

新竹市第四十二屆中小學科學展覽會

作品說明書

科 別：應用科學I

組 別：國中組

作品名稱：水花之旋—模擬旋轉式灑水器及設計優化

關 鍵 詞：模擬、旋轉、液體

編 號：113JA-I004

摘要

我們想透過計算水珠的運動方程，再利用並用程式來模擬灑水器，並嘗試找出更為均勻的設計參數。

根據我們的模擬結果，在出水口傾角組為45-60-70-90且出水口仰角45-60-65的情況下，綜合落點分布圖、可涵蓋面積、涵蓋率、標準差（灑水平均度指標）獲得最好的結果。我們亦自行實際測量現實並比對模擬的水滴落點。我們的模擬結果與現實誤差率在 $\pm 10\%$ 以內，在可容許範圍之內。也探討了造成誤差可能的原因。

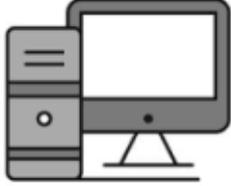
壹、研究動機

近年來，隨著日益嚴重的全球暖化以及氣候變遷，我們可用的水資源日益枯竭。我們在日常生活校園中的庭園看到灑水器，一面旋轉一面灑水，就覺得這個裝置真的非常神奇，小小一台就可以澆灌大部分的庭園。這種灑水器以噴出水柱造成的反作用力來維持旋轉並澆灌草皮，可以達到對大面積進行灑水的目的。但是我們發現這種灑水器的澆灌結果似乎不太均勻，導致有些地方吸收過多的水，或是完全沒水，造成水資源的浪費。所以我們想嘗試利用寫程式來模擬灑水器，並嘗試找出更為均勻的設計參數。

貳、研究目的

- 一、定義及探討可能會影響灑水的狀態的變因
- 二、分析灑水器所牽涉到的力學和所噴出的水滴的運動方程式
- 三、透過程式模擬灑水器的水滴落點
- 四、將模擬出的灑水器落點和現實灑水器的落點比較並探討誤差原因
- 五、探討水珠落點最均勻的設計參數

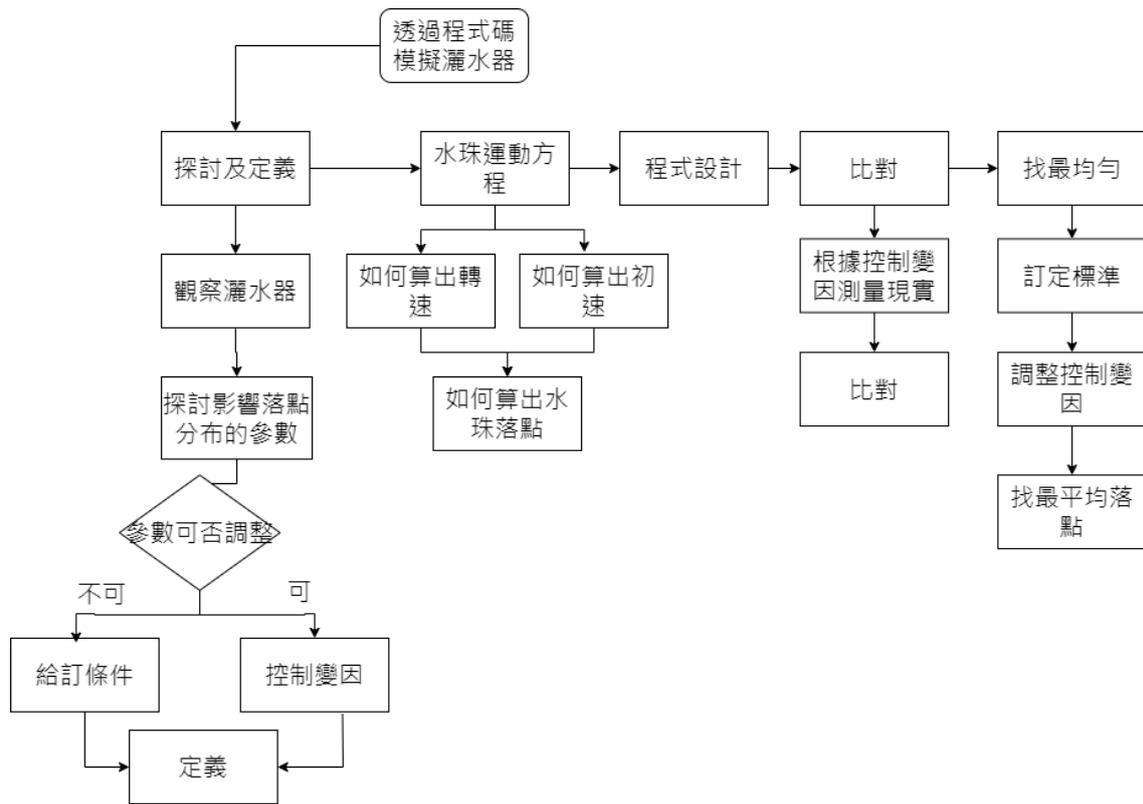
參、研究設備及器材

1.旋轉式灑水器	2.電腦(Windows 系統+ 內建記事本)	3.手機(Samsung Galaxy S8+)
		
4.Microsoft Excel 用於產生分層設色圖	5.HTML 5 + JavaScript 用於模擬程式	6.drawio 用於繪製流程圖
		

[圖1]所有研究器材

肆、研究過程或方法

我們的實驗架構如下。



[圖2]研究流程圖

一、定義及探討可能會影響灑水的狀態的變因

我們先從觀察學校使用的灑水器開始。下圖是一個灑水器。靜態的灑水器可以看出有3個放射狀的旋臂，將圓周角三等分，也就是夾角各為120度。另外，三支旋臂都各有4個出水口，每個出水口的方向錯開。三支旋臂上靠近末端的黑色部分含出水口可以旋轉以改變水柱噴出的角度。



[圖3]旋轉式灑水器-靜止狀態



[圖4] 旋轉式灑水器-噴水狀態

接著我們將灑水器接上水龍頭水源，實際灑水並觀察出水時的狀態，發現到灑水器本身雖然沒有外加其他動力來源，但是由於水柱噴出的反作用力而推動灑水器開始旋轉。若旋轉前述旋臂上的黑色部件使出水口的方向更接近垂直於地面的方向，則轉速會比較慢甚至不轉，可以推論出灑水器軸承有摩擦力。不能旋轉的可能原因是因為水柱噴出提供的反作用力未能超過灑水器底座的轉軸之間的最大靜摩擦力。

接下來觀察水的運動，我們發現水柱噴出至中途就斷裂變成很多的小水珠，水珠的運動軌跡看起來很像拋物線。我們認為如果忽略空氣阻力、表面張力、風向以及會影響灑水分佈狀態的其他外力因素，水珠的運動軌跡會是拋物線。

我們討論之後，決定灑水器的模擬器將以下面的參數來計算。

總水流量、出水口內徑、出水口高度、出水口與軸心距離、發射頻率、霧化散射角、摩擦係數，作為控制變因。透過實際測量現有灑水器得知。

「總水流量Q」

在連接水龍頭全開的狀態下，以量筒接取灑水器5秒的出水量，將出水的總量換算成每一秒的水量。總共測量3次，取平均值。

「出水口內徑d」

以出水口末端為準，因出水口是圓形，測量出水口的直徑。

「發射頻率f」

透過模擬時以間歇式射出水珠的方式來逼近真實狀態，代表在一秒內有多少個水珠從單一出水口噴出。較為符合現實的定義是(總水流量÷水珠體積)，但這會使的發射頻率很大，電腦效能無法負荷如此大量的運算。所以我們的發射頻率由本研究給定，為避免跟旋臂旋轉的頻率形成倍數關係造成干擾，通常給定一個稍大質數。

「霧化散射角」

因為觀察到水柱噴出之後水珠會變成更小的水珠並且散開，這個角度是難以計算的的，在本研究中透過觀測估計散射角，設定霧化散射的效果用與出水口中心線成夾角 $\frac{\text{散射角}}{2}$ 度的圓錐體，在這範圍內用隨機方式來模擬。

「總出水口截面積A」

由圓面積公式計算可得單一出水口截面積 $\pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^2$ 。因有三個旋臂，各旋壁上有四個出水口，故所求為 $\pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^2 \times 12$ 。

「出水口高度h」

定義為旋臂旋轉平面距離地面的高度，忽略出水口突出部分造成的微小差異。在本研究中使用現有的灑水器高度。

「出水口與軸心距離r」

定義為出水口和軸心間的距離，同樣忽略出水口突出部分造成的微小差異。在本研究中使用現有灑水器的數值。

「摩擦係數k」

定義為旋臂與底座之間的摩擦係數，主要影響轉速。因為未知項較多，後續透過實際觀測多組不同灑水器設定的轉動狀態和模擬程式的計算結果比對，推算摩擦。透過方程式(1)可以推得。

$$\rho Q \sum_{n=1}^{12} V_{t,n} \times r_n = \sum_{n=1}^{12} (\rho Q \times r_n^2 + k) \omega \cdots \cdots (1)$$

