新竹市第四十二屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：數學

作品名稱：數學咖孔明—$n \times n$ 孔明棋的推廣

編　　號：113JA-M010

關 鍵 詞：孔明棋、獨立鑽石棋

摘要

標準孔明棋的棋盤是一個 7×7 的棋盤扣掉四個 2×2 的角落，排成十字型的棋盤，除中心位置不放棋子外，其餘方格內皆放滿棋子。玩法類似跳棋，將棋子沿著水平或垂直方向跳過相鄰的棋子到另一處的空格上，一次只能跳過一個棋子，並且必須把被跳過的棋子拿掉，剩下的棋子越少越好。

我們定義 $n \times n$ 的棋盤扣掉四個 $m \times m$ 的角落（$n, m \in N, n \geq 2m+1$且 n 為奇數），且中心位置為初始空格，其餘方格內皆放滿棋子，這樣排成十字型的棋盤為 $KM(n,m)$。當棋盤剩一子，且其落在初始的空格上，則稱為有解。本研究的目標主要在探討 $KM(n,m)$ 是否有解，我們利用等差級數公式，初步判定出當 $n = 6k+1$, $m = 3t+2$、$n = 6k+3$, $m = 3t$、以及 $n = 6k+5$, $m = 3t+1 (k, t \geq 0, k, t \in N)$三種情形時 $KM(n,m)$ 可能有解，其餘皆無解。

接著我們討論 3×3 和 3×5 棋盤角落空一子，多加一格在初始空格旁則有解。最後，本研究證明 $KM(2m+3,m)$ 的棋盤有解$(m \geq 2)$；其中 $KM(5,1)$ 雖無解，但在多加兩格的條件下有解。

壹、 研究動機

在學校的社團課時，老師偶爾會在社團數學課時給我們玩桌遊，而孔明棋就是其中之一。由於大部分桌遊都是雙人以上，而孔明棋卻是單人遊戲，而且孔明棋有一定的難度，我們試了數次都無法達成「天才級」（只剩一顆棋子且在正中央），因此我們一直都想找出獲得「天才級」的方法，再加上剛好碰上今年的科展，便想研究這個主題。

貳、 研究目的

(1) 探討 3×3和 3×5 棋盤角落空一子是否有解。

(2) 探討 $n\times n$ 的棋盤扣掉四個 $m\times m$ 的角落($n,m\in N, n\geq 2m+1$且 n 為奇數)且中心位置為初始空格是否有解。

參、研究設備與器材

(1) 孔明棋一組

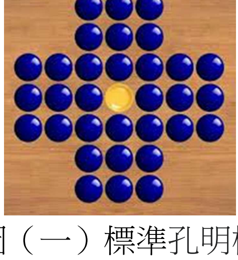
(2) 書寫記錄工具

(3) 3C 設備

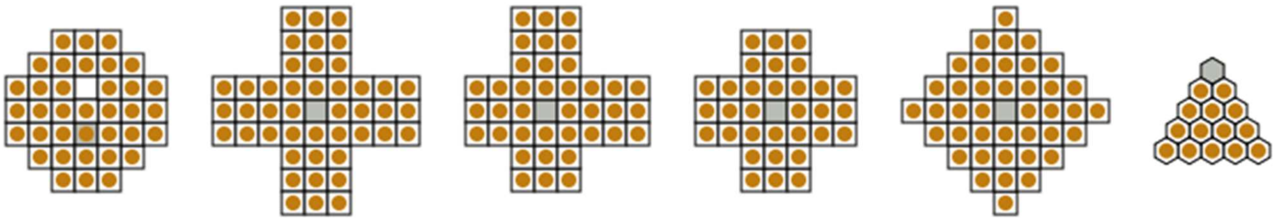
(4) APP-東方孔明棋

肆、研究過程與方法

孔明棋又稱獨立鑽石棋[1]、單身貴族棋，是一個 7×7 的棋盤扣掉四個 2×2 的角落，見圖（一）。玩法類似跳棋，每次移動都必須跳過一個棋子並將其拿掉，目標是移動棋子直到剩下的棋子越少越好，孔明棋還有其他變形的棋盤，如圖（二）：



圖（一）標準孔明棋



圖（二）孔明棋的變形

當棋盤上只剩下一顆棋子，且該棋子正好在初始的空格上時，我們稱這個情況有解。根據新北市 104 年的科展研究[4]，探討棋盤是否有解時，將 3×3 方陣做編碼，如圖(三)：

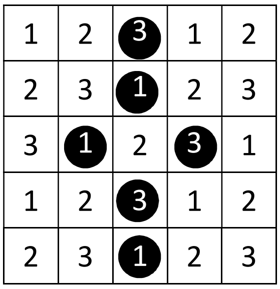
1	2	3
2	3	1
3	1	2

圖(三)

