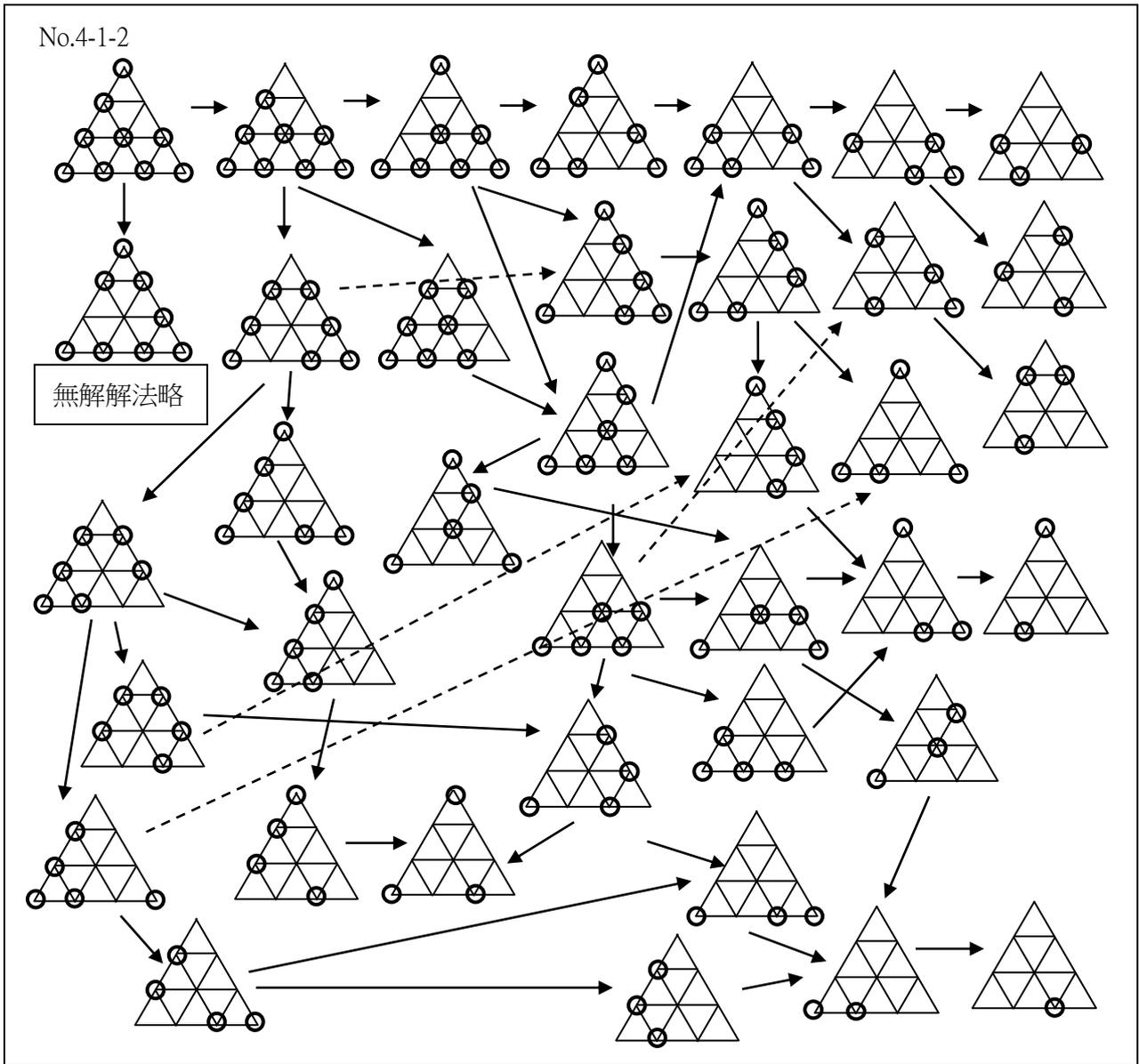


(圖 6) 3 層棋盤三色標示

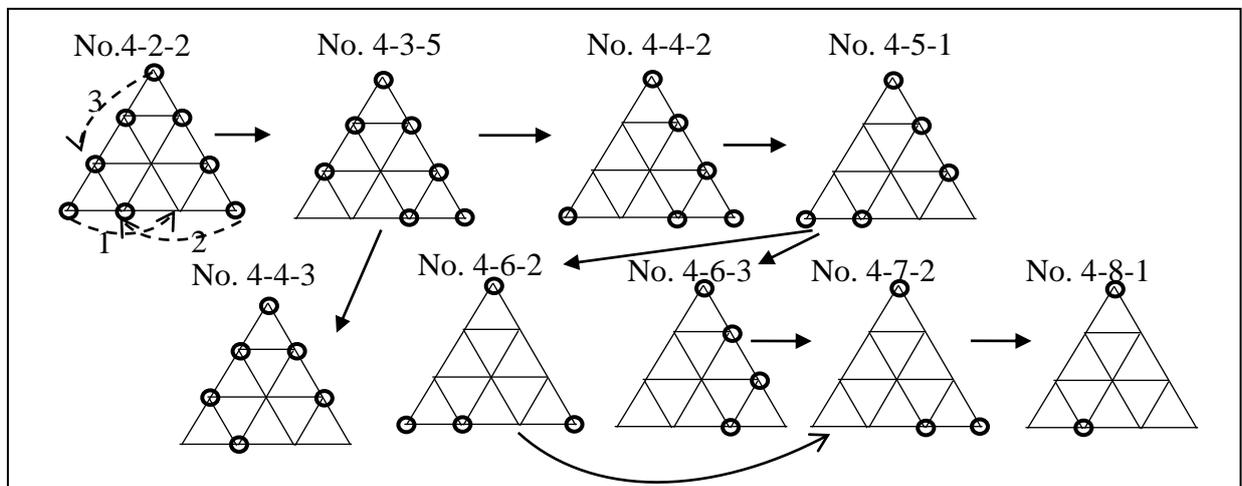
四、4 層孔明跳棋的可能題型與解法

我們從 1 個洞開始研究可能的題型，去找出最佳解法並紀錄解題過程會出現的題型

(以圖 7~圖 9 來示例)。最後將我們有找到的 4 層孔明跳棋題型與解法，整理成表 2。

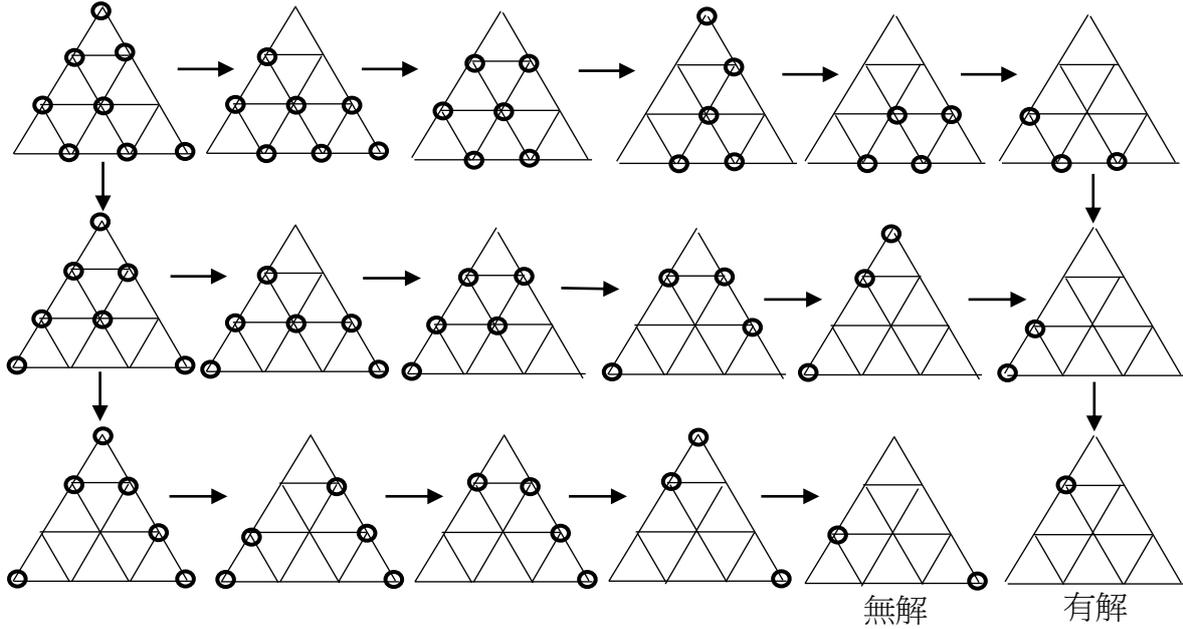


(圖 7) 4 層 1 洞 1 個題型的解題過程圖

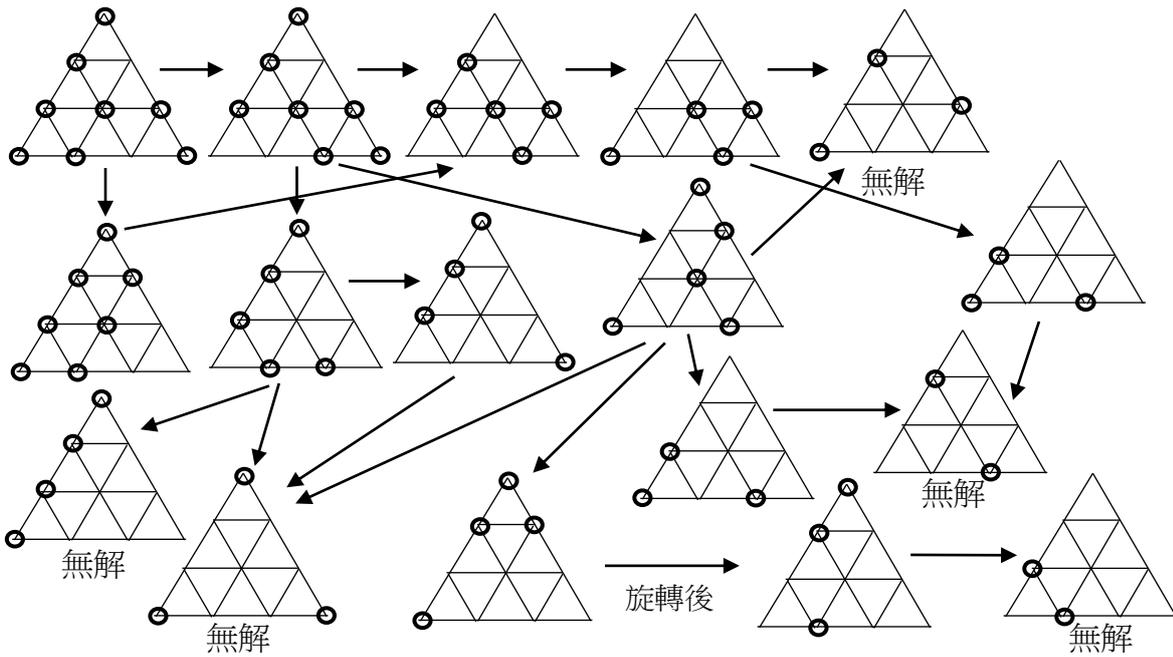


(圖 8) 4 層 2 洞的 1 個無解題型解題過程圖

No.4-2-4 的不同走法



No.4-2-7 無解的不同走法



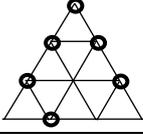
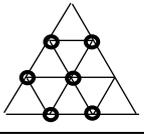
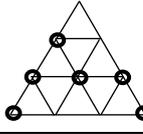
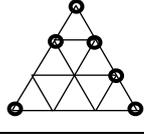
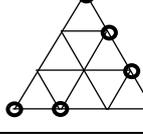
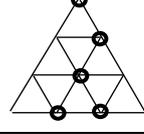
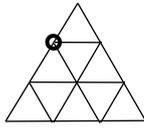