另外再將以下2個基本參數當作研究的操縱變因。

出水口仰角、出水口傾角，分別說明如下：

「出水口仰角 φ 」

定義為出水口延伸線與水平面的夾角。

「出水口傾角 θ 」

定義為出水口延伸線在X-Y平面的投影與所在旋臂向外延伸方向的夾角。

灑水器三支旋臂的交點稱為軸心。每個旋臂和其上的每個出水口都對著軸心作圓周運動。水滴落點則採用X-Y-Z絕對坐標系，將灑水器水平放置於平坦地面，轉軸重疊於Z軸，軸心(有離地高度)投影至X-Y平面則重疊於絕對座標系原點。

二、灑水器旋轉力矩與水珠運動方程式

由自來水源頭提供一穩定「總水流量Q」，假設水珠離開出水口瞬間所受之壓力P為0，完全轉換為發射動能。

(一)灑水器的旋轉力矩

水珠的初速 $V = Q/A$ (有12出水口均分水)

水珠從出水口噴出時並不是水平，所以計算水平速度分量及垂直速度分量時還需要經過換算，用三角函數即可算出。

$$\text{水珠的水平方向速度分量 } V_{hor} = V \times \cos\varphi \dots\dots(2)$$

$$\text{水珠的垂直方向速度分量 } V_{ver} = V \times \sin\varphi \dots\dots(3)$$

當旋臂為靜止時，水珠以出水口仰角 φ 、初速 V 的條件離開出水口。可類比於大砲發射砲彈，以拋物線軌跡飛行， t 為飛行時間：

$$\text{垂直方向位移} = V_{ver} \times t - \frac{1}{2}gt^2 \dots\dots(4)$$

出水口距離地面高度為 h 。當垂直方向位移為 $-h$ 時水珠掉落至地面，一元二次方程式求解 t 可得飛行時間。

$$V_{ver} \times t - \frac{1}{2}gt^2 = -h \text{ 移項得}$$

$$\frac{1}{2}gt^2 - V_{ver} \times t - h = 0 \text{ 一元二次方程式求解}$$

$$t = \frac{V_{ver} + \sqrt{V_{ver}^2 + 2gh}}{g} \dots\dots(5)$$

任取其中一支旋臂及其上的一個出水口進一步分析。出水口傾角 θ 是出水口延伸線在 X-Y 平面的投影與所在旋臂向外延伸方向的夾角。前面提到的水珠的水平方向速度分量還可以拆解成平行於旋臂方向的分量和垂直於旋臂方向的分量。

$$\text{平行於旋臂方向的分量 } V_r = V_{hor} \times \cos\theta \dots\dots(6)$$

$$\text{垂直於旋臂方向的分量 } V_t = V_{hor} \times \sin\theta \dots\dots(7)$$

水珠沿垂直於旋臂方向噴出的速度分量將形成一反作用力作用於旋臂上，形成轉動力矩的一部分；平行於旋臂方向的分量則否。灑水器在穩定狀態 (steady state)，以等轉速進行轉動，合力矩為零。由於旋臂本身以等轉速進行轉動，在垂直於旋臂方向有一切線速度，因此

$$\text{加總的垂直於旋臂方向的分量 } V_t = V_{hor} \times \sin \theta - r\omega \cdots\cdots(8)$$

依角動量守恆定律算出轉速

$$\sum_{n=1}^{12} \rho Q [(V_{t,n} - r_n \omega) \times r_n] = k\omega \cdots\cdots(9)$$

$$\omega = \frac{\sum_{n=1}^{12} V_{t,n} \times r_n}{\frac{k}{\rho Q} + \sum_{n=1}^{12} (r_n^2)} \cdots\cdots(10)$$

其中k為摩擦係數

(二)水珠運動方程

當觀測者站在絕對座標系的原點，也就是軸心投影至地面的位置進行觀測，三支旋臂因轉動的關係分別和正X軸方向夾著 ωt 、 $\omega t + \frac{2\pi}{3}$ 、 $\omega t - \frac{2\pi}{3}$ 的角度。

旋臂A上的出水口所噴出的水珠:

$$\text{平行於正X軸方向的速度分量 } V_{x,A} = V_t \sin(\omega t) + V_r \cos(\omega t) \cdots\cdots(11)$$

$$\text{平行於正Y軸方向的速度分量 } V_{y,A} = -V_t \cos(\omega t) + V_r \sin(\omega t) \cdots\cdots(12)$$

旋臂B上的出水口所噴出的水珠:

$$\text{平行於正X軸方向的速度分量 } V_{x,B} = V_t \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + V_r \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \cdots\cdots(13)$$

$$\text{平行於正Y軸方向的速度分量 } V_{y,B} = -V_t \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + V_r \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \cdots\cdots(14)$$

旋臂C上的出水口所噴出的水珠:

$$\text{平行於正X軸方向的速度分量 } V_{x,C} = V_t \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + V_r \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cdots\cdots(15)$$

$$\text{平行於正Y軸方向的速度分量 } V_{y,C} = -V_t \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + V_r \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cdots\cdots(16)$$

三、模擬灑水器的落點

(一)輸入參數

測量現實灑水器的給定條件。

參數名稱	程式中參數名稱	數值(單位)
總水流量Q	flow	$2.39 \times 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$
出水口內徑d	N/A	0.002 m
總出水口截面積A	area	$3.77 \times 10^{-5} \text{m}^2$
出水口高度h	h0	0.11 m
出水口與軸心距離r	radii[出水口編號]	0.060,0.072,0.084,0.096m
發射頻率f	frequency	137 Hz
霧化散射角	angleupadd	15°
摩擦係數	k	0.25

[表1]

其中摩擦項需透過測量現實中灑水器轉速來推得
觀測了兩組數據，如下表

情況	穩定態轉速(rad/s)	推算的 $\frac{k}{\rho Q}$ (四捨五入至小數點後2位)
傾角45-60-70-90 仰角45-60-75	7.54	0.25
傾角45-60-70-90 仰角60-60-75	6.28	0.25

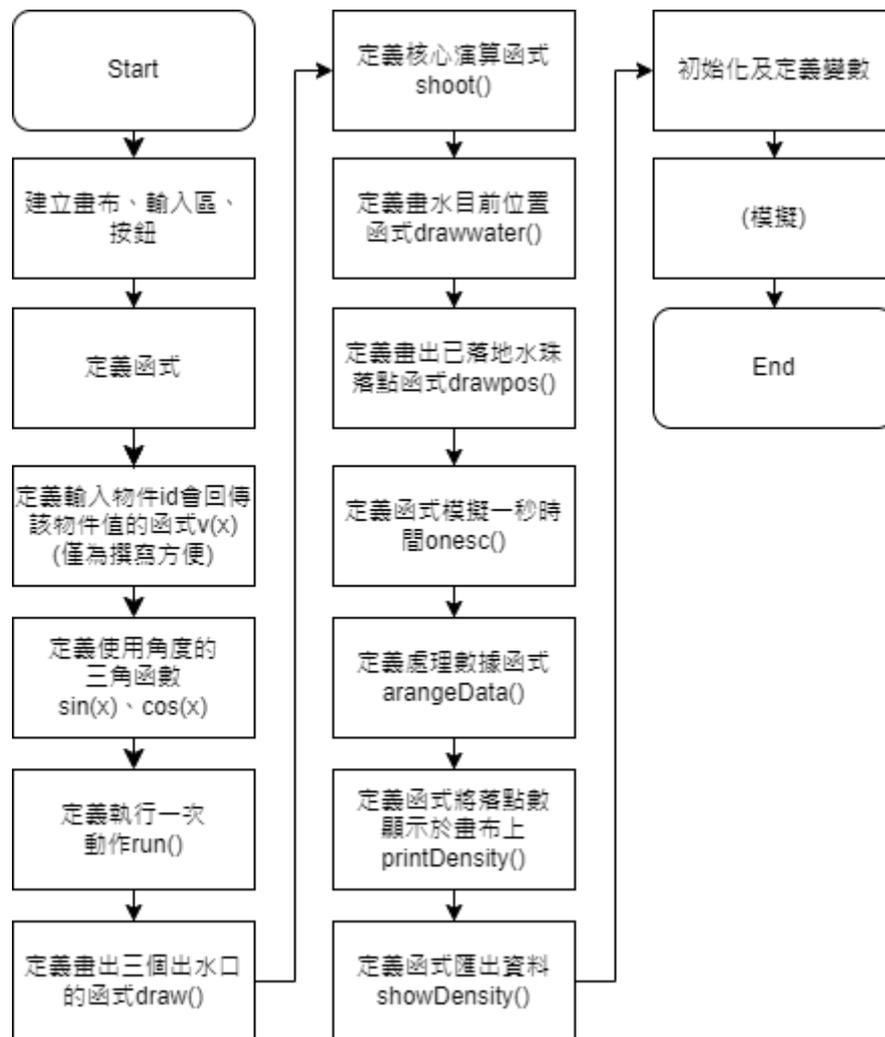
[表2]

