

新竹市第四十二屆中小學科學展覽會

作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：三浦摺疊法之面積探討

關 鍵 詞：摺紙、三浦折疊、面積縮小率

編號：

三浦摺疊法之面積探討

摘要

藉此研究，我們想要更進一步的探討這個主題，找出三浦折疊的面積縮小率和角度與邊長的關係。我們先利用 The Geometer's Sketchpad 做出了三浦折疊的圖示，以方便我們觀察。接著，我們進一步探討偏差角度與面積縮小率的關係，以及邊長與面積縮小率的關係。我們發現：當邊長固定時，偏差角度從 0° 到 90° 時，面積縮小率會有最小值，發生在偏差角度 $=45^\circ$ 時，面積縮小率為 14.6%。接著，我們觀察了寬與面積的關係。我們分別固定成不同的偏差角度： 15° 、 30° 、 45° ，並分別改變其中一邊的邊長。發現偏差角度越大，寬和縮小率的關係圖中的斜率的絕對值越小。

壹、前言

一、研究動機

我們在數學課堂中，偶然認識到了不同的摺紙方法，其中有一種最有趣的三浦折疊吸引了我們的注意。我們仔細的查詢了相關資料，發現三浦摺疊是一種特別的折疊方式，三浦折疊技術是一種利用材料的彈性和幾何變化實現折疊的創新方法。該技術基於三浦平行四邊形的幾何特性，通過設計結構使其在拉伸或壓縮時能夠自動展開或摺疊。此技術已廣泛應用於建築、航空和醫療器械領域。

在建築中，三浦折疊可用於設計可展開的建築結構，以適應不同的空間需求；在航空航天中，它可以用於設計輕巧堅固的太空結構；在醫療器械中，可用於設計可摺疊的手術器械，提高手術效率。

所以在構思科展主題的時候，我們便決定對三浦折疊進行進一步的研究和探討，並且思考如何將其應用在我們的生活當中！

二、目的

我們想要研究三浦折疊的折法對重疊面積的影響並找出關係，在此同時探討其於生活應用的價值。

三、文獻回顧

三浦折疊是由東京大學構造工學教授三浦公亮所發明，其目的在於在放大縮小一個物體時能夠在減少磨損的狀況下把表面積縮到最小同時加強物體結構的方法，主要應用於地圖、人造衛星(尤其需要減少縮放時的損耗以減少維修成本)(已經運用於日本所發射的衛星上)和瓦楞紙構造等生活中常見的地方，其折法曾在 2006 得到了由日本經濟產業省頒發的日本百大發明之榮譽。

三浦折疊技術是一種利用材料的彈性和幾何變化實現折疊的創新方法。該技術基於三浦平行四邊形的幾何特性，通過設計結構使其在拉伸或壓縮時能夠自動展開或摺疊。此技術已廣泛應用於建築、航空和醫療器械領域。

在建築中，三浦折疊可用於設計可展開的建築結構，以適應不同的空間需求；在航空航天中，它可以用於設計輕巧堅固的太空結構；在醫療器械中，可用於設計可摺疊的手術器械，提高手術效率。

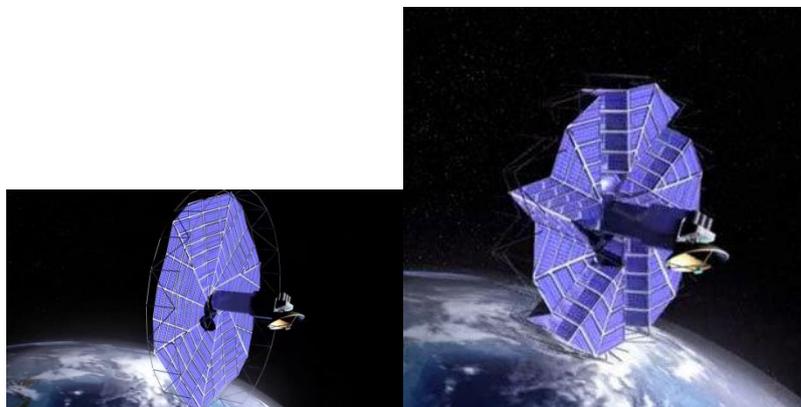


圖 1-1 衛星中的三浦折疊應用

貳、研究設備與器材

一、計算機軟件和模擬工具：

用於建模、仿真和分析三浦折疊結構的行為。包含 GeoGeBra 軟件、The Geometer's Sketchpad 軟件等。

二、紙筆：

在開展新的折疊結構設計時，紙筆用於繪製草圖和示意圖，以展示設計想法和結構配置。通過手繪草圖，我們可以快速地試驗不同的設計方案，以找到最優解決方案。此外，在進行理論分析時，紙筆可用於計算和推導相關的數學公式。我們可以通過手寫計算來理解和應用折疊結構的物理原理，進一步推進研究。並且，在進行測試時，也會利用紙筆來制定計劃和記錄結果，以便後續的數據處理和報告撰寫。

參、研究過程與方法

一、三浦摺疊模型的做法(圖 3-1)

(一)、首先我們要在一張 A4 的白紙上畫出橫的線條，且線條的數量需要是偶數，這樣格子數才會是我們需要的奇數格。這裡的橫線將會是山線和谷線交錯。

- (二)、再來是摺疊的線條，在此之前需要決定偏差的角度，即為“折疊線條”和“縱線”的角度，並以上下交錯的方式畫出(圖 3-2)。這裡的摺疊線條也會是山線和谷線交錯。
- (三)、接著是最有挑戰性的步驟，將先前畫出的線條，依照山谷線交錯的方式折疊。但是因為這個步驟對我們來說非常複雜，需要比較細微的手工，而且一不小心就有可能把紙張折壞，所以在做出幾個不同的摺疊模型後我們決定利用電腦軟體來輔助我們計算和研究這個摺紙技巧。

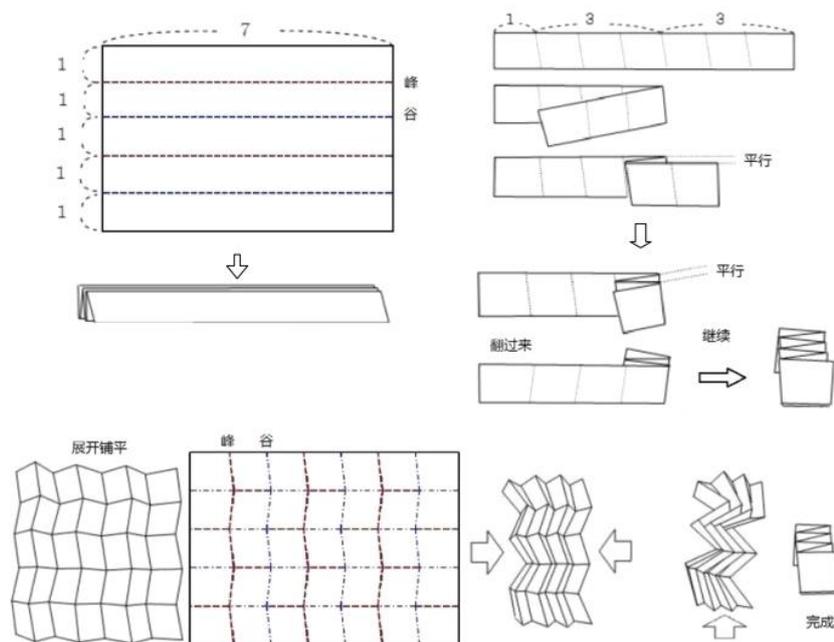


圖 3-1 三浦折疊的折疊步驟

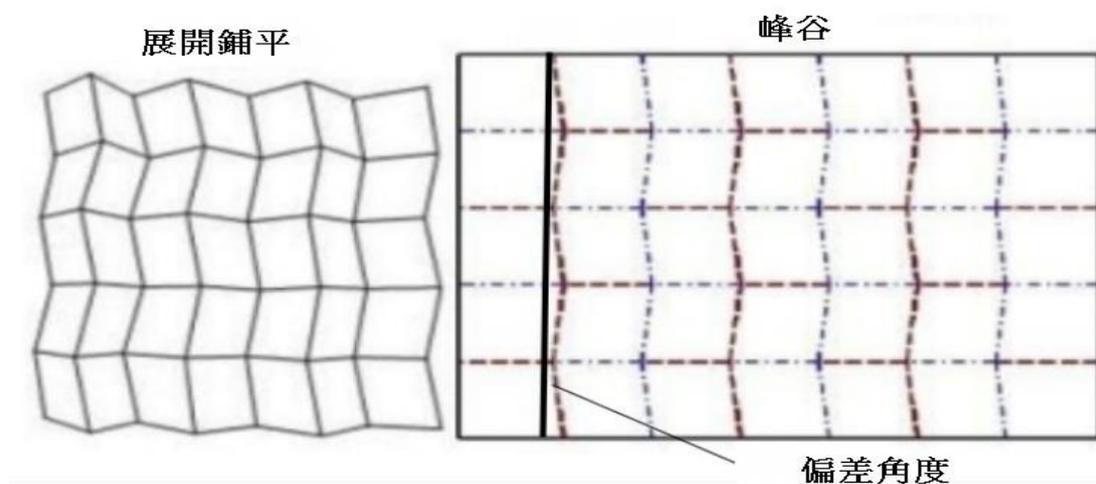


圖 3-2 偏差角度示意圖

二、電腦軟體模型

我們在電腦中模擬時使用的軟體是 GSP(The Geometer's sketchpad)，可以在圖形中定義角度和長度，這樣一來我們就能直接調整圖形的偏差角度和長度。我們先討論長寬分別為 20 和 30 的紙，並劃分成 25 個 4*6 的方格，得到一個三浦摺疊的模板。在開始記錄面積和偏差角度長度前，我們整理出了三浦折疊可能出現的重疊情形(如圖 1-1)，先假設左上為"狀況一"、右上為"狀況二"……依此類推至右下為"狀況六"。這六種情形會影響接下來我們計算面積所涵蓋到的範圍，所以我們要在軟體中定義共六組圖形。