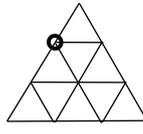
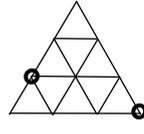
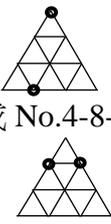
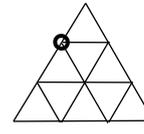
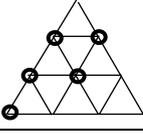
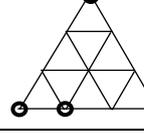
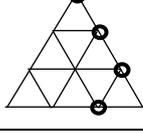
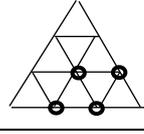
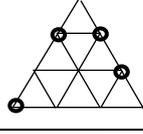
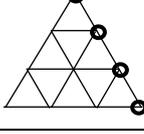
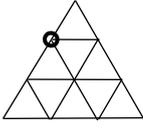
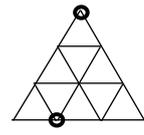
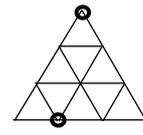
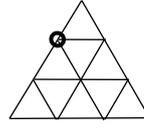
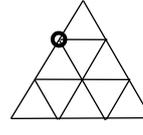
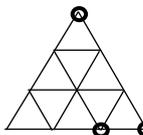
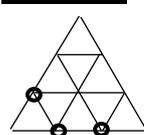