及控制變因「出水口仰角 φ 」、「出水口傾角 θ 」

因為想要觀看每一刻水珠的位置，所以採用間歇式的調整位移及z方向速度
經測試誤差值約為2cm，屬可容許範圍。

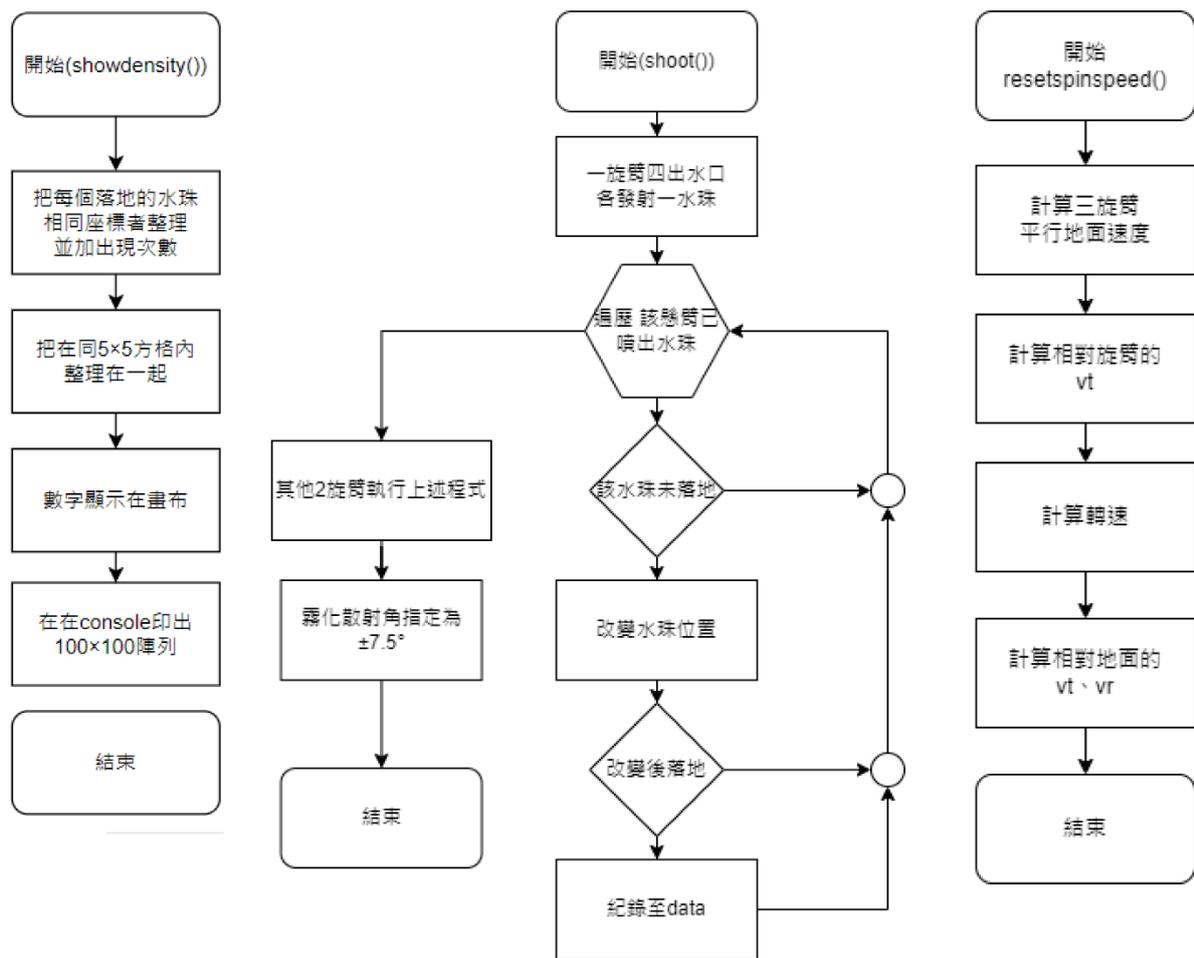
(二)程式運作方式

以下為程式運行的簡略架構



[圖5]主程式運行流程圖

及其中函式的演算法



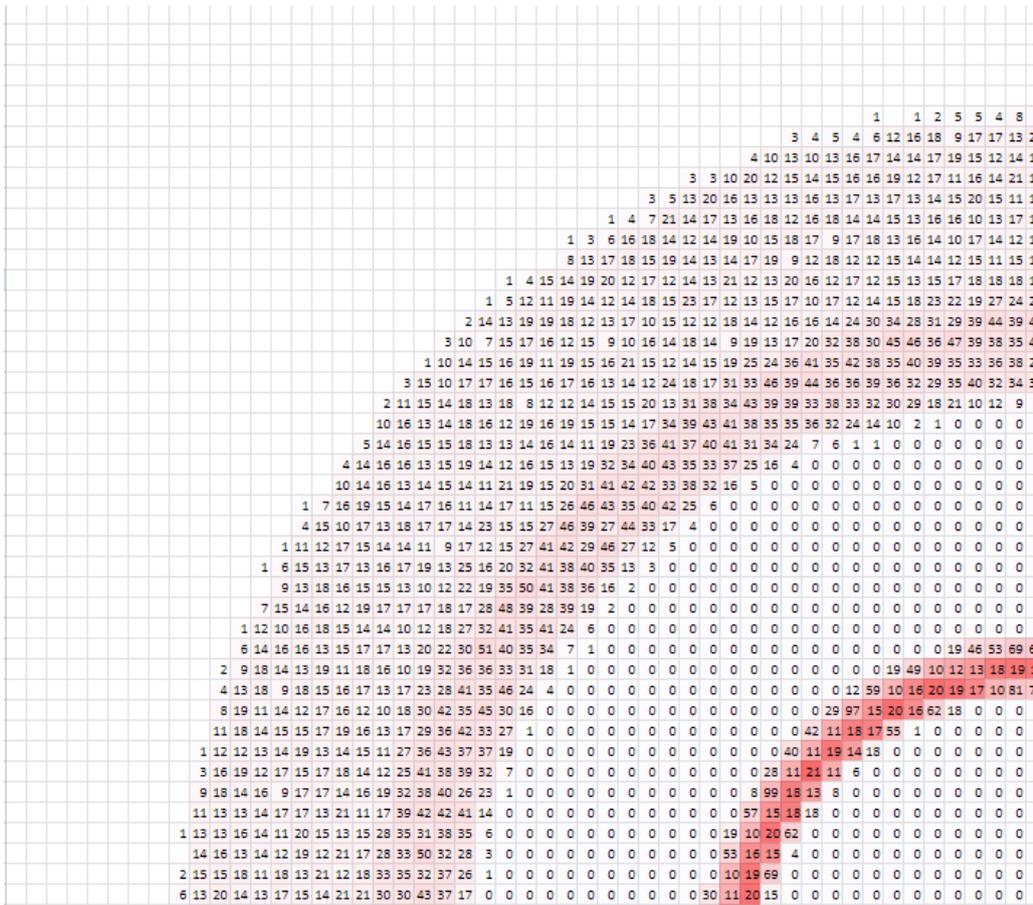
[圖6]重要函式流程圖

詳細的程式及程式運行畫面請見附錄。

(三)程式補充

畫布大小500*500像素，每像素在現實中為2*2平方公分。程式模擬後在畫布上獲得水珠落點，接著計算落點分布100*100格(一格5*5像素)。接著將落點分布資料(一串數列)輸出至Excel，在每個儲存格內有落點數，落點數越高則用越紅的顏色顯示。

落點分布的分層設色圖表，具體如下圖所示(僅為局部)。



[圖7]分層設色圖(局部)

四、將模擬出的灑水器落點和現實灑水器的落點比較並探討誤差原因

(一)比較水珠水平飛行距離與現實差異

我們用的方法如下。

比對水珠的最遠飛行距離，透過用灑水器在乾燥的地板灑水，得出最遠距離，並與模擬出的水平距離比對。

情況	現實	模擬	誤差率
傾角45-60-70-90 仰角45-60-75	4.57 m	4.24 m	-7.2%
傾角 45-60-70-90 仰角 45-45-75	3.80m	4.17 m	9.7%
傾角 45-60-70-90 仰角 45-45-45	3.80m	4.03 m	6.1%

[表3]

誤差率算法為 $\frac{\text{模擬}-\text{現實}}{\text{現實}}$ ，誤差率在 $\pm 10\%$ 以內屬於可容許範圍。推測誤差原因來自未考量空氣阻力、空氣摩擦力、表面張力、管徑摩擦等及壓力未完全轉換為動能。

五、探討水珠落點最均勻的設計參數

(一)定義

為了量化灑水的平均程度，我們先定義一些名詞

「可涵蓋面積」指有灑到水的區域與灑到水的區域形成的圓內部的儲存格數。

「灑水面積」定義為有灑到水的儲存格數(分布數 ≥ 1)得到的面積。

「標準差」指「可涵蓋面積」內的標準差，即下列所有圖示中有顏色區域數值的標準差(即是我們判斷平均程度的標準)。

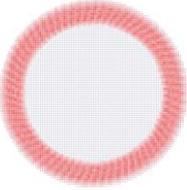
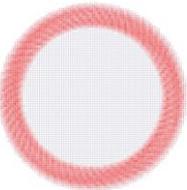
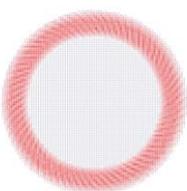
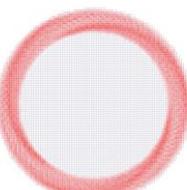
「涵蓋率」指 $\frac{\text{灑水面積}}{\text{可涵蓋面積}} \times 100\%$ 。