再用此方陣將 $n \times n$ 正方形棋盤的格子編碼，並給定 $n \times n$ 方陣中左上角的編碼為1，就會得到下面這個棋盤：

1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	…
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	…
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	…
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	…
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	…
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	…
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	…
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	…
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

我們令1號、2號、3 號位置上有棋子的總數分別為 a、b、c，以圖(四)為例，黑色圓圈處為放置棋子的位置，編碼為 1 的位置上有 3 顆棋子，編碼為 2 的位置上有 0 顆棋子，編碼為 3 的位置上有 3 顆棋子，所以此初始棋盤 $a = 3$、$b = 0$、$c = 3$，而透過移動棋子使其有解，其過程中 a、b、c數字變化如下表(一)：



圖(四)

移動次數（次）	a	b	c
0	3	0	3
1	2	1	2
2	3	0	1
3	2	1	0
4	1	0	1
5	0	1	0

表(一)

注意到3號位置的棋子跳出去後，不管是跳到1、2 號位置，都會使2號、3號（或 1 號）上棋子的總數減一、1號（或2號）棋子的總數加一。也就是說，每跳動一子，另外兩個號碼棋子的總數各減一，另一個號碼棋子的總數加一。

因為目標是剩下一顆棋，最後的數對 (a,b,c) 必為 $(1,0,0)$、$(0,1,0)$ 或 $(0,0,1)$，所以每次移動後 a、b、c 三數必為兩奇一偶或兩偶一奇，也就是每走一步，相鄰的兩個號碼其總數差距的奇偶性是固定的，皆為兩奇一偶，見表(二)。代表一開始 a、b、c 的差必為兩奇一偶，才能有解。

移動（次數）	a	$\lvert a-b\rvert$	b	$\lvert b-c\rvert$	c	$\lvert c-a\rvert$
0	3	3	0	3	3	0
1	2	1	1	1	2	0
2	3	3	0	1	1	2
3	2	1	1	1	0	2
4	1	1	0	1	1	0
5	0	1	1	1	0	

表(二)

我們定義名為 $KM(n,m)$ 的棋盤，表示 $n\times n$ 的棋盤扣掉四個 $m\times m$ 的角落（$n,m\in N, n\geq 2m+1$且 n 為奇數）且初始時中心位置是空格，其他方格內都有棋子。

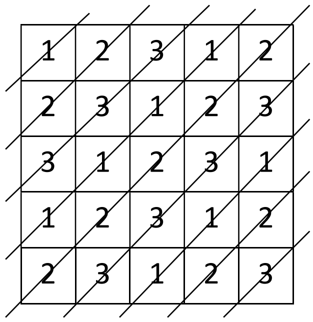
一、計算 $KM(n,m)$ 是否有解($n,m \in N, n \geq 5$)

觀察 $n \times n$ 的正方形方陣，可以發現由右上到左下斜排的數字一模一樣，也就是說 $n \times n$ 的方陣中斜排數為 $2n-1$。

舉個例子，$n=5$ 時的方陣如圖(五)，斜排數為 $2 \times 5 - 1 = 9$，見圖(六)。

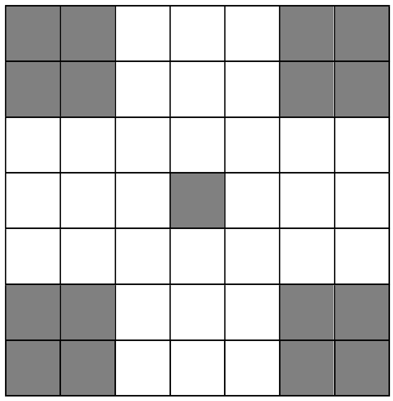
1	2	3	1	2
2	3	1	2	3
3	1	2	3	1
1	2	3	1	2
2	3	1	2	3

圖(五)



圖(六)

接下來為了要求出 $KM(n,m)$ 是否有解，我們必須先計算出 $n \times n$ 的方陣中 a、b、c為多少，再扣掉四個角落及中間空格處的編碼總數，如圖(七)，灰色處為要被扣掉的部分。



圖(七)

(一) 計算 $n \times n$ 的正方形方陣中 a、b、c 的值（n 為奇數）

我們接著透過計算求 $n \times n$ 的正方形方陣中 a、b、c的值($n \in N, n \geq 5$)，因為初始空格在正中央，所以 n 為奇數，經由觀察，我們可以發現每一斜排編碼的數量為一數列：

$$1,2,3, \dots n-