在以上的前置作業後，我們將要開始我們主要的研究，總共分為兩種，分別是"偏差角度和面積縮小率的關係"、"固定長與偏差角度時，寬與面積的關係"，並且會針對比較不同的數據組合進行進一步的討論。

同時，為了方便觀察面積的變化，我們將定義" $\frac{\text{縮小後面積}}{\text{原面積}} \times 100\%$ " 為接下來的表格中的「縮小率」。

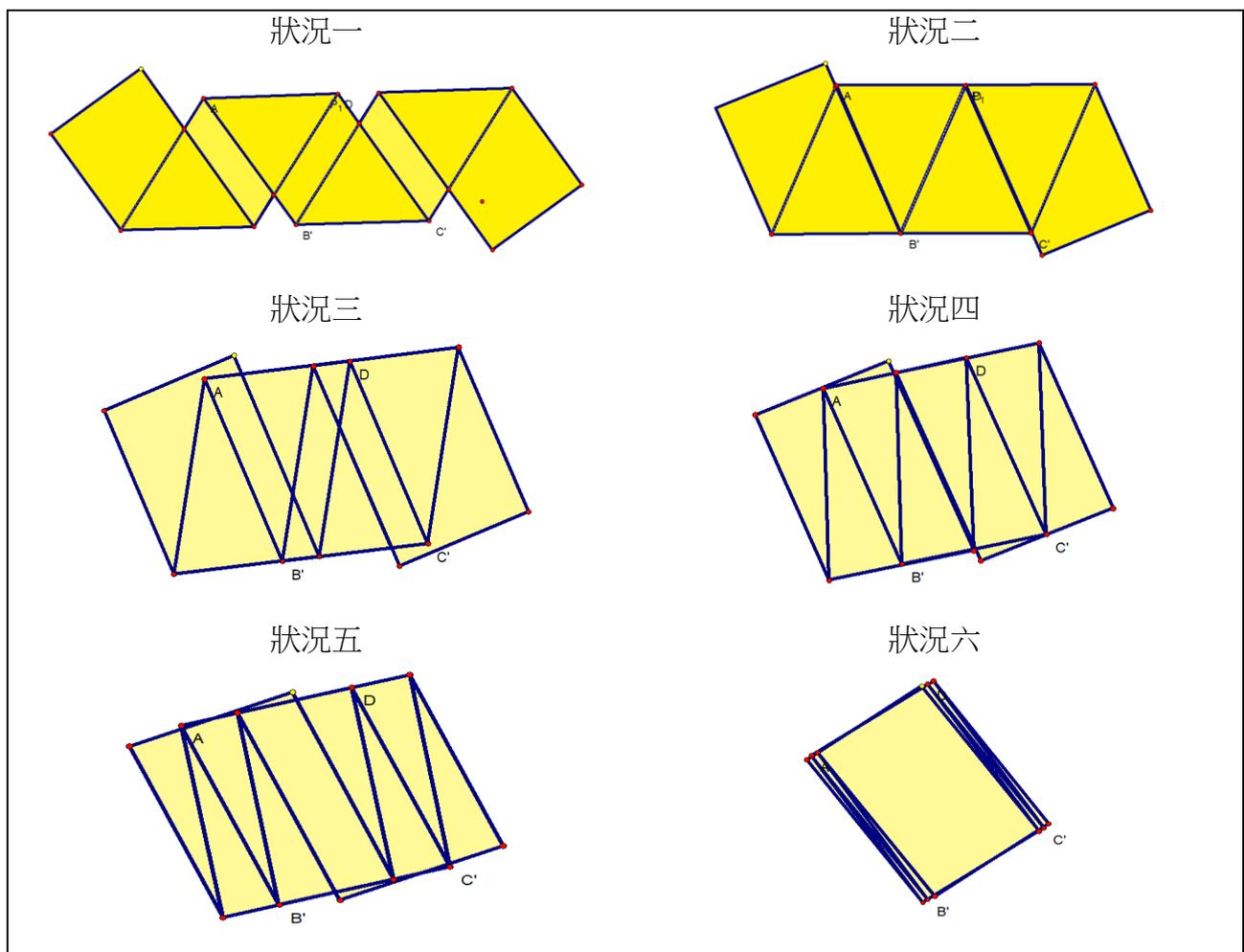


圖 3-3 三浦折疊的六種狀況

肆、研究結果

為了避免造成混淆在此先行說明，在 Q2 的算式中所使用的” X” 為該狀況之” 偏差角度” ，而在其餘的算式中的” X” 和” Y” 為折疊線條所產生的長方形的” 長” 與” 寬” ，而” θ ” 為偏差角度” 。

一、研究一：偏差角度和面積縮小率的關係

我們決定先找出臨界點，分別為偏差角度為 90 度和 0 度，並在這個範圍內找出縮小面積的規律。接著就是要在試算表中整理我們得到的數據變成表格(表 4-1)。

表 4-1 偏差角度與縮小率之表格

偏差角度(度)	面積(cm ²)	縮小率(%)
90	24	4
89	26.51	4.418333333
88	29.02	4.836666667
87	31.53	5.255
86	34.02	5.67
85	36.5	6.083333333
84	38.97	6.495
83	41.42	6.903333333
82	43.85	7.308333333
81	46.25	7.708333333
80	48.63	8.105
79	50.97	8.495
78	53.29	8.881666667
77	55.56	9.26
76	57.8	9.633333333
75	60	10
74	62.15	10.358333333
73	64.26	10.71
72	66.32	11.053333333
71	68.33	11.388333333
70	70.28	11.713333333
69	72.18	12.03
68	73.93	12.321666667
67	75.51	12.585
66	76.94	12.823333333

65	78.23	13.03833333
64	79.39	13.23166667
63	80.45	13.40833333
62	81.4	13.56666667
61	82.27	13.71166667
60	83.05	13.84166667
59	83.76	13.96
58	84.4	14.06666667
57	84.97	14.16166667
56	85.49	14.24833333
55	85.95	14.325
54	86.35	14.39166667
53	86.71	14.45166667
52	87.02	14.50333333
51	87.29	14.54833333
50	87.51	14.585
49	87.69	14.615
48	87.82	14.63666667
47	87.92	14.65333333
46	87.98	14.66333333
45	88	14.66666667
44	87.98	14.66333333
43	87.92	14.65333333
42	87.82	14.63666667
41	87.69	14.615
40	87.51	14.585
39	87.29	14.54833333
38	87.02	14.50333333
37	86.71	14.45166667
36	86.35	14.39166667
35	85.95	14.325
34	85.49	14.24833333
33	84.97	14.16166667
32	84.4	14.06666667
31	83.76	13.96

30	83.05	13.84166667
29	82.27	13.71166667
28	81.4	13.56666667
27	80.45	13.40833333
26	79.39	13.23166667
25	78.23	13.03833333
24	76.94	12.82333333
23	75.51	12.585
22	73.93	12.32166667
21	72.18	12.03
20	70.28	11.71333333
19	68.33	11.38833333
18	66.32	11.05333333
17	64.26	10.71
16	62.15	10.35833333
15	60	10
14	57.8	9.63333333
13	55.56	9.26
12	53.29	8.88166667
11	50.97	8.495
10	48.63	8.105
9	46.25	7.70833333
8	43.85	7.30833333
7	41.42	6.90333333
6	38.97	6.495
5	36.5	6.08333333
4	34.02	5.67
3	31.53	5.255
2	29.02	4.83666667
1	26.51	4.41833333
0	24	4

在經過推算和紀錄之後，我們得到了圖表(圖 4-1)