(二)探討

1.探討出水口傾角對落點分布的影響

固定出水口仰角組為45-45-45，改變出水口傾角共做4組，分別為

(90-90-90-90)、(70-70-70-70)、(60-60-60-60)、(45-45-45-45)。將落點分布、可涵蓋面積、涵蓋率、標準差彙整。

組別	出水口傾角組(°) 出水口仰角組(°)	落點分布圖	可涵蓋面積 (格)	涵蓋率(%)	標準差
1	出水口傾角 <u>90-90-90-90</u> 出水口仰角 45-45-45		5737	49.78	24.74
2	出水口傾角 <u>70-70-70-70</u> 出水口仰角 45-45-45		5829	48.96	20.62
3	出水口傾角 <u>60-60-60-60</u> 出水口仰角 45-45-45		5443	51.36	22.06
4	出水口傾角 <u>45-45-45-45</u> 出水口仰角 45-45-45		6173	46.53	20.10

[表4]

根據上[表4]結果，可以發現:

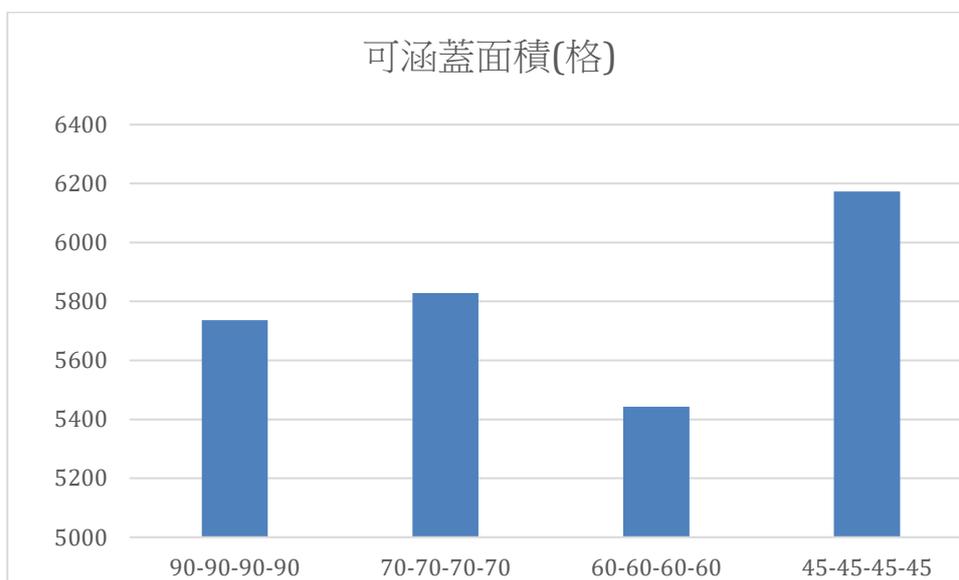
(1)落點分布

針對落點分布圖，4組由肉眼看不出明顯的不同。

(2)可涵蓋面積

針對可涵蓋面積，將出水口傾角90-90-90-90跟出水口傾角70-70-70-70比較時，可涵蓋面積從5737上升到5829，但是當出水口傾角進一步減小成60-60-60-60時，可涵蓋面積並沒有進一步上升，而是從5829下降到5443。而當出水口傾角再進一步減小成45-45-45-45時，可涵蓋面積又再度上升，從5443上升到6173。

將出水口傾角對可涵蓋面積作如下[圖8]，可以看出並沒有一個明顯的趨勢。

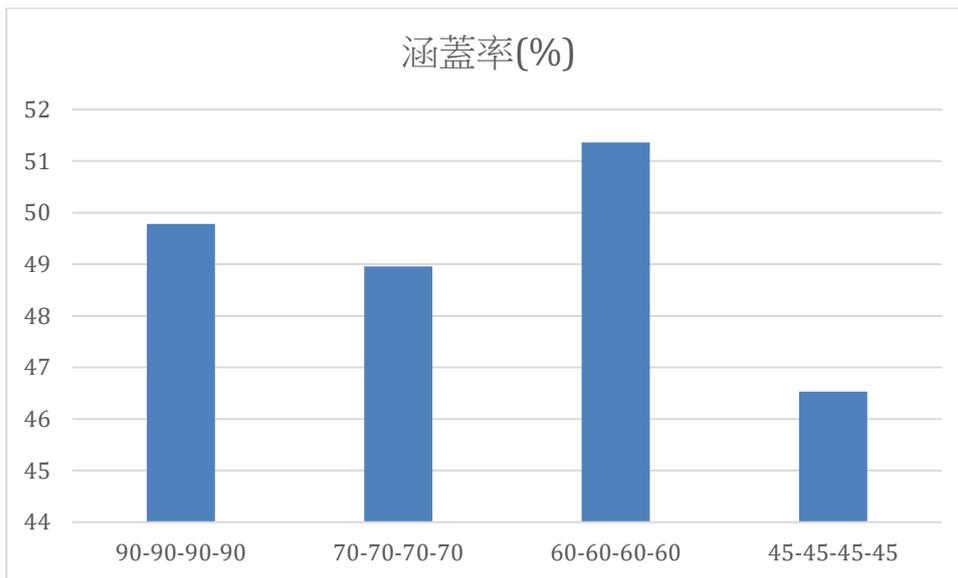


[圖8]

(3)涵蓋率

針對涵蓋率，將出水口傾角90-90-90-90跟出水口傾角70-70-70-70比較時，涵蓋率從49.78下降到48.96，但是當出水口傾角進一步減小成60-60-60-60時，涵蓋率並沒有進一步下降，而是從48.96上升到51.36。而當出水口傾角再進一步減小成45-45-45-45時，涵蓋率又再度下降，從51.36下降到46.53。

將出水口傾角對涵蓋率作圖如下，並沒有看出一個明顯的趨勢。



[圖9]

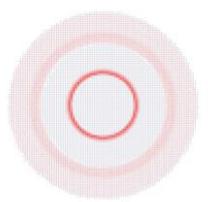
(4)標準差

針對標準差，4組中最小是20.10，最大是24.74，差距離平均值在10%以內。

2.探討出水口仰角對落點分布的影響

固定出水口傾角組為90-70-60-45，改變出水口仰角共做4組，分別為(45-45-45)、(60-60-60)、(75-75-75)、(45-60-75)。將落點分布、可涵蓋面積、涵蓋率、標準差彙整成下表。

組別	出水口傾角組(°) 出水口仰角組(°)	落點分布圖	可涵蓋面積(格)	涵蓋率(%)	標準差
1	出水口傾角 90-70-60-45 出水口仰角 45-45-45		5737	44.45	21.60
2	出水口傾角 90-70-60-45 出水口仰角 60-60-60		3555	34.12	45.01

3	出水口傾角 90-70-60-45 出水口仰角 75-75-75		885	37.51	185.75
4	出水口傾角 90-70-60-45 出水口仰角 45-60-75		5718	64.20	28.38

[表5]

根據上表結果，可以發現:

(1)落點分布

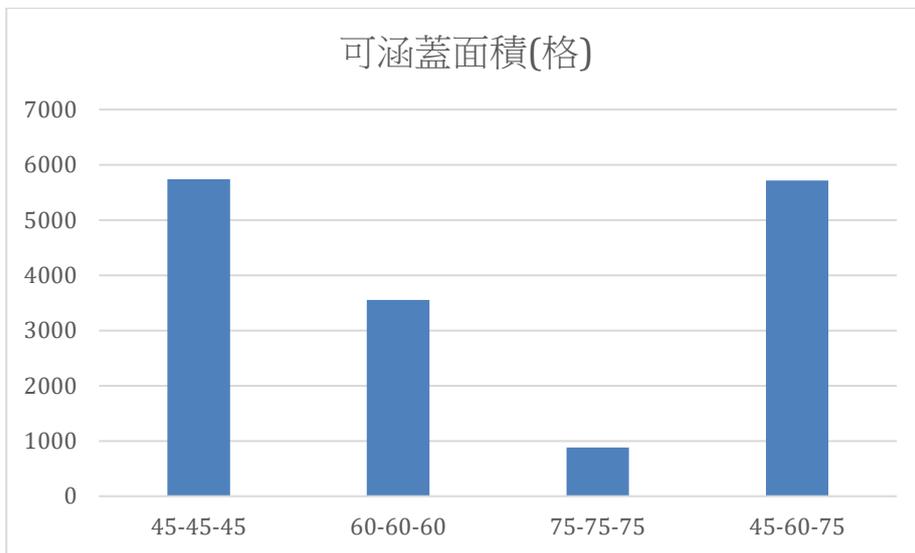
針對落點分布圖，用肉眼觀察，4組中的前3組都是環形，而第4組是有三圈。第1~3組的環狀半徑大小不同。

(2)可涵蓋面積

針對可涵蓋面積，將第1~3組進行比較。將出水口仰角45-45-45跟出水口仰角60-60-60比較時，可涵蓋面積從5737下降到3555，當出水口仰角進一步上升成75-75-75時，可涵蓋面積又進一步下降，而是從3555下降到885。