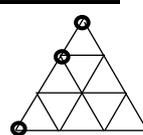
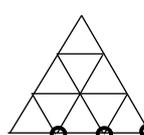
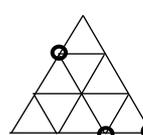
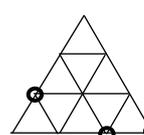
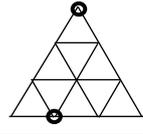
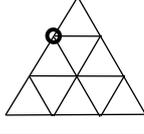
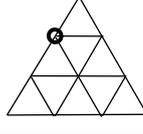
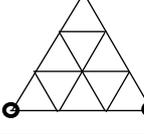
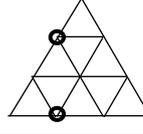
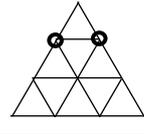
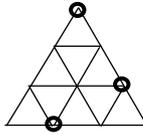
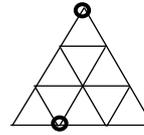
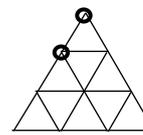
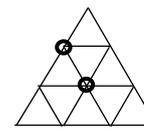
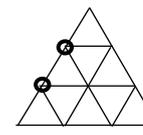
(圖 9) 4 層 2 洞兼具有不同走法的 2 個題型解題過程圖

(表 2) 4 層找到的題型與解題結果整理表 (灰底為有解題型)