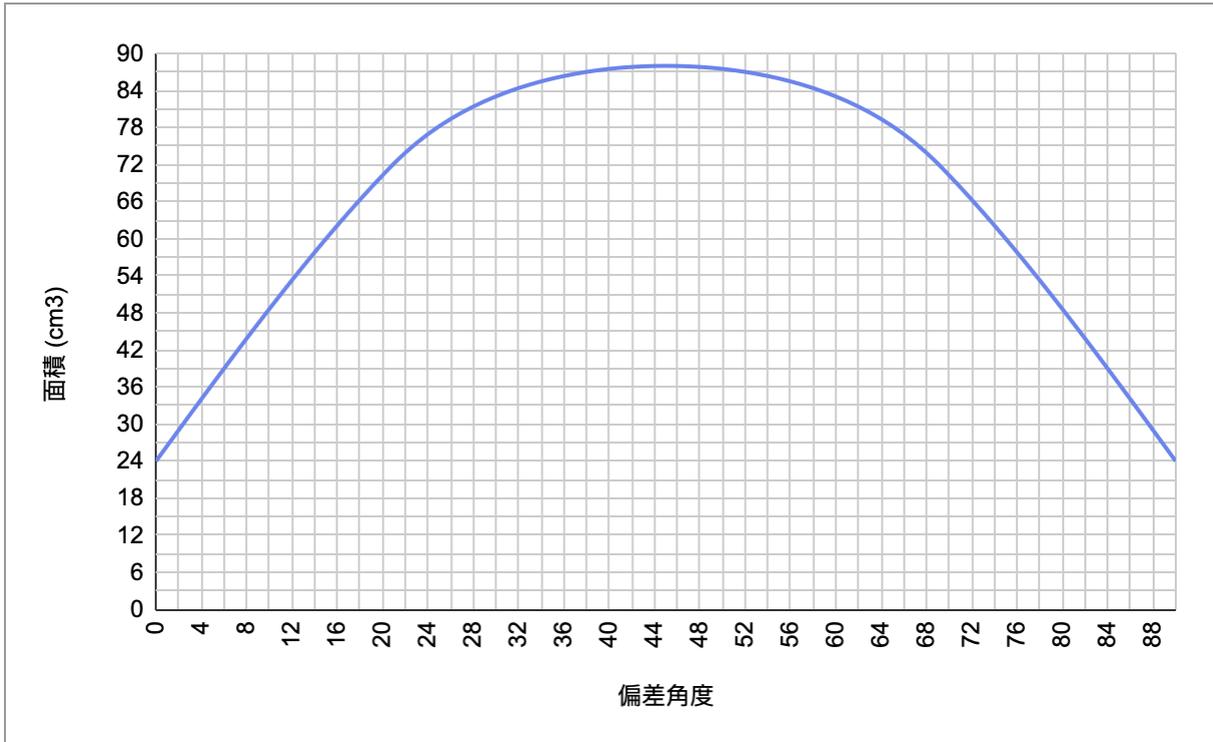


圖 4-1 面積與偏差角度折線圖

又根據原面積為 $20 \times 30 = 600$ ，觀察面積縮小率與偏差角度的關係得圖表(圖 4-2):

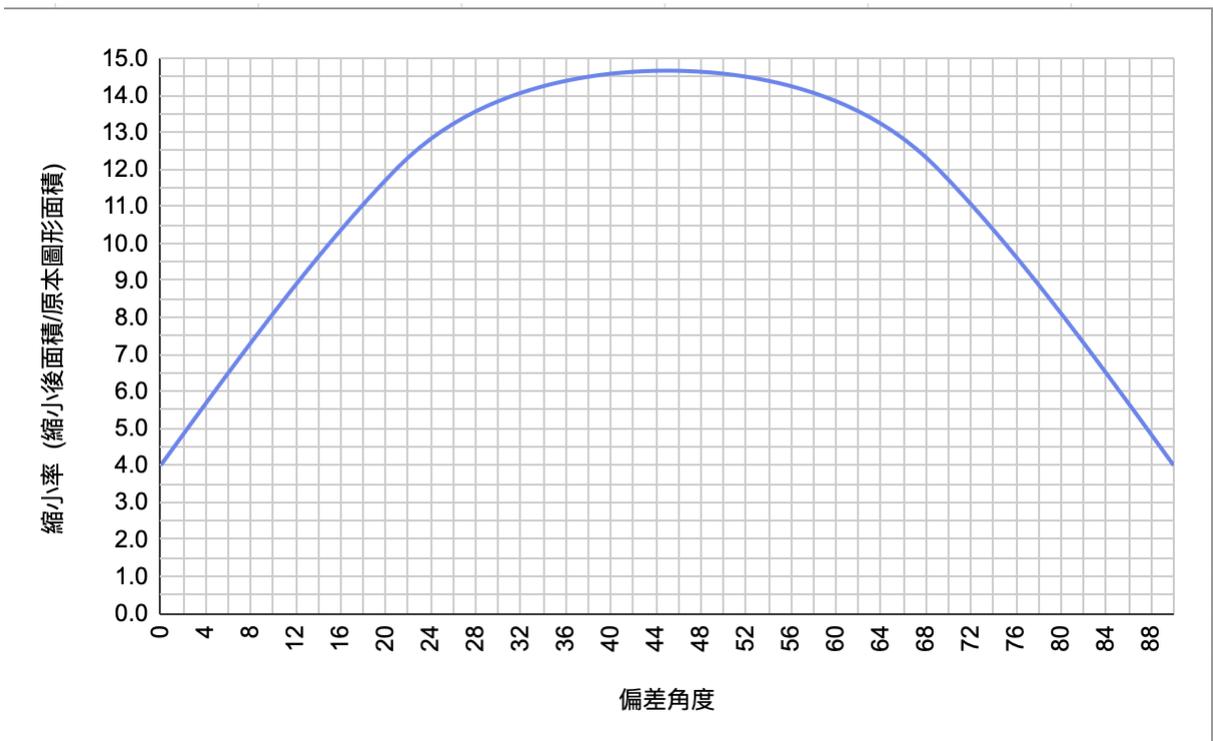


圖 4-2 縮小率與偏差角度折線圖

二、研究二：固定長與偏差角度時，寬與面積的關係:

首先，先將偏差角度固定為 45°，長固定為 30(分為五段)

表 4-2 固定長與偏差 45 度角時，寬與縮小率之表格

長(cm)	寬(cm)	原面積(cm ²)	折疊後面積(cm ²)	縮小率(%)
6	1	150	28	18.66666667
6	1.1	165	30.58	18.53333333
6	1.2	180	33.12	18.4
6	1.3	195	35.62	18.26666667
6	1.4	210	38.08	18.13333333
6	1.5	225	40.05	17.8
6	1.6	240	42.88	17.86666667
6	1.7	255	45.22	17.73333333
6	1.8	270	47.52	17.6
6	1.9	285	49.78	17.46666667
6	2	300	52	17.33333333
6	2.1	315	54.18	17.2
6	2.2	330	56.32	17.06666667
6	2.3	345	58.42	16.93333333
6	2.4	360	60.48	16.8
6	2.5	375	62.5	16.66666667
6	2.6	390	64.48	16.53333333
6	2.7	405	66.42	16.4
6	2.8	420	68.32	16.26666667
6	2.9	435	70.18	16.13333333
6	3	450	72	16
6	3.1	465	73.78	15.86666667
6	3.2	480	75.52	15.73333333
6	3.3	495	77.22	15.6
6	3.4	510	78.88	15.46666667
6	3.5	525	80.5	15.33333333
6	3.6	540	82.08	15.2
6	3.7	555	83.62	15.06666667
6	3.8	570	85.12	14.93333333
6	3.9	585	86.58	14.8
6	4	600	88	14.66666667

6	4.1	615	89.38	14.53333333
6	4.2	630	90.72	14.4
6	4.3	645	92.02	14.26666667
6	4.4	660	93.28	14.13333333
6	4.5	675	94.5	14
6	4.6	690	95.68	13.86666667
6	4.7	705	96.82	13.73333333
6	4.8	720	97.92	13.6
6	4.9	735	98.98	13.46666667
6	5	750	100	13.33333333
6	5.1	765	100.98	13.2
6	5.2	780	101.92	13.06666667
6	5.3	795	102.82	12.93333333
6	5.4	810	103.68	12.8
6	5.5	825	104.5	12.66666667
6	5.6	840	105.28	12.53333333
6	5.7	855	106.02	12.4
6	5.8	870	106.72	12.26666667
6	5.9	885	107.38	12.13333333

經過統計後，發現當長方形的長固定時，長方形的寬和折疊後的面積縮小率呈現負相關，並統整出了一張圖表(圖 4-4)。

邊長與偏差角度固定時，寬與折疊後面積的關係(X軸:寬，Y軸:面積)