而三支旋臂的出水口仰角設定為不同，即設定成45-60-75時，可涵蓋面積成為5718，這個數字和第1組較接近，且大於第2組及第3組。

將出水口仰角對可涵蓋面積作圖如下，可以明顯看出前3組隨著出水口仰角上升，可涵蓋面積下降。當採用混合3種不同出水口仰角時的第4組，得到和第1組接近的可涵蓋面積。



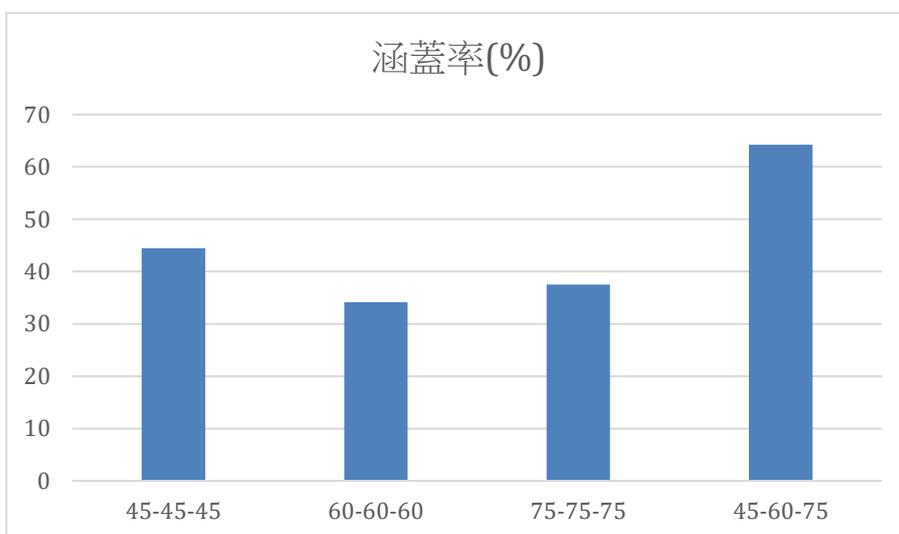
[圖10]

(3) 涵蓋率

針對涵蓋率，將第1~3組進行比較。將出水口仰角45-45-45跟出水口仰角60-60-60比較時，涵蓋率從44.45下降到34.12，當出水口仰角進一步上升成75-75-75時，涵蓋率微幅上升，從34.12上升到37.51。

而三支旋臂的出水口仰角設定為不同，即設定成45-60-75時，涵蓋率成為64.20，這個數字比起第1組、第2組及第3組都高，而且高出了快2倍。

將出水口仰角對涵蓋率作圖如下，可以明顯看出前3組隨著出水口仰角上升，涵蓋率雖有變化但並沒有明顯上升或下降。但是當採用混合3種不同出水口仰角時的第4組，得到最大的涵蓋率。



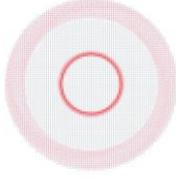
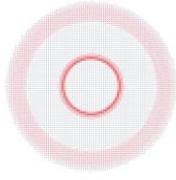
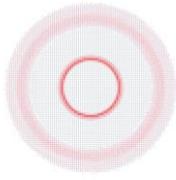
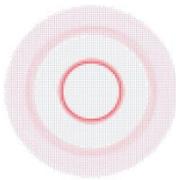
[圖11]

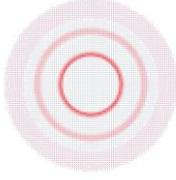
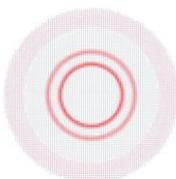
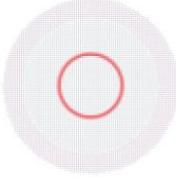
(4) 標準差

針對標準差，4組中最小是第1組，為21.60，隨著出水口仰角增大，第2組的標準差為45.01，第3組更增加到185.75，達到最大。而採用混合3種不同出水口仰角時的第4組，標準差是28.38，在4組當中是次小（好）的結果，只比第1組略高。

3.探討最佳落點分布

由2. 探討出水口仰角對落點分布的影響得知仰角45度時有最大可涵蓋範圍，接下來將固定出水口傾角組為90-70-60-45，把其中三支旋臂中第一支的出水口仰角固定為45度，第三支旋臂之出水口仰角固定為75度，僅改變第二支旋臂的出水口仰角，共做7組，分別為(45-45-75)、(45-50-75)、(45-55-75)、(45-60-75)、(45-65-75)、(45-70-75)、(45-75-75)。將落點分布、可涵蓋面積、涵蓋率、標準差彙整成下表。

組別	出水口傾角組(°) 出水口仰角組(°)	落點分布圖	可涵蓋面積 (格)	涵蓋率(%)	標準差
1	出水口傾角 90-70-60-45 出水口仰角 45- 45 -75		5728	49.90	29.16
2	出水口傾角 90-70-60-45 出水口仰角 45- 50 -75		5520	51.96	29.53
3	出水口傾角 90-70-60-45 出水口仰角 45- 55 -75		5570	56.84	29.42
4	出水口傾角 90-70-60-45 出水口仰角		5718	64.20	28.38

	45- <u>60</u> -75				
5	出水口傾角 90-70-60-45 出水口仰角 45- <u>65</u> -75		5698	63.41	30.01
6	出水口傾角 90-70-60-45 出水口仰角 45- <u>70</u> -75		5772	57.61	33.42
7	出水口傾角 90-70-60-45 出水口仰角 45- <u>75</u> -75		5845	48.91	56.06

[表6]

根據上表結果，可以發現：

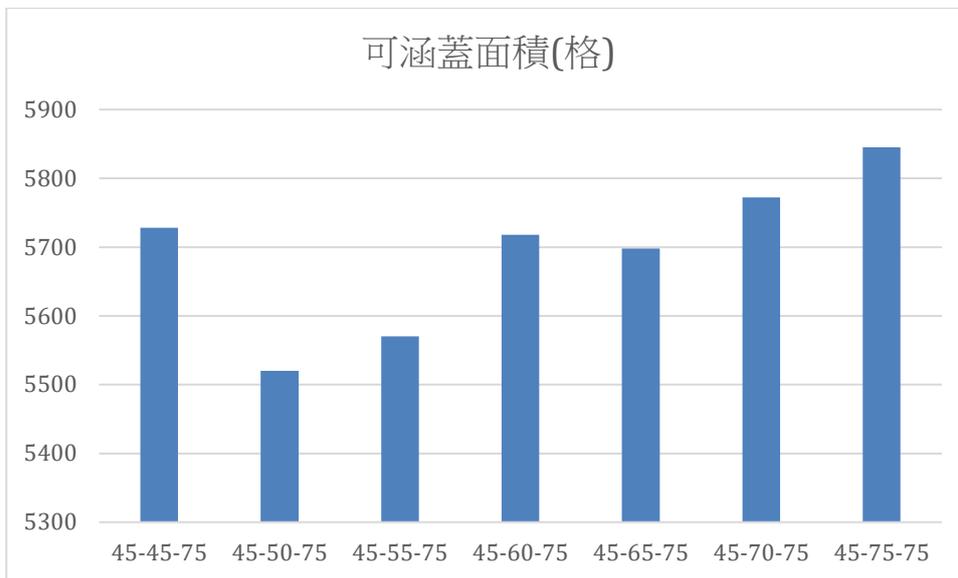
(1)落點分布

針對落點分布圖，用肉眼觀察，7組中都是環形，而第1、7組是有2圈，其餘則是3圖，最外圈環狀半徑大小相同。

(2)可涵蓋面積

針對可涵蓋面積，將各組進行比較。發現隨著三支旋臂的出水口仰角中的之中間旋臂出水口仰角從45度起以5度的級距加大，即成為45-45-75、45-50-75、45-55-75、45-60-75、45-65-75、45-70-75、45-75-75時，可涵蓋面積在5728至5845間變動，有時上升有時下降。

將出水口仰角對可涵蓋面積作圖如下，可以看出除了第1組以外，大致隨著出水口仰角上升，可涵蓋面積有上升趨勢。

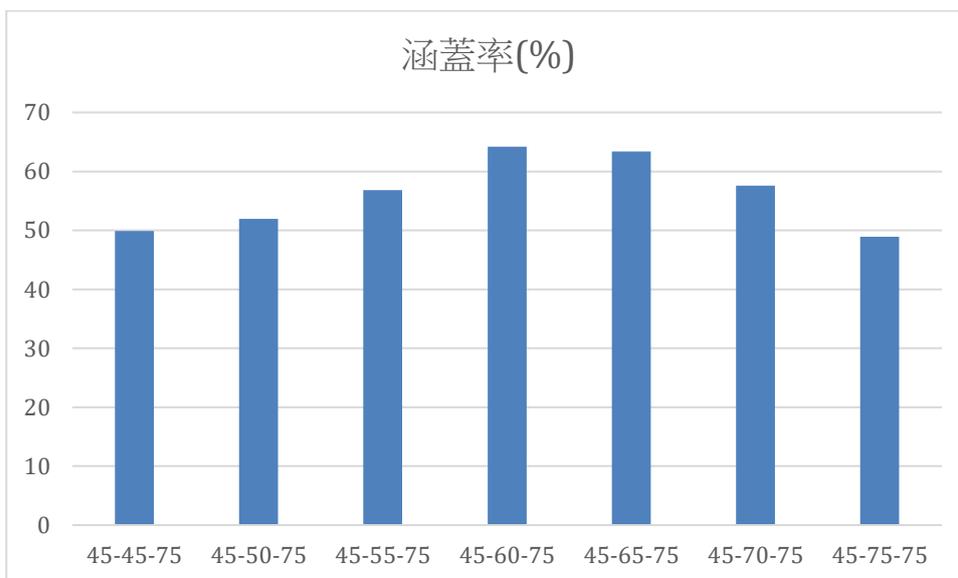


[圖12]