題型	No.4-1-1 	No.4-1-2 	No.4-1-3 	No.4-2-1 	No.4-2-2 	No.4-2-3
結果	No.4-7-1 	No.4-8-1 或 No.4-9-1 	無法移動	No.4-7-1 	No.4-8-1 	No.4-8-1 或 No.4-8-2
題型	No.4-2-4 	No.4-2-5 	No.4-2-6 	No.4-2-7 	No.4-2-8 	No.4-3-2
結果	No.4-9-1 或 No.4-8-1 	No.4-3-1 	No.4-8-1 或 No.4-9-1 	No.4-8-2 或 No.4-8-3 等 5 種(見圖 9) 	No.4-9-1 	No.4-7-1
題型	No.4-3-3 	No. 4-3-4 	No. 4-3-5 	No. 4-3-6 	No.4-3-7 	No.4-3-8
結果	No.4-9-1 	No.4-8-3 	No.4-4-1 或 No.4-8-1 	No.4-7-1 	No.4-9-1 或 No.4-8-1 	No.4-6-1
題型	No.4-3-8 	No. 4-3-9 	No. 4-3-10 	No. 4-3-11 	No. 4-3-12 	No. 4-4-2
結果	No.4-8-2 	No.4-8-2 	No.4-7-2 或 No.4-8-3 或 No.4-9-1 	No.4-9-1 	No.4-9-1 或 No.4-8-1 	No.4-8-1

(下頁續)

(續表 2) 4 層找到的題型與解題結果整理表 (灰底為有解題型)