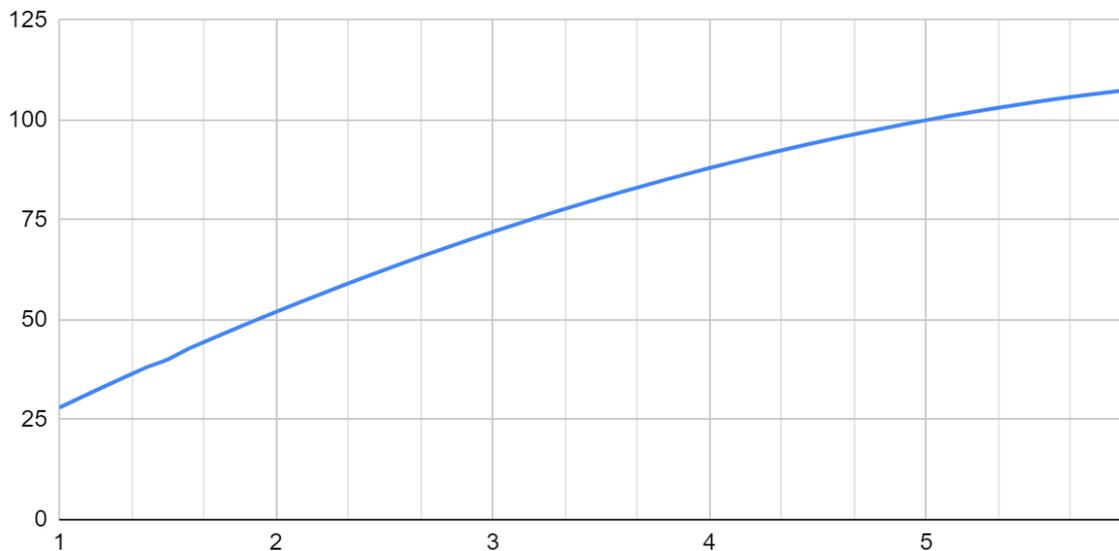


圖 4-3 固定長與偏差 45 度角時，寬與面積折線圖

寬和縮小率

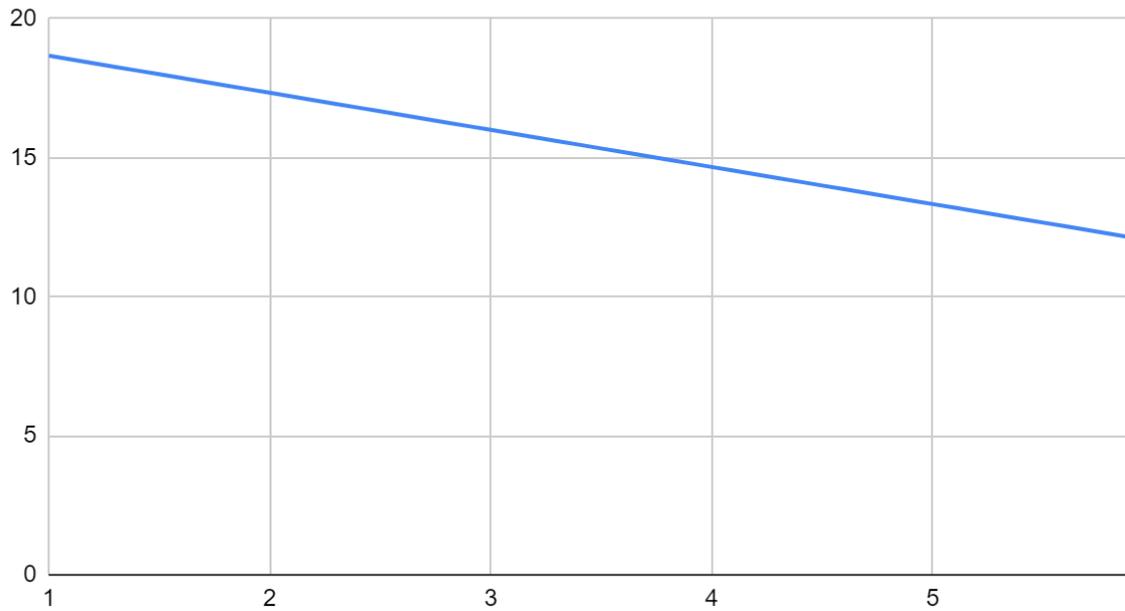


圖 4-4 固定長與偏差 45 度角時，寬與縮小率折線圖

接著，我們改變偏差角度至 30 度，觀察圖表中的斜線斜率的變化，進而推導出關係。以下是當偏差角度改變至固定為 30 度時，同樣保持長為 30(分為五段)，觀察寬與縮小後面積和寬與縮小率的關係。

表 4-3 固定長與偏差 30 度角時，寬與縮小率之表格

長(cm)	寬(cm)	原面積(cm ²)	折疊後面積(cm ²)	縮小率(%)
6	1	150	27.69	18.46
6	1.1	165	30.21	18.30909091
6	1.2	180	32.67	18.15
6	1.3	195	35.1	18
6	1.4	210	37.47	17.84285714
6	1.5	225	39.8	17.68888889
6	1.6	240	42.09	17.5375
6	1.7	255	44.33	17.38431373
6	1.8	270	46.52	17.22962963
6	1.9	285	48.66	17.07368421
6	2	300	50.76	16.92
6	2.1	315	52.82	16.76825397
6	2.2	330	54.82	16.61212121

6	2.3	345	56.78	16.45797101
6	2.4	360	58.7	16.30555556
6	2.5	375	60.57	16.152
6	2.6	390	62.39	15.9974359
6	2.7	405	64.16	15.84197531
6	2.8	420	65.89	15.68809524
6	2.9	435	67.58	15.53563218
6	3	450	69.22	15.38222222
6	3.1	465	70.81	15.22795699
6	3.2	480	72.35	15.07291667
6	3.3	495	73.85	14.91919192
6	3.4	510	75.3	14.76470588
6	3.5	525	76.71	14.61142857
6	3.6	540	78.01	14.4462963
6	3.7	555	79.38	14.3027027
6	3.8	570	80.65	14.14912281
6	3.9	585	81.87	13.99487179
6	4	600	83.05	13.84166667
6	4.1	615	84.18	13.68780488
6	4.2	630	85.26	13.53333333
6	4.3	645	86.3	13.37984496
6	4.4	660	87.29	13.22575758
6	4.5	675	88.23	13.07111111
6	4.6	690	89.13	12.9173913
6	4.7	705	89.99	12.76453901
6	4.8	720	90.79	12.60972222
6	4.9	735	91.55	12.45578231
6	5	750	92.26	12.30133333
6	5.1	765	92.93	12.14771242
6	5.2	780	93.55	11.99358974
6	5.3	795	93.99	11.82264151
6	5.4	810	94.44	11.65925926
6	5.5	825	94.87	11.49939394
6	5.6	840	95.3	11.3452381
6	5.7	855	95.72	11.19532164