(3) 涵蓋率

針對涵蓋率，發現涵蓋率隨著三支旋臂中的第二支旋臂的之出水口仰角從45度起以5度的級距加大，即成為45-45-75、45-50-75、45-55-75、45-60-75、45-65-75、45-70-75、45-75-75時，涵蓋率在49.90至64.20間變動，有時上升有時下降。

將出水口仰角對涵蓋率作圖如下，可以看出除了中間2組最高，呈現波狀分布，涵蓋率最高的是第4組，即出水口仰角45-60-75的這1組。

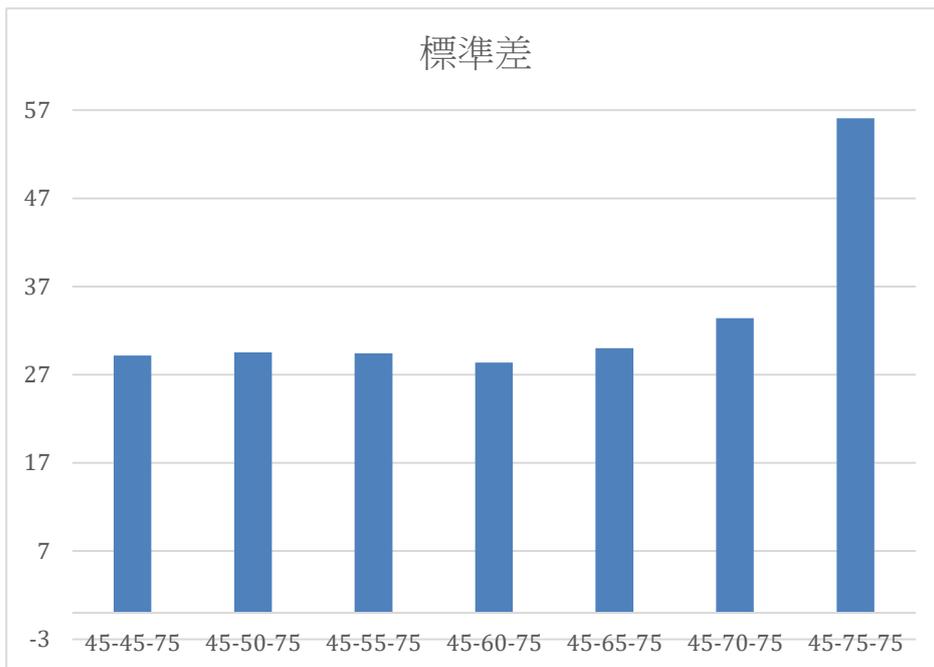


[圖13]

(4) 標準差

針對標準差，7組中最小是第4組，為28.38，最大的是第7組，為56.06。

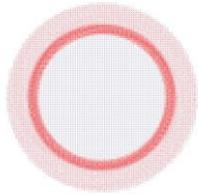
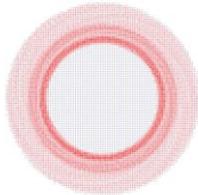
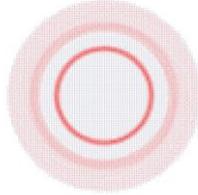
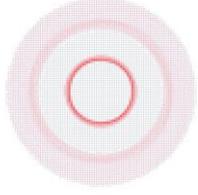
將出水口仰角對標準差作圖如下，可以看出除了中間2組最高，呈現波狀分布，標準差最大的是第7組，即出水口仰角45-75-75的這1組。而第1~6組的標準差為接近的數值，但是其中以第4組最小。



[圖14]

接下來進一步優化。探討第三支旋臂的最佳出水口仰角。

固定第一支旋臂仰角45度、第二支旋臂仰角60度，固定出水口傾角組為90-70-60-45，僅改變第三支旋臂的出水口仰角，共做4組，分別為(45-60-**60**)、(45-60-**65**)、(45-60-**70**)、(45-60-**75**)。將落點分布、可涵蓋面積、涵蓋率、標準差彙整成下表。

組別	出水口傾角組(°) 出水口仰角組(°)	落點分布	可涵蓋面積(格)	涵蓋率(%)	標準差
1	出水口傾角 90-70-60-45 出水口仰角 45-60- 60		5703	58.79	24.37
2	出水口傾角 90-70-60-45 出水口仰角 45-60- 65		5705	69.30	17.77
3	出水口傾角 90-70-60-45 出水口仰角 45-60- 70		5637	68.49	22.42
4	出水口傾角 90-70-60-45 出水口仰角 45-60- 75		5718	64.20	28.38

[表7]

根據上[表7]結果，可以發現:

(1)落點分布

針對落點分布圖，用肉眼觀察，4組都是環形，第1組只有2個環。第2組的3個環相較第3組、第4組為集中。4組最外圈環狀半徑大小相同。

(2)可涵蓋面積

針對可涵蓋面積，將各組進行比較。發現隨著三支旋臂的出水口仰角中的之第三支旋臂出水口仰角從60度起加大，可涵蓋面積在5703至5718間變動，有時上升有時下降，最大的可涵蓋面積出現在第4組，其次是第2組。

(3)涵蓋率

針對涵蓋率，將各組進行比較，涵蓋率在58.79至69.30間變動，有時上升有時下降，最大的涵蓋率出現在第2組，其次是第3組。

(4)標準差

針對標準差，將各組進行比較。以第2組的標準差(17.77)最小，其餘3組都超過20。

綜上可知，若選擇第2組即出水口仰角45-60-65的組合，會達到落點分布、可涵蓋面積、涵蓋率、標準差為最佳的狀況。

伍、研究結果

- 一、模擬器可成功模擬灑水落點，且與現實比對後差距不大，誤差率在 $\pm 10\%$ 以內。
- 二、根據我們的程式模擬結果。

實驗一：探討出水口傾角對落點分布的影響

固定出水口仰角下改變出水口傾角，落點分布圖、可涵蓋面積、涵蓋率、標準差無明顯上升或下降趨勢，推測出水口傾角並沒有產生明顯影響。

實驗二：探討出水口仰角對落點分布的影響

固定出水口傾角下改變出水口仰角，採用三支旋臂為相同出水口仰角角度時，隨著出水口仰角上升，可涵蓋面積有下降趨勢。而採用三支旋臂為不同出水口仰角角度時，獲得了比起三支旋臂為相同出水口仰角角度更大的可涵蓋面積（64.20%）。

此外，隨著出水口仰角上升，涵蓋率先下降後上升，而採用三支旋臂為不同出水口仰角角度時，獲得了比起三支旋臂為相同出水口仰角角度中的各組都大的涵蓋率（64.20%）。

標準差方面，隨著出水口仰角上升，標準差越來越大，亦即分布更不均。而採用三支旋臂為不同出水口仰角角度時，獲得了4組中次小（好）的標準差（28.38）。

可知，綜合落點分布圖、可涵蓋面積、涵蓋率、標準差這幾個因子時，採用三支旋臂為不同出水口仰角角度比起三支旋臂為相同出水口仰角角度中的各組較好。

實驗三：探討最佳落點分布

固定出水口傾角組為90-70-60-45，改變出水口仰角共做7組，結果顯示，除了第1組以外，大致隨著出水口仰角上升，可涵蓋面積有上升趨勢。涵蓋率隨著三支旋臂的出水口仰角中的之一個出水口仰角從45度起以5度的級距加大，有時上升有時下降，但是呈現波狀分布，涵蓋率最高的是第4組，即出水口仰角45-60-75的這1組。針對標準差，7組中最小是第4組。

進一步探討第三支旋臂的出水口仰角，可知，綜合落點分布圖、可涵蓋面積、涵蓋率、標準差這幾個因子時，採用三支旋臂為不同出水口仰角角度且為出水口仰角45-60-65的這1組，獲得了最佳的灑水效果，也就是水珠落點同時擁有高涵蓋範圍，平均度也理想。

陸、討論

在研究中，我們發現了各種問題，也逐一尋找解決之道，以下為我們對研究之探討：

一、增加一些因素的影響

我們在研究中忽略空氣阻力、空氣摩擦力、表面張力、管徑摩擦的影響，這會使的模擬結果與現實中有些微的落差，期望之後再學到更多物理可以將這些因素納入考量。

二、霧化散射角及發射頻率的重新定義

霧化散射角是因為觀察到水柱噴出之後水珠會變成更小的水珠並且散開，以隨機方式來模擬，但這與現實並不相符。期望可以找到水珠散開的規律及霧化散射角與射出角度的關係。而發射頻率正確的計算方式應該是(總水流量÷水珠體積)，這會使的發射頻率很大，所以為了優化使用者體驗，我們將發射頻率設為一較小質數，未來若找到更好的模擬器，希望可以將發射頻率改成較為符合現實的定義。

三、增加現實落點比較

我們的實驗設計中本來有與現實落點比較的項目，但是我們發現以我們現有的設備無法將現實灑水器的落點記錄下來，期望未來有更先進的設備可以將現實落點紀錄，並與模擬結果比對，以達成模擬得更加精準的目的。