題型	No. 4-4-3 	No. 4-4-4 	No. 4-4-5 	No. 4-4-6 	No. 4-5-1 	No. 4-5-2 
結果	無法移動	No.4-9-1 	No.4-9-1 	No.4-8-1 	No.4-8-1 或 No.4-8-2 	No.4-9-1 
題型	No. 4-5-3 	No. 4-6-2 	No. 4-6-3 	No. 4-6-4 	No. 4-6-5 	No. 4-6-6 
結果	No.4-9-1 	No.4-8-1 	No.4-8-1 	No.4-9-1 	No.4-9-1 	無法移動
題型	No. 4-7-3 	No. 4-7-4 	No. 4-7-5 	No. 4-7-6 	No. 4-7-7 	No. 4-7-8 
結果	No.4-8-1 	No.4-9-1 	No.4-9-1 	No. 4-8-4 	No. 4-8-5 	No. 4-8-2 
題型	No. 4-7-9 	No. 4-8-6 	No. 4-8-7 	No. 4-8-8 	No. 4-8-9 	
結果	無法移動	無法移動	No.4-9-1	No.4-9-1	No.4-9-2 	

【研究發現】

1. 4 層棋盤我們共有找到 59 種題型 (21 種有解、38 種無解)。其中：

1 個空位的有 3 種 (1 種有解、2 種無解)

2 個空位的有 8 種 (3 種有解、5 種無解)

3 個空位的有 13 種（4 種有解、9 種無解）

4 個空位的有 6 種（2 種有解、4 種無解）

5 個空位的有 3 種（2 種有解、1 種無解）

6 個空位的有 6 種（2 種有解、4 種無解）

7 個空位的有 9 種（2 種有解、7 種無解）

8 個空位的有 9 種（3 種有解、6 種無解）

9.個空位的有 2 種（2 種有解、0 種無解）

2. 4 層棋盤各個位置棋子的移動規律性：

(1) 只有心棋是完全無法移動，需要被邊棋跳過才會消失。所以 >1 顆棋的有解題型，最後剩下的棋，不可能是心棋。心棋要被消失，旁邊必須要出現與其相連的邊棋。

(2) 心棋以外其他位置的棋，可以移動或被消失。

(3) 角棋只能跳到邊棋，無法被其他棋子跳過而消失。

(4) 邊棋可以跳過同一側的邊棋變成角棋，或跳過心棋變成另一側的邊棋，或被同一側的角棋跳過而消失。

(5) 因為其他棋子移動後，不會變成心棋，所以心棋會是一開始的題型就出現的棋子，被消失之後就不會再出現了。

3. 剩下 3 顆棋子時，3 顆棋不能全部都分開（每一顆都無法移動），也不能全部連成一條線（如：No. 4-7-6）。要有兩顆棋子相連、1 顆分開，才可能有解。

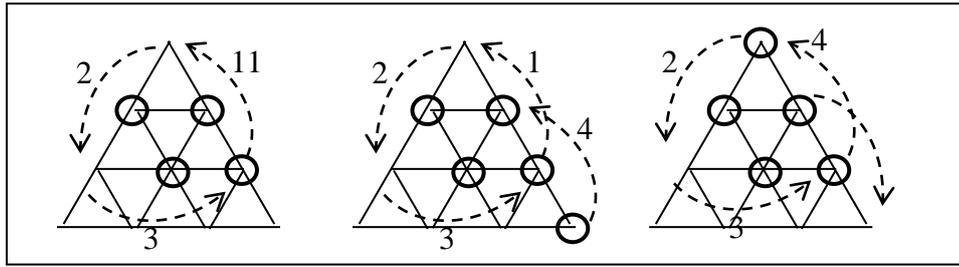
4. 觀察表 2 的題型，可以發現有和 3 階相同的特殊排列圖形：3 顆棋排成「 \angle 」字形，和 4 顆菱形，和題型是否有解有一定的關係。