6	5.8	870	96.14	11.05057471
6	5.9	885	96.56	10.91073446

邊長與偏差角度固定時，寬與折疊後面積的關係

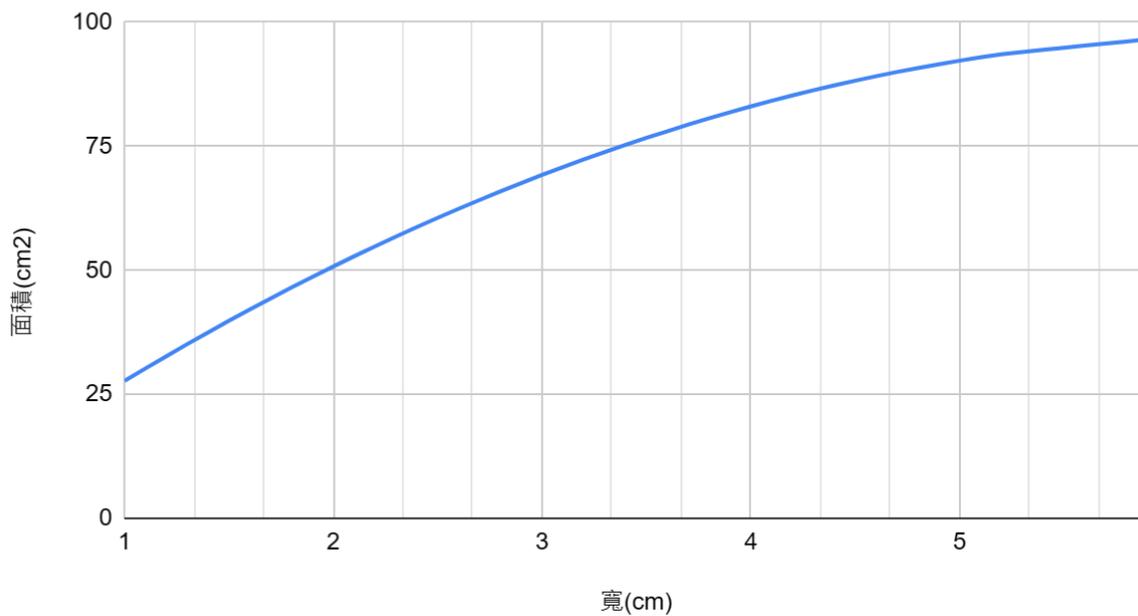


圖 4-5 固定長與偏差 30 度角時，寬與面積折線圖

寬和縮小率

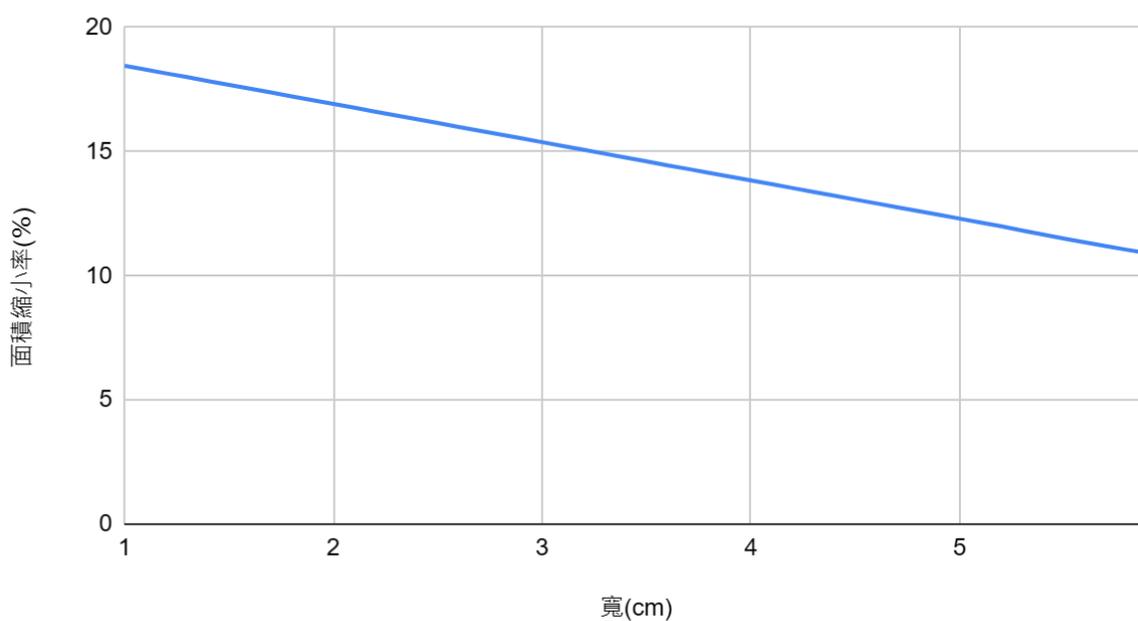


圖 4-6 固定長與偏差 30 度角時，寬與縮小率折線圖

接著，再次調整偏差角度至 15 度，並觀察圖表中的斜線斜率的變化，統計表格與圖表如下：

表 4-4 固定長與偏差 15 度角時，寬與縮小率之表格

長(cm)	寬(cm)	原面積(cm ²)	折疊後面積(cm ²)	縮小率(%)
6	1	150	26	17.33333333
6	1.1	165	28.16	17.06666667
6	1.2	180	30.24	16.8
6	1.3	195	32.24	16.53333333
6	1.4	210	34.16	16.26666667
6	1.5	225	36	16
6	1.6	240	37.76	15.73333333
6	1.7	255	39.44	15.46666667
6	1.8	270	41.04	15.2
6	1.9	285	42.56	14.93333333
6	2	300	44	14.66666667
6	2.1	315	45.36	14.4
6	2.2	330	46.64	14.13333333
6	2.3	345	47.84	13.86666667
6	2.4	360	48.96	13.6
6	2.5	375	50	13.33333333
6	2.6	390	50.96	13.06666667
6	2.7	405	51.84	12.8
6	2.8	420	52.64	12.53333333
6	2.9	435	53.36	12.26666667
6	3	450	54	12
6	3.1	465	54.56	11.73333333
6	3.2	480	55.11	11.48125
6	3.3	495	55.67	11.24646465
6	3.4	510	56.22	11.02352941
6	3.5	525	56.77	10.81333333
6	3.6	540	57.31	10.61296296
6	3.7	555	57.85	10.42342342
6	3.8	570	58.39	10.24385965
6	3.9	585	58.93	10.07350427
6	4	600	59.46	9.91

6	4.1	615	60	9.756097561
6	4.2	630	60.52	9.606349206
6	4.3	645	61.05	9.465116279
6	4.4	660	61.57	9.328787879
6	4.5	675	62.1	9.2
6	4.6	690	62.61	9.073913043
6	4.7	705	63.13	8.954609929
6	4.8	720	63.64	8.838888889
6	4.9	735	64.15	8.727891156
6	5	750	64.66	8.621333333
6	5.1	765	65.17	8.518954248
6	5.2	780	65.67	8.419230769
6	5.3	795	66.17	8.32327044
6	5.4	810	66.66	8.22962963
6	5.5	825	67.16	8.140606061
6	5.6	840	67.65	8.053571429
6	5.7	855	68.14	7.969590643
6	5.8	870	68.62	7.887356322
6	5.9	885	69.11	7.809039548
6	6	900	69.59	7.732222222
6	6.1	915	72.6	7.93442623
6	6.2	930	73.2	7.870967742
6	6.3	945	73.81	7.810582011
6	6.4	960	74.41	7.751041667
6	6.5	975	75.02	7.694358974
6	6.6	990	75.63	7.639393939
6	6.7	1005	76.24	7.586069652
6	6.8	1020	76.85	7.534313725
6	6.9	1035	77.46	7.484057971
6	7	1050	78.08	7.436190476
6	7.1	1065	78.69	7.388732394
6	7.2	1080	79.31	7.343518519
6	7.3	1095	79.93	7.299543379
6	7.4	1110	80.55	7.256756757
6	7.5	1125	81.17	7.215111111

6	7.6	1140	81.8	7.175438596
6	7.7	1155	82.42	7.135930736
6	7.8	1170	83.05	7.098290598
6	7.9	1185	83.68	7.061603376
6	8	1200	84.31	7.025833333
6	8.1	1215	84.94	6.990946502
6	8.2	1230	85.57	6.956910569
6	8.3	1245	86.21	6.924497992
6	8.4	1260	86.85	6.892857143
6	8.5	1275	87.48	6.861176471
6	8.6	1290	88.12	6.831007752
6	8.7	1305	88.76	6.801532567
6	8.8	1320	89.41	6.773484848
6	8.9	1335	90.05	6.745318352
6	9	1350	90.7	6.718518519
6	9.1	1365	91.34	6.691575092
6	9.2	1380	91.99	6.665942029
6	9.3	1395	92.64	6.640860215
6	9.4	1410	93.29	6.616312057
6	9.5	1425	93.95	6.592982456
6	9.6	1440	94.6	6.569444444
6	9.7	1455	95.26	6.547079038
6	9.8	1470	95.92	6.525170068
6	9.9	1485	96.58	6.503703704
6	10	1500	97.24	6.482666667