四、可以加強實驗的精準程度

我們實驗中的測量僅用一些簡單的工具，像尺、量角器等，因此無法做非常精確的測量，未來可使用更精確的量測工具，並改善量測方法。以得到更精確的基本參數。

五、重新設計灑水器

因為實際上我們觀察的灑水器的仰角最大只能到75度，這會使的灑水器的灑水範圍受限，所以未來我們可以設計一款旋轉式灑水器，這款灑水器可以調整仰角至90度，解決中心灑不到的問題，也讓我們的研究能發揮更大的價值。

柒、結論

本研究得到以下結論：

一、成功模擬灑水器落點

透過一些數學公式及物理，成功透過灑水器的各項數據來推測水珠的落點，並且與現實的誤差不大。

二、灑水器轉速與水珠初速的關係

這是我們花最多時間的地方，結合數學及物理，我們利用將水平初速向量拆成多個分量再加上轉速向量在結合算出旋轉中物體拋出的速度。

三、找出最平均灑水落點的出水口角度

根據我們設計的程式，我們找出最平均(標準差最小)的角度是出水口傾角組為90-70-60-45且出水口仰角45-60-65。

四、期許未來可以讓使用者參考

我們的研究找出了灑水器轉速與水珠初速的關係、灑水範圍、水珠落點、分布和灑水器各項參數的關係，這可以讓使用者參考，在不更改植物位置的情況下，調整灑水器的位置、出水口角度，就可以依需求調整主要灌溉區域。或是將出水口角度調整到(最均勻角)以達成均勻灑水目的。

捌、參考資料及其他

一、學呀。拋物線運動

取自:

<https://zertia.tw/physics/a380e04c2c>

二、管道直徑、流量、流速、壓力之間的關係

取自:

<https://zhuanlan.zhihu.com/p/34307502>

(三)矩陣形省水灑水器

取自:

<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/63/pdf/NPHSF2023-032804.pdf?0.921530017192254>

(四)南社(無日期)。給水管管徑的計算方法，知乎。

取自：

<https://zhuanlan.zhihu.com/p/110272471>

(五)灑水器轉速與水珠初速關係

取自:

<https://ocw.mit.edu/ans7870/2/2.25/assignments/sec5/5-26/index.html>

附錄一

模擬程式

以下為我們設計的程式，粗體為程式本身，斜體為說明。

```
<!DOCTYPE html>
```

```
<html><head></head><body>
```

模擬畫面

```
<canvas id="sim" width="500" height="500"></canvas>
```

輸入區。有些是固定值，讓使用者了解預設值

```
<br>
```

```
<span>出水口截面積(cm2)</span>
```

```
<br>
```

```
<input type="number" id="area">
```

```
<br>
```

```
<span>出水口仰角(°)</span>
```

```
<input type="number" id="angleup">
```

```
<input type="number" id="angleup2">
```

```
<input type="number" id="angleup3">
```

```
<br>
```

```
<span>出水口高度(cm)</span>
```

```
<input type="number" id="h0">
```

```
<br>
```

```
<span>水流(cm3/s)</span>
```

```
<input type="number" id="flow">
```

```
<br>
```

```
<span>轉速(rps)</span>
```

```
<input type="number" id="spinspeed">
```

```
<br>
```

```
<span>發射頻率(Hz)</span>
```

```
<input type="number" id="frequency">
```

```
<br>
```

```
<span>出水口傾斜角(°)</span>
```

```
<input id="angletilt" value="45,60,70,90">
```

```
<br>
```

```
<span>出水口與中心距離(cm)</span>
```

```
<input type="number" id="radius">
```

控制區，可以方便的執行功能

```
<br>
<button onclick="drawpos()">落點</button>
<button onclick="run()">下一刻(1/頻率s)</button>
<button onclick="onsec()">一秒</button>
<button onclick="showDensity()">看分布數</button>
```

程式

```
<script>
  為了方便取得輸入物件的值設的函式
  function v(x){
    return x.valueAsNumber;
  }
```

執行一次模擬

```
function run() {
  clearwater();
  time += 1/v(frequency);
  spin += v(spinspeed)/v(frequency)*360;
  draw();
  shoot();
  drawwater();
}
```

把正弦、餘弦函式換成使用角度的函式

```
function sin(x) {return Math.sin(Math.PI*x/180);}
function cos(x) {return Math.cos(Math.PI*x/180);}
```

畫出水口位置

```
function draw() {
  ctx.fillStyle="#ff0000";
  ctx.fillRect(245+2+radii[0]*cos(spin),245+2+radii[0]*sin(spin),3,3);    ctx.fillStyle="#00ff00";
  ctx.fillRect(245+2+radii[0]*cos(spin+120),245+2+radii[0]*sin(spin+120),3,3);
  ctx.fillStyle="#0000ff";    ctx.fillRect(245+2+radii[0]*cos(spin-120),245+2+radii[0]*sin(spin-120),3,3);
}
```

水的運動函式，也是這個程式的核心

```
function shoot() {  
    同旋臂的四個出水口個發出一滴水，並記錄當前x、y、z座標及x、y、z方向速度  
    redlist.push(Array(250+radii[3]*cos(spin),250+radii[3]*sin(spin),v(h0),vr[0][0]*cos(spin)+vt[0][0]*sin(spin),vr[0][0]*sin(spin)-vt[0][0]*cos(spin),waterspeed*sin(v(angleup)+angleupadd),time));  
    redlist.push(Array(250+radii[3]*cos(spin),250+radii[3]*sin(spin),v(h0),vr[0][1]*cos(spin)+vt[0][1]*sin(spin),vr[0][1]*sin(spin)-vt[0][1]*cos(spin),waterspeed*sin(v(angleup)+angleupadd),time));  
    redlist.push(Array(250+radii[3]*cos(spin),250+radii[3]*sin(spin),v(h0),vr[0][2]*cos(spin)+vt[0][2]*sin(spin),vr[0][2]*sin(spin)-vt[0][2]*cos(spin),waterspeed*sin(v(angleup)+angleupadd),time));  
    redlist.push(Array(250+radii[3]*cos(spin),250+radii[3]*sin(spin),v(h0),vr[0][3]*cos(spin)+vt[0][3]*sin(spin),vr[0][3]*sin(spin)-vt[0][3]*cos(spin),waterspeed*sin(v(angleup)+angleupadd),time));  
    for(let i=0; i<redlist.length; i++) {  
        if (redlist[i][2]>0) {  
            redlist[i][0]+=1/v(frequency)*redlist[i][3]*50;  
            redlist[i][1]+=1/v(frequency)*redlist[i][4]*50;  
            redlist[i][2]+=1/v(frequency)*redlist[i][5];  
            redlist[i][5]-=1/v(frequency)*9.81;  
            if (redlist[i][2]<0){  
                redlist[i][0] = Math.round(redlist[i][0]);  
                redlist[i][1] = Math.round(redlist[i][1]);  
                data.push(Array(redlist[i][0],redlist[i][1]));  
            }  
        }  
    }  
}
```

另外兩個出水口同理

```
    ctx.fillStyle = "#0000ff";  
    greenlist.push(Array(250+radii[3]*cos(spin-120),250+radii[3]*sin(spin-120),v(h0),vr[1][0]*cos(spin-120)+vt[1][0]*sin(spin-120),vr[1][0]*sin(spin-120)-vt[1][0]*cos(spin-120),waterspeed*sin(v(angleup2)+angleupadd),time));  
    greenlist.push(Array(250+radii[3]*cos(spin-120),250+radii[3]*sin(spin-120),v(h0),vr[1][1]*cos(spin-120)+vt[1][1]*sin(spin-120),vr[1][1]*sin(spin-120)-vt[1][1]*cos(spin-120),waterspeed*sin(v(angleup2)+angleupadd),time));  
    greenlist.push(Array(250+radii[3]*cos(spin-120),250+radii[3]*sin(spin-120),v(h0),vr[1][2]*cos(spin-120)+vt[1][2]*sin(spin-120),vr[1][2]*sin(spin-120)-vt[1][2]*cos(spin-120),waterspeed*sin(v(angleup2)+angleupadd),time));  
    greenlist.push(Array(250+radii[3]*cos(spin-120),250+radii[3]*sin(spin-120),v(h0),vr[1][3]*cos(spin-120)+vt[1][3]*sin(spin-120),vr[1][3]*sin(spin-120)-vt[1][3]*cos(spin-120),waterspeed*sin(v(angleup2)+angleupadd),time));
```

```

for(let i=0; i<greenlist.length; i++) {
  if (greenlist[i][2]>0) {
    greenlist[i][0]+=1/v(frequency)*greenlist[i][3]*50;
    greenlist[i][1]+=1/v(frequency)*greenlist[i][4]*50;
    greenlist[i][2]+=1/v(frequency)*greenlist[i][5];
    greenlist[i][5]=-1/v(frequency)*9.81;
    if (greenlist[i][2]<0){
      greenlist[i][0] = Math.round(greenlist[i][0]);
      greenlist[i][1] = Math.round(greenlist[i][1]);
      data.push(Array(greenlist[i][0],greenlist[i][1]));
    }
  }
}

ctx.fillStyle="#00ff00";
bluelist.push(Array(250+radii[3]*cos(spin+120),250+radii[3]*sin(spin+120),v(h0),vr[2][0]*cos(spin
+120)+vt[2][0]*sin(spin+120),vr[2][0]*sin(spin+120)-vt[2][0]*cos(spin+120),waterspeed*sin(v(angleup
3)+angleupadd),time));
bluelist.push(Array(250+radii[3]*cos(spin+120),250+radii[3]*sin(spin+120),v(h0),vr[2][1]*cos(spin
+120)+vt[2][1]*sin(spin+120),vr[2][1]*sin(spin+120)-vt[2][1]*cos(spin+120),waterspeed*sin(v(angleup
3)+angleupadd),time));
bluelist.push(Array(250+radii[3]*cos(spin+120),250+radii[3]*sin(spin+120),v(h0),vr[2][2]*cos(spin
+120)+vt[2][2]*sin(spin+120),vr[2][2]*sin(spin+120)-vt[2][2]*cos(spin+120),waterspeed*sin(v(angleup
3)+angleupadd),time));
bluelist.push(Array(250+radii[3]*cos(spin+120),250+radii[3]*sin(spin+120),v(h0),vr[2][3]*cos(spin
+120)+vt[2][3]*sin(spin+120),vr[2][3]*sin(spin+120)-vt[2][3]*cos(spin+120),waterspeed*sin(v(angleup
3)+angleupadd),time));
for(let i=0; i<bluelist.length; i++) {
  if (bluelist[i][2]>0) {
    bluelist[i][0]+=1/v(frequency)*bluelist[i][3]*50;
    bluelist[i][1]+=1/v(frequency)*bluelist[i][4]*50;
    bluelist[i][2]+=1/v(frequency)*bluelist[i][5];
    bluelist[i][5]=-1/v(frequency)*9.81;
    if (bluelist[i][2]<0){
      bluelist[i][0] = Math.round(bluelist[i][0]);
      bluelist[i][1] = Math.round(bluelist[i][1]);
      data.push(Array(bluelist[i][0],bluelist[i][1]));
    }
  }
}
}