(1) 「 \angle 」字形 + 1 顆分開的角棋：有解。

(2) 「 \angle 」字形 + 1 顆相連的角棋：無解。

(3) 只有菱形（見圖 9 左）或 + 相連的角棋（見圖 9 中、右）：有解。

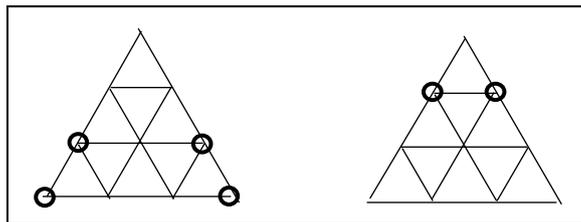
(4) 菱形 + 分開的角棋：無解。



(圖 9) 4 層菱形圖案的解題過程圖

5. 解題策略的應用：

- (1) 因為角棋不能被消失，所以要盡量把角棋跳到邊棋的位置，
- (2) 全部分開的棋子，會無法移動。所以棋子移動時要往棋子較多的地方，讓棋子相連起來，才有機會互相消除。
- (3) 如果心棋旁邊都沒有邊棋，心棋就無法被消失，會無解。所以邊棋全部去除前，要先去除心棋。
- (4) 如果 2 顆角棋跳成 2 顆邊棋時，變成兩顆不同邊的邊棋，就無法互相消除，很容易就無解（如圖 10 所示）。所以角棋移動時，盡量向同一邊移動。



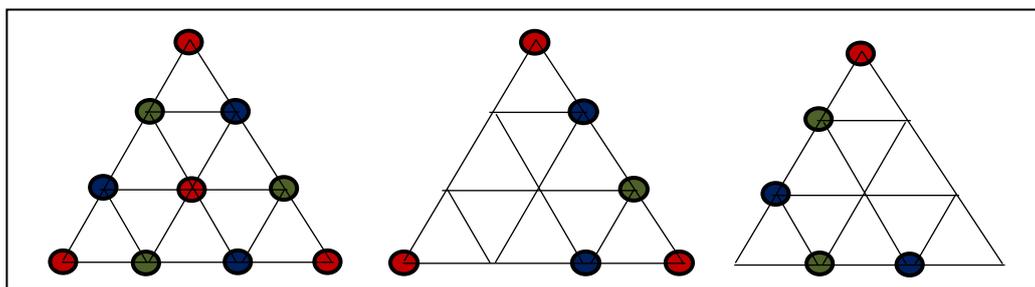
(圖 10) 無解的角棋移動情形

肆、討論

一、從三色定理來解釋研究發現

在「三角獨子棋」這篇科展研究中，用「三色定理」來檢驗棋盤是否有解。三色定理是指將棋盤上每個位置標示紅色、綠色、和藍色，讓每個位置都與旁邊相鄰的顏色不同（如圖11左所示）。R為棋盤上紅色位置上的棋子總數、G為綠色棋子總數、B為藍色棋子總數。第22頁提到：『從三色定理我們得知當R.G.B的總數同為奇數或同為偶數時，則此盤面必定無解，反之，三色總數出現一奇二偶或二偶一奇時，則此盤面就會有解。』第24頁：『就算三色數量皆有一些落差，但仍會有解，且終點顏色為就算三色數量皆有一些落差，但仍會有解，且終點顏色為會有解，且終點顏色為二偶一奇中的「奇」或二

奇一偶中的「偶」。』從第24頁來判斷，第22頁應該有筆誤，應是：「三色總數出現一奇二偶或二奇一偶時，則此盤面就會有解。」



(圖 11) 三色標示的棋盤 (左) 與無解的題型 (中、右)