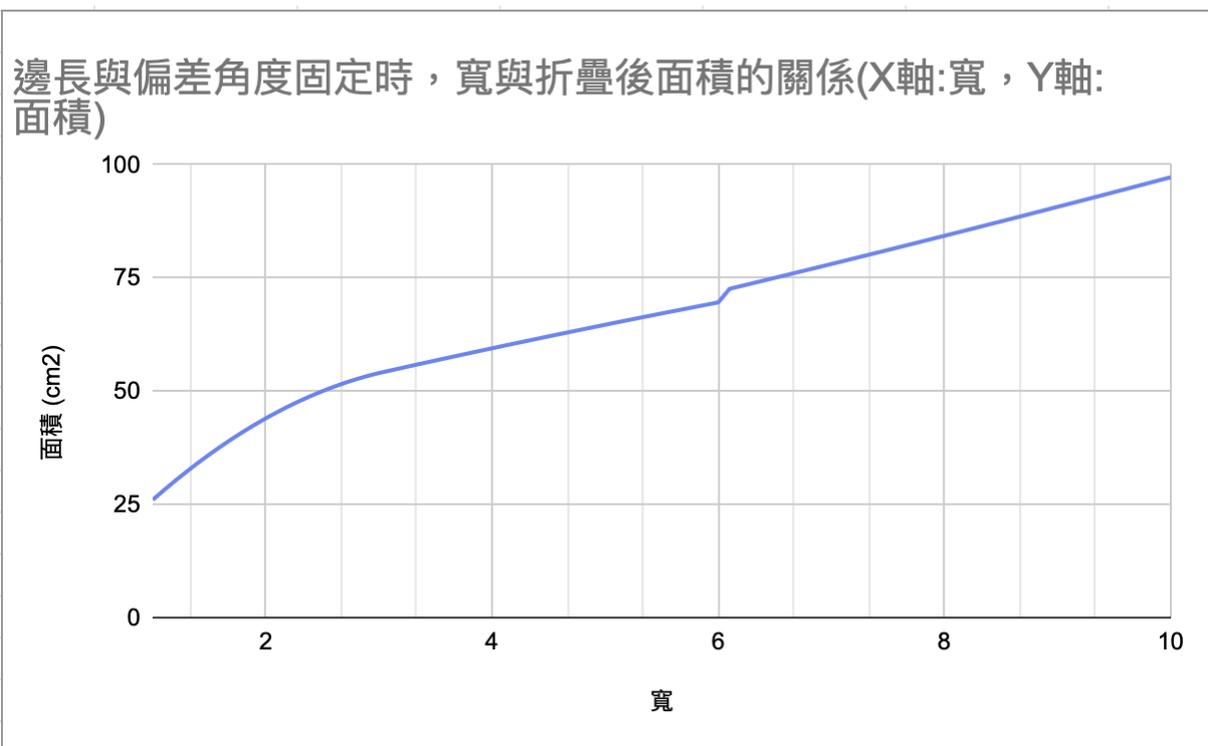


圖 4-7 固定長與偏差 15 度角時，寬與面積折線圖

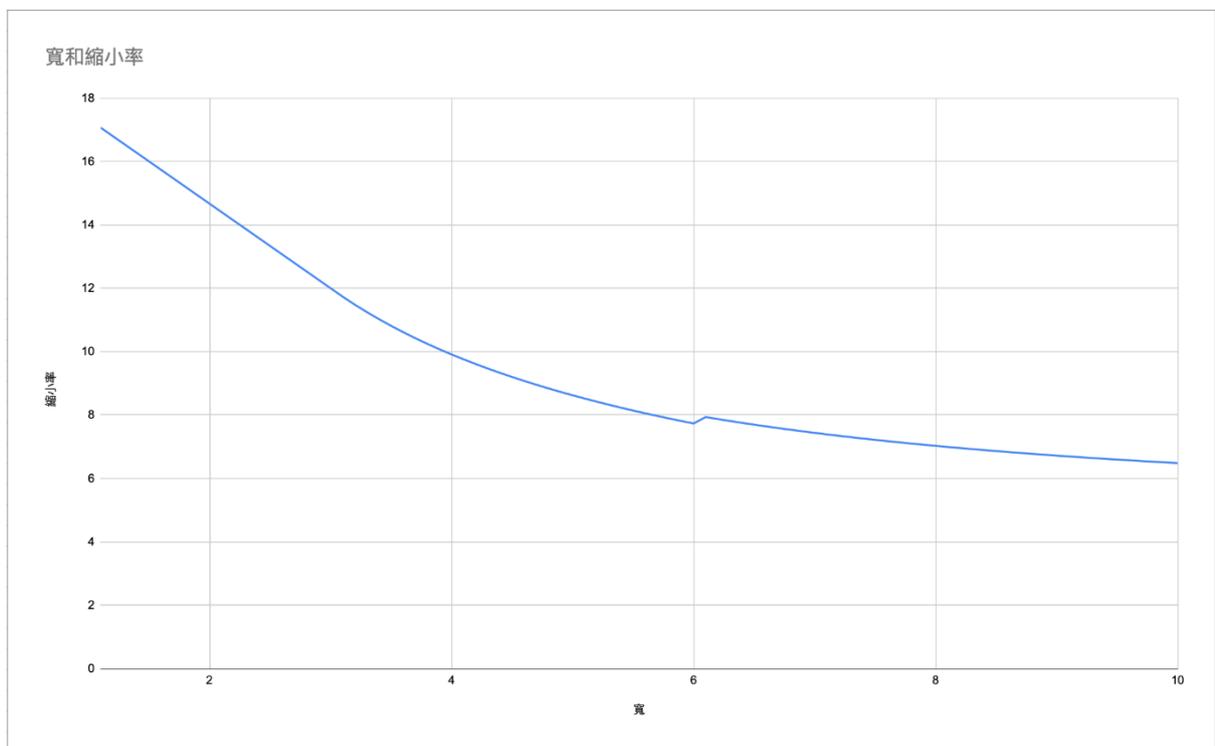


圖 4-8 固定長與偏差 15 度角時，寬與縮小率折線圖

我們發現當偏差角度為 45 度和 30 度時，寬和縮小率的關係圖都是直線，但 15 度時的寬與縮小率的關係圖卻呈現曲線，我們去觀察了他的轉折點處的折疊狀況，發現

當寬=3時，線條開始發生彎曲，我們觀察了摺疊狀況，發現當寬=3時，正好是從"狀況一"轉成"狀況二"，也就是此時重疊(圖 4-9)

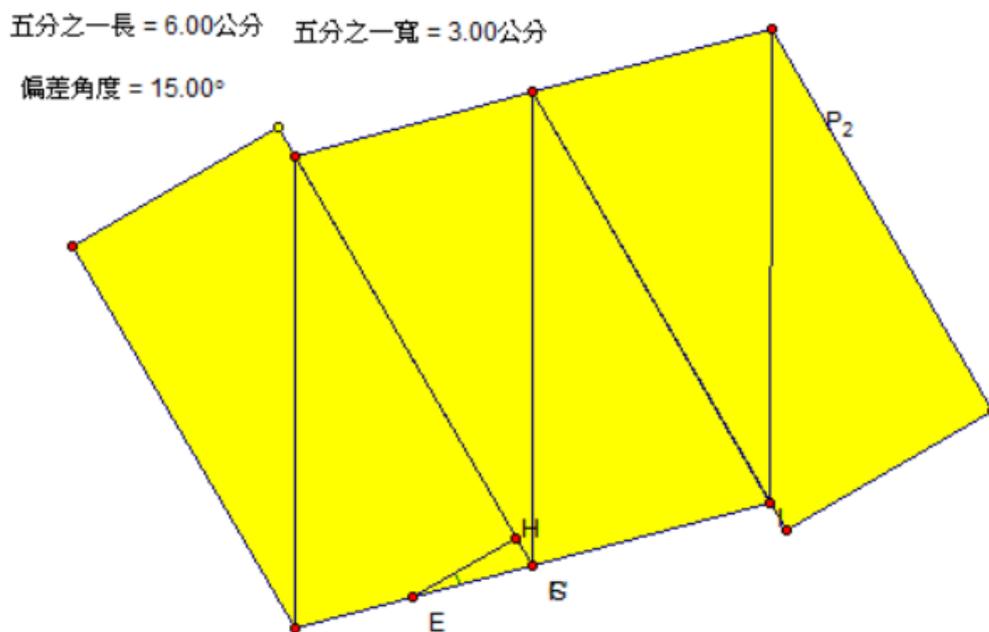


圖 4-9 當寬=3 的狀況下，三浦折疊圖形的重疊情形

當寬=6時，發生第二次重疊，也就是從"狀況三"變成"狀況四"，關係圖中也是在寬=6 和 寬=6.1 時出現大幅度的轉折(圖 4-10)

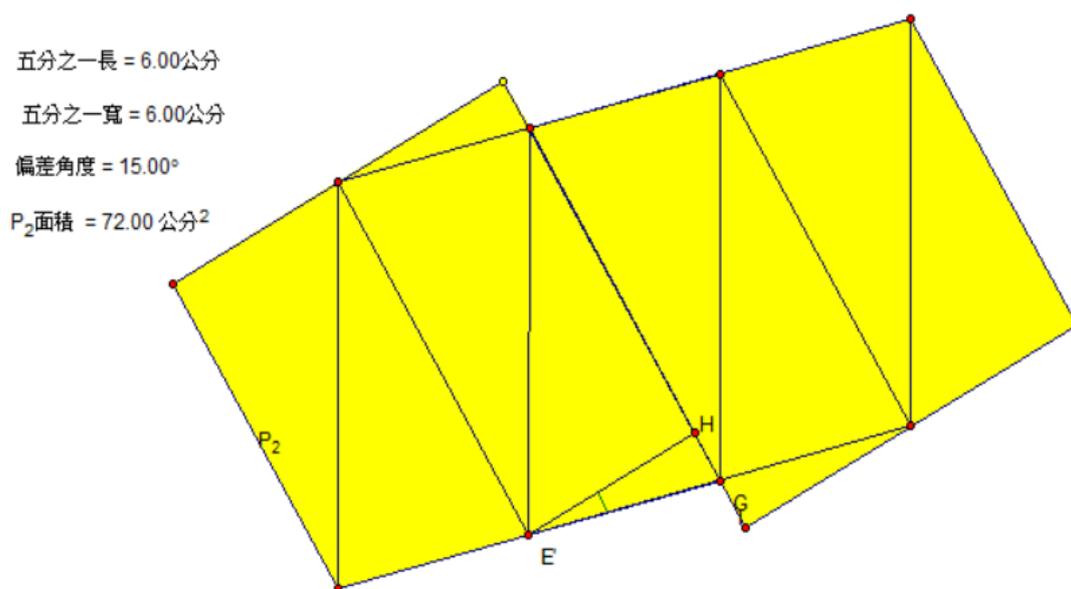


圖 4-10 寬=6 的狀況下，三浦折疊圖形的重疊情形

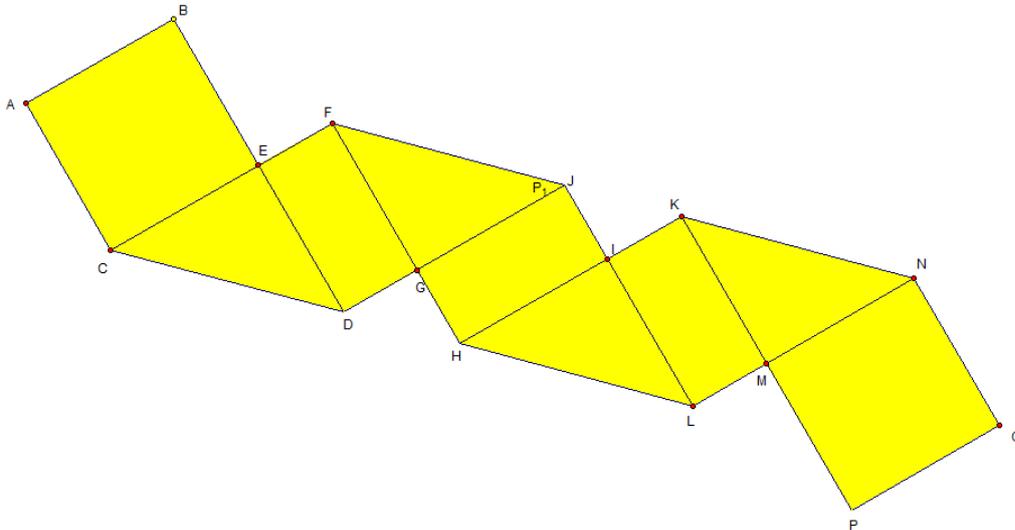
藉由以上的發現，再次應證了研究一的推論，偏差角度會以 45°為對稱軸，因此我們只需要對 45°~15°進行討論，畢竟兩邊的數據將會是相同的。同時也驗證了三浦折疊