```

將霧化散射角設為-7.5~7.5的隨機值

```
angleupadd += Math.random();  
if(angleupadd > 7) {  
    angleupadd *= -1;  
}  
}
```

畫出未落地水珠目前位置

```
function drawwater (){  
  
    if(redlist.length>=1){  
        ctx.fillStyle = "#ff0000";  
        for (let i=0; i<redlist.length; i++){  
            if(redlist[i][2]>0){  
                ctx.fillRect(redlist[i][0],redlist[i][1],1,1);  
            }  
        }  
    }  
    if(bluelist.length>=1){  
        ctx.fillStyle = "#00ff00";  
        for (let i=0; i<bluelist.length; i++){  
            if(bluelist[i][2]>0){  
                ctx.fillRect(bluelist[i][0],bluelist[i][1],1,1);  
            }  
        }  
    }  
    if(greenlist.length>=1){  
        ctx.fillStyle = "#0000ff";  
        for (let i=0; i<greenlist.length; i++) {  
            if(greenlist[i][2]>0){  
                ctx.fillRect(greenlist[i][0],greenlist[i][1],1,1);  
            }  
        }  
    }  
}
```

畫出已落地水珠落點

```
function drawpos() {
```

```

ctx.clearRect(0,0,500,500);
for (let i=0; i<data.length; i++) {
  ctx.fillRect(data[i][0],data[i][1],1,1);    }
}

```

模擬一秒時間

```

function onesecc() {
  for (let i=0; i<v(frequency); i++) {
    run();
  }
}

```

將資料整理成計次資料，並以10cm×10cm為單位再整理

```

function arrangeData() {
  trueorfalse = false
  datacount = [[250,250,0]]//不加這行可能導致錯誤，對實際無影響
  for (let a=1; a<data.length; a++) {
    trueorfalse = false
    for (let b=0; b<datacount.length; b++){
      if (data[a][0] == datacount[b][0]&&data[a][1] == datacount[b][1]){
        datacount[b][2]++;
        trueorfalse = true;
        break
      }
    }
    if (!trueorfalse){
      datacount.push([data[a][0],data[a][1],1])
    }
  }
  graph = [];
  for (let i=0; i<100; i++){
    graph.push(Array(100));
    for (let j=0; j<100; j++) {
      graph[i][j] = 0;
    }
  }
  for (let x=0; x<datacount.length; x++) {
    graph[Math.round(datacount[x][0]/5)][Math.round(datacount[x][1]/5)] += datacount[x][2];
  }
}

```

把整理好的數字畫在顯示器上

```
function printDensity() {
  ctx.clearRect(0,0,500,500)
  for (let i=0; i<100; i++) {
    for (let j=0; j<100; j++){
      ctx.fillText(graph[i][j],5*i,5*j);
    }
  }
}
```

匯出資料

```
function showDensity(){
  arrangeData();
  printDensity();
  console.log(graph)
}
```

初始化

```
let datacount = [];
let angleupadd = 0;
let angletilts = [45,60,70,90];
let radii = [0.060,0.072,0.084,0.096];
let spin = 0;
let time = 0;
let redlist = [];
let greenlist = [];
let bluelist = [];
cvs=document.getElementById("sim");
ctx=cvs.getContext("2d");
ctx.fillRect(245,245,10,10);
data = [];//data為空陣列
area.valueAsNumber = Math.round(12 * Math.PI * 100)/100000000;
area.disabled = 1;
spinspeed.valueAsNumber = 2*Math.PI;
spinspeed.disabled = 1;
flow.valueAsNumber = 0.000378;
flow.disabled = 1;
radius.value = "0.060,0.071,0.084,0.096";
radius.disabled = 1;
```

```

frequency.valueAsNumber = 137;
frequency.disabled = 1;
let waterspeed = v(flow)/v(area);
draw();
angleup.valueAsNumber = 45;
angletilt.disabled = 1;
h0.valueAsNumber = 0.11;
h0.disabled = 1;
let vhor = [waterspeed*cos(v(angleup)),waterspeed*cos(v(angleup2)),waterspeed*cos(v(angleup3))];
let vt = [[vhor[0]*sin(angletilts[0])-v(spinspeed)*radii[3],vhor[0]*sin(angletilts[1])-v(spinspeed)*radii
[2],vhor[0]*sin(angletilts[2])-v(spinspeed)*radii[1],vhor[0]*sin(angletilts[3])-v(spinspeed)*radii[0],[vhor
[1]*sin(angletilts[0])-v(spinspeed)*radii[3],vhor[1]*sin(angletilts[1])-v(spinspeed)*radii[2],vhor[1]*sin(a
ngletilts[2])-v(spinspeed)*radii[1],vhor[1]*sin(angletilts[3])-v(spinspeed)*radii[0],[vhor[2]*sin(angletilts
[0])-v(spinspeed)*radii[3],vhor[2]*sin(angletilts[1])-v(spinspeed)*radii[2],vhor[2]*sin(angletilts[2])-v(spi
nspeed)*radii[1],vhor[2]*sin(angletilts[3])-v(spinspeed)*radii[0]]];
let vr = [[vhor[0]*cos(angletilts[0]),vhor[0]*cos(angletilts[1]),vhor[0]*cos(angletilts[2]),vhor[0]*cos(a
ngletilts[3]),[vhor[1]*cos(angletilts[0]),vhor[1]*cos(angletilts[1]),vhor[1]*cos(angletilts[2]),vhor[1]*cos
(angletilts[3]),[vhor[2]*cos(angletilts[0]),vhor[2]*cos(angletilts[1]),vhor[2]*cos(angletilts[2]),vhor[2]*co
s(angletilts[3])]];
let sumvtr = 0
let sumrsqr = 0
for (let i = 0; i < 3; i++) {
  for (let j = 0; j < 4 ; j++){
    sumvtr += vhor[i]*sin(angletilts[j])radii[3-j]
  }
}
for (let index = 0; index < 4; index++) {
  sumrsqr += radii[index]*radii[index]
}
sumrsqr *= 3
spinspeed.valueAsNumber = sumvtr/(sumrsqr+0.25)

```

```

</script></body></html>

```

我們利用上述程式作為模擬器

附錄二

程式運行畫面

出水口截面積(m²) 0.0000377

出水口仰角(°) 45 60 75

出水口高度(m) 0.11

水流(m³/s) 0.000239

轉速(radps) 7.667595045313825

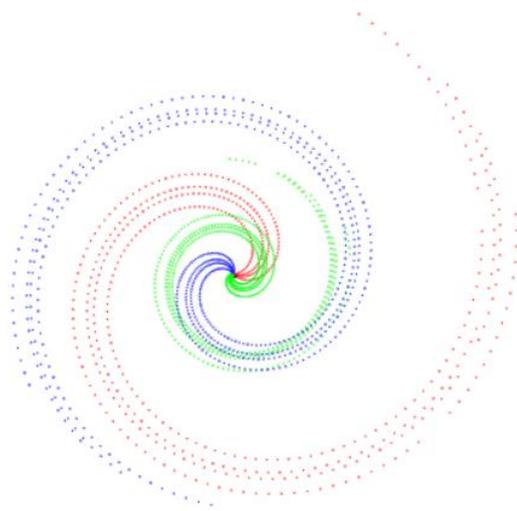
發射頻率(Hz) 137

出水口傾斜角(°) 45,60,70,90

出水口與中心距離(m) 下一刻(1/頻率s)

落點 一秒 看分布數 計算轉速

輸入區



輸出區