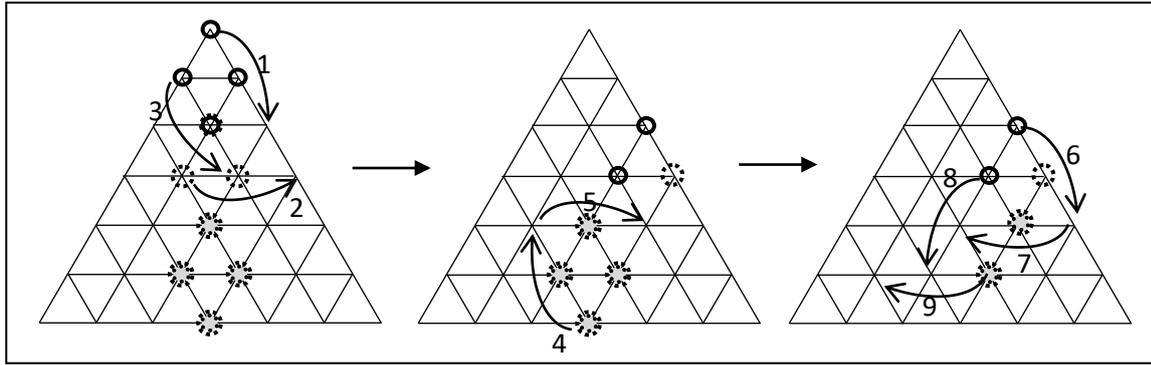
我們用三色定理來檢驗題型是否有解，發現圖 8 中 No.4-4-2 的無解題型(見圖 11 中)：R3、G1、B2，以及圖 9 的 No.4-2-7 解題過程出現的無解題型 No.4-5-1：R1、G2、B2 (圖 11 右)。依據「三角獨子棋」的研究，這兩題二奇一偶 (解是一偶的顏色 G) 和一奇二偶 (解是一奇的顏色 R)，都應該是有解題型。但是實際上是無解。所以三色定理並不能準確的判斷題型是否有解。

可以用我們的研究發現和解題策略來判斷 No.4-4-2 是否有解：

1. 「 \lt 」字形+1 顆相連的角棋：無解。圖 11 右中有 1 個由 2 顆藍色邊棋和 1 顆綠色邊棋所組成的 \lt 字形和兩端有相連的角棋，即使消去 1 顆角棋，還是有 1 顆分開的角棋，會無解。
2. 全部分開的棋子，會無法移動。所以棋子移動時要往棋子較多的地方，讓棋子相連起來，才有機會互相消除。如果 2 顆角棋跳成 2 顆邊棋時，變成兩顆不同邊的邊棋，就無法互相消除，很容易就無解 (如圖 10 所示)。所以角棋移動時，盡量向同一邊移動。但是 No.4-4-2 中 3 顆角棋，左下的 1 顆和其他棋都分開，要靠右下的角棋向它的的方向移動，就無法再移向上的另一顆角棋了。所以會有分散的棋子而無解。

二、如何延伸應用到解更大的棋盤

我們有找出來 \lt 字形有解的解法，和圖 9 中菱形有解的解法，可以延伸應用到更大的棋盤中。以圖 12 的題型為例，可以先將棋盤中的棋子分成 3 組菱形，先解兩端的小單位，向中間集中，並且讓留下來的 1 個解的棋子互相連接起來，就有機會可以得到最後的解了！



(圖 12) 6 階棋盤應用菱形基本單位解法的解題過程

伍、結論

本研究成果得到下面幾個結論：

- 一、我們從研究了 3 層所有題型，找出共有 18 種題型（5 種有解、13 種無解）。並用三色定理來解釋，具有角棋的有解題型，要搭配怎樣的棋子才能有解。
- 二、我們有找出 4 層的 59 種題型（21 種有解、38 種無解）。有的有解題型，不同的走法便會變成無解。
- 三、棋盤上不同位置的棋子（角棋、邊棋、心棋），在移動性或能否被消除上，具有不同特性。可以利用棋子能否移動或被消失的特性，作為解題策略的參考。因為單獨分開的棋子無法移動或被消失，所以解題時，要讓棋子盡量互相集中、連接起來，才能互相移除而解題。
- 四、我們有找到容易辨認的 < 字形或菱形單位，可以用來幫忙判斷題型是否有解。
- 五、三色定理並不能準確的預測題型是否有解。
- 六、利用有解的 < 字形或菱形單位解法，可以延伸應用到解更大棋盤上的題型。

陸、參考資料及其他

- 1.孔明棋線上遊戲：<https://www.geogebra.org/m/nWUCWZ3p>。
- 2.黃韻璇、何碩宸。三角獨子棋。第 56 屆中小學科學展覽會國中組數學科，網址：
<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/56/pdf/030404.pdf>。