最大的優點，只要面積越大，縮小率會越小，這個特性在現實世界中對人類有很大的幫助。

三、研究三、推導三浦折疊於各種狀況(圖 1-4 p.6)的面積公式

此討論涉及共六種不同的算式、計算與公式，以下為簡略的說明(以下的附圖為算式中所使用的點、邊和面積的標示)。

狀況一：



$$\text{狀況一： } 5xy - \frac{x^2 \cos^2 \theta}{\tan \theta}$$

推導：

$$\text{由 } S_{ABDC} = S_{CFJD} = S_{FJHL} = S_{HKNL} = S_{KNOP} = xy$$

$$\text{且 } S_{\triangle CDE} = S_{\triangle FGJ} = S_{\triangle HIL} = S_{\triangle KMN}$$

$$S_{\triangle CDE} = \overline{CD} \times (E \text{ 在 } \overline{CD} \text{ 上的高}) \div 2$$

$$\text{又 } \overline{CD} = \frac{x}{\cos \theta} = x \sec \theta$$

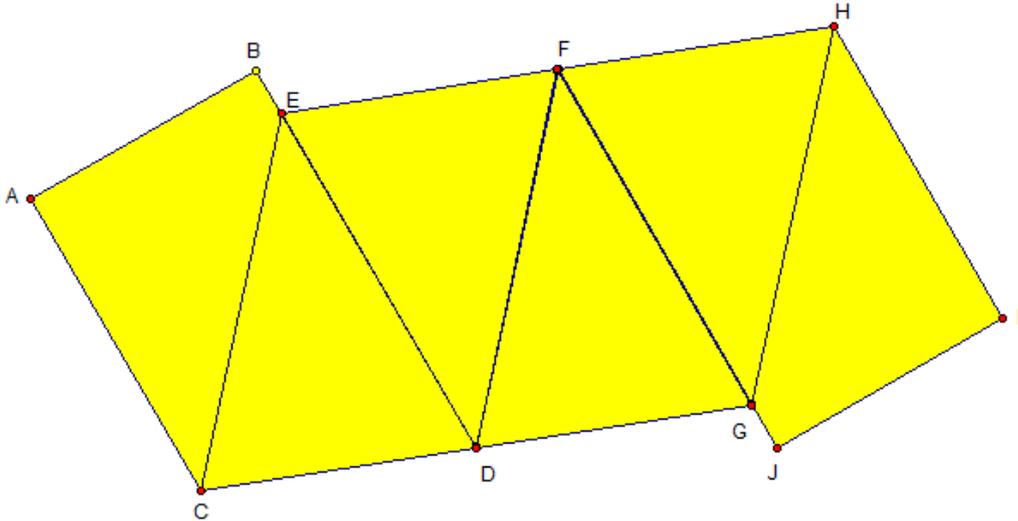
設 E 在 \overline{CD} 上的高 = h

$$\Rightarrow \frac{\frac{x}{2} \sec \theta}{h} = \tan \theta$$

$$h = \frac{\frac{x}{2} \sec \theta}{\tan \theta} = \frac{x}{2} \csc \theta$$

$$\Rightarrow S_{\text{全}} = 5xy - \frac{x^2 \cos^2 \theta}{\tan \theta} \text{ (得證)}$$

狀況二:



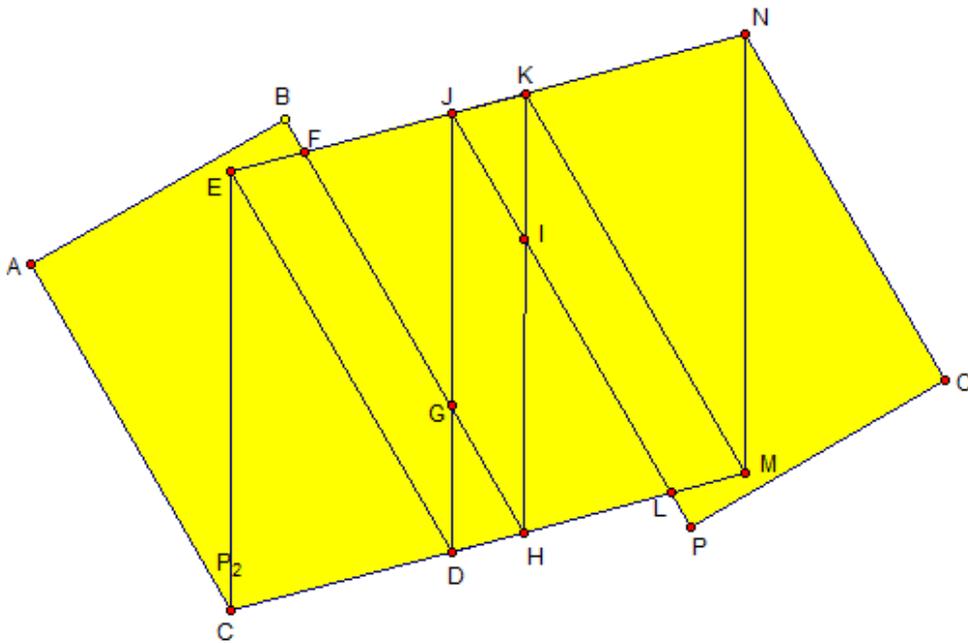
狀況二：恰好發生重疊，面積為 $3xy$

推導：

$$S_{ABDC} = S_{EDGF} = S_{FJIH}$$

由於平行四邊形 $EDGF$ 面積為 xy ，故得面積為 $3xy$

狀況三:

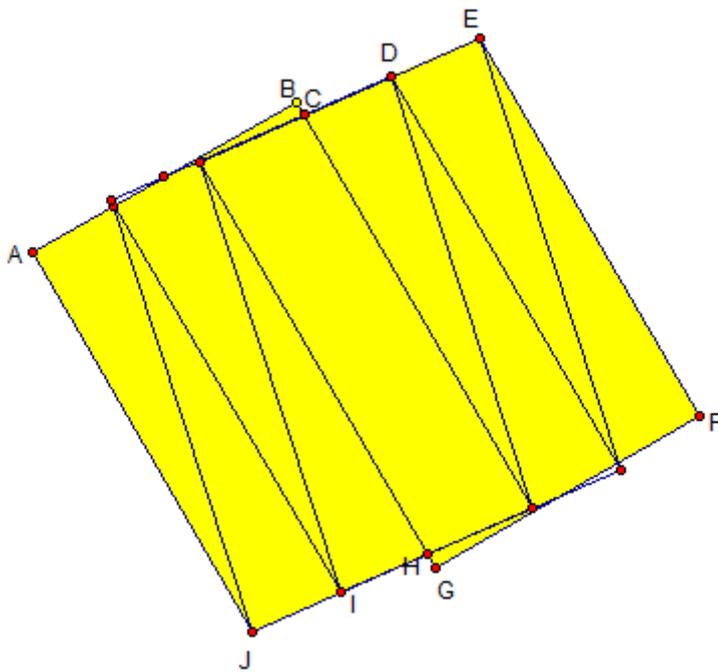


狀況三：

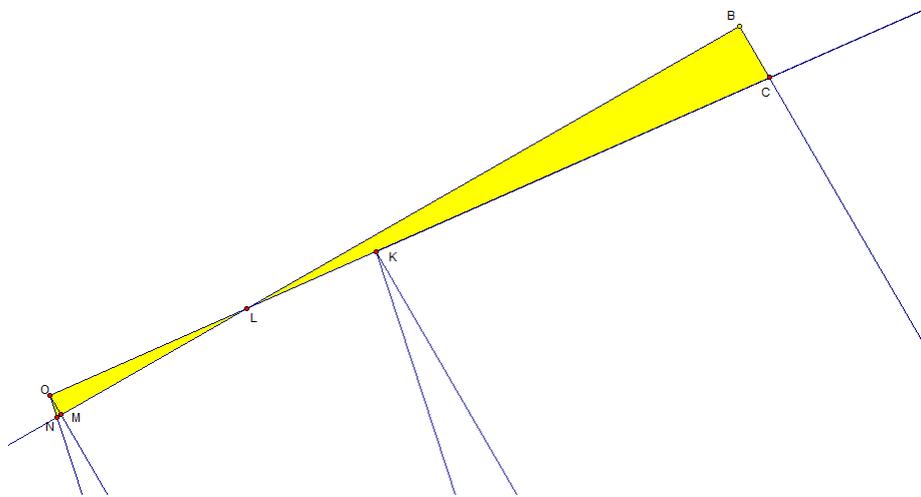
$$S_{\text{全}} = 2 \cdot [xy - (y + 2y^2) \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta - x \cdot \cos \theta \cdot y \cdot \cos \theta] + (x \cdot \cos \theta + 2y \cdot \sin \theta) \cdot y \cdot \cos \theta$$

狀況五:

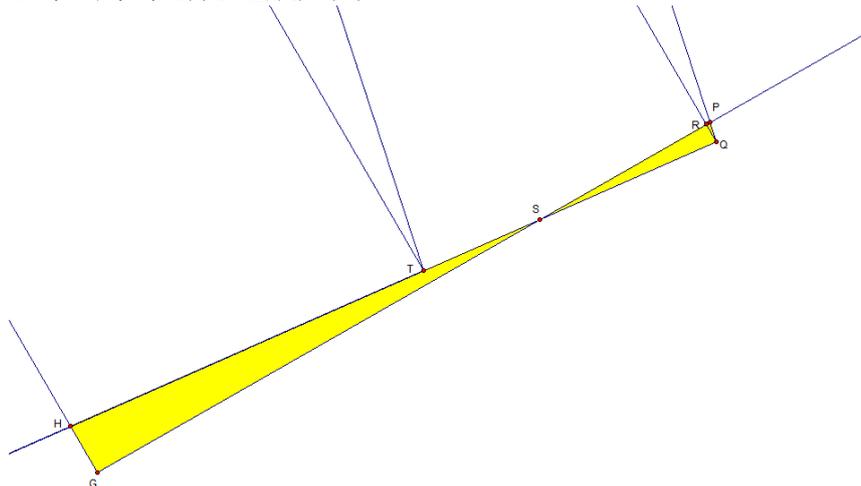
由於此狀況之點的分佈較為密集，因此我們將其分開作圖。



以下為上面部分之放大圖



以下為下半部分之放大圖:



$$\text{狀況五： } 2xy - \frac{(x \sec \theta \times \sqrt{y^2 - (\frac{x \sec \theta}{6})^2})}{3}$$

推導：

$$\text{先設 } S_{\triangle LNO} = S_{\triangle SQP} = \alpha$$

$$S_{\triangle LBC} = S_{\triangle SHG} = \beta$$

$$S_{\triangle AJN} = S_{\triangle EFP} = \gamma$$

$$S_{\triangle JIO} = S_{\triangle EDQ} = S_{\triangle DCS} = S_{\triangle IHL} = \delta$$

$$S_{MLKI} = S_{RSTD} = \varepsilon$$

$$S_{CKHT} = 2\delta$$

$$\text{且 } \alpha + \varepsilon = \delta$$

$$\text{所求} = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 4\delta + 2\varepsilon + 2\delta$$

$$= 2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 6\delta + 2\varepsilon$$

$$= 8\alpha + 2\beta + 2\gamma$$

$$x \sec \theta \times \sqrt{y^2 - (\frac{x \sec \theta}{6})^2} = \alpha + 3\delta + \varepsilon + 2\delta = 6\delta$$

$$\Rightarrow 8\delta = \frac{4(x \sec \theta \times \sqrt{y^2 - (\frac{x \sec \theta}{6})^2})}{3}$$

$$S_{BAJT} = xy = \beta + \gamma + 2\delta + \delta + 2\delta = \beta + \gamma + 5\delta$$

$$\text{又 } 5\delta = \frac{5(x \sec \theta \times \sqrt{y^2 - (\frac{x \sec \theta}{6})^2})}{6}$$

$$= \beta + \gamma = xy - \frac{5(x \sec \theta \times \sqrt{y^2 - (\frac{x \sec \theta}{6})^2})}{6}$$

$$2(\beta + \gamma) = 2xy - \frac{5(x \sec \theta \times \sqrt{y^2 - (\frac{x \sec \theta}{6})^2})}{6}$$

$$\text{所求} = 8\delta + 2(\beta + \gamma)$$

$$= 2xy - \frac{(x \sec \theta \times \sqrt{y^2 - (\frac{x \sec \theta}{6})^2})}{3}$$

狀況六：

此時完全重疊，圖形為一矩形。

狀況六：完全重合，面積為 xy

推導：矩形面積為 xy

討論

為了避免造成混淆在此先行說明，在 Q2 的算式中所使用的” X” 為該狀況之” 偏差角度”，而在其餘的算式中的” X” 和” Y” 為折疊線條所產生的長方形的” 長” 與” 寬”，而為” 偏差角度”。

一、問題探討：

Q1：

在研究一中，我們觀察到在固定邊長（20*30）的情況下，偏差角度為 45°時，面積縮小率達到最小值。這是否意味著在實際狀況中，特定偏差角度會導致最小的面積縮小率？

A1：

雖然我們並沒有進一步探討此問題，但是以我們的研究中得出的結論是，特定偏差角度確實會影響其面積縮小率。

Q2：

研究一中的結果顯示，45°為對稱軸，是否能證明之？

A2：

經過觀察後發現，面積縮小率最小值發生在偏差角度=45°時，即邊長固定(20*30)時，偏差角度=45°時面積為最大值 88 縮小率為 14.6%。雖然在實際狀況內無法出現 65°以上的圖形，但是能夠在軟體中實現，我們發現了以上關係圖以 45°為對稱軸，這驗證了面積縮小率的對稱性，以下是 45°為極值的證明(圖 5-1 、圖 5-2、圖 5-3):

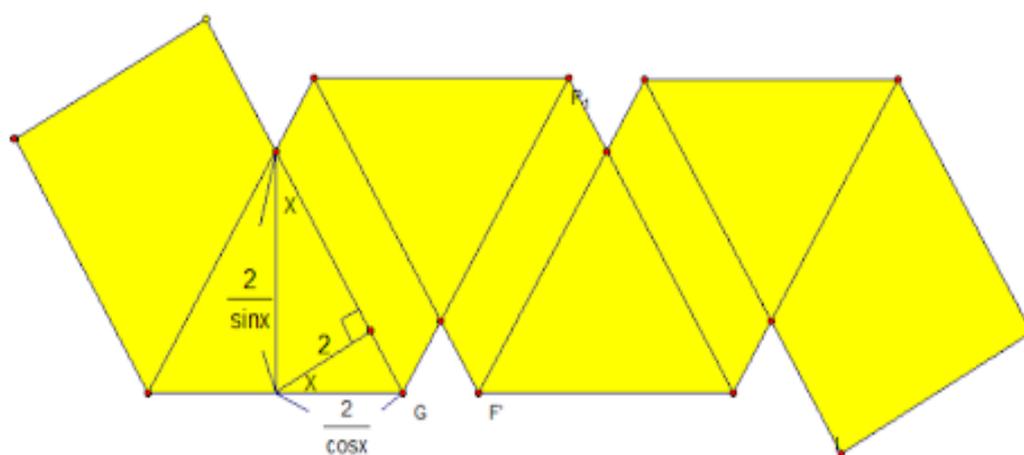


圖 5-1 45 度左右的偏差角之重疊狀況

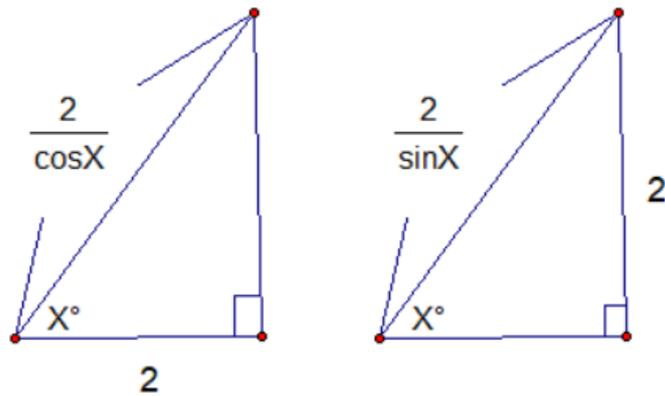


圖 5-2 、圖 5-3 底與高的推算

$$30 - \left(\frac{2}{\cos x} \times \frac{2}{\sin x} \right) \times 4 \text{ 的最大值}$$

$$= 30 - \frac{16}{\sin x \times \cos x} \text{ 的最大值}$$

此時 $\sin x \times \cos x$ 有最大值

$$\text{即 } \frac{1}{2} \sin 2x \text{ 的最大值}$$

$$\Rightarrow 2x = 90^\circ \quad x = 45^\circ \text{ (即證明了 } 45^\circ \text{ 為對稱軸)}$$

二、折疊狀況觀察：

Q3：

在研究二中，我們觀察到當寬=3時，發生了折疊狀況的轉折點。這種轉折是否與特定條件相關，並且是否在其他寬度下也存在相似的情況？

A3：

其轉折主要是因為在寬=3時”狀況”的改變，導致上表中折線有曲折的現象，在實際測試後，無論長寬為何，只要符合”狀況”的改變即會出現轉折。

三、三浦折疊的優勢驗證：

Q4：

我們提到面積越大，縮小率越小的特性在現實世界中對人類有幫助。這種優勢是否在不同情境下都成立，並且是否存在例外情況？

A4：

以目前人類的技術來說，主要著重於利用三浦折疊的”面積縮小率高”以及”收縮時低磨損”兩種特性，而這也是三浦折疊一直以來最具有優勢的部分，因此我們認為在大多數的情境下會成立。

伍、結論

在這次的科學展覽中，我們細緻地觀察了三浦折疊的各種變因以及其面積縮小率之間的相互關係。首先，我們注意到當我們以偏差角度和面積縮小率為變數，繪製折線圖時，其形狀呈現一條拋物線，以”偏差角度=45°”為對稱軸。隨後，我們進一步探討了在固定長度和偏差角度的情況下，寬度與面積之間的關係。我們發現在偏差角度為 45°和 30°時，關係圖呈現線性（即一元一次方程式）；然而，在偏差角度為 15°時，由於狀況的改變，圖形在寬度等於 3 和寬度等於 6 時出現了轉折。主要原因是圖形的覆蓋區域發生變化和增加，導致寬度與縮小率的關係圖中出現了非尋常的轉折。

經過以上的研究與觀察，我們得出的結論是，在偏差角度為 0°至 45°時，三浦折疊的面積縮小率與偏差角度呈現正相關；而在 45°至 90°時呈現負相關。此外，寬度與三浦折疊的面積縮小率之間呈現負相關。

陸、參考文獻與資料

1. 縣立明正國中. (2020.). 屏東縣第 60 屆中小學科學展覽會 作品說明書.
https://sci.ptc.edu.tw/Upfile/Works/1583323515_469566_43.pdf
2. 三浦折疊-日本百大發明之一. (2023/06/27). 百度百科. 2023/12/20 取自
https://baike.baidu.com/item/%E4%B8%89%E6%B5%A6%E6%8A%98%E5%8F%A0/13845494?fr=ge_ala
3. 四月天賜. (2021, March 31). 简单介绍三浦折疊方法. 知乎.
<https://zhuanlan.zhihu.com/p/361400348>
4. Tvbs T 觀點. (2024, January 4). 能把平面當 3D 摺紙技巧融入太空科技. Facebook.
<https://www.facebook.com/tvbs56viewpoint/videos/1566892830748106/>
5. 三浦折疊. (2023/02/03). Wikipedia. 2024/01/30 取自 <https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E4%B8%89%E6%B5%A6%E6%91%BA%E7%96%8A>
6. Case press. (2016, February 12). 摺紙：摺痕中的數學. CASE 報科學.
<https://case.ntu.edu.tw/blog/?p=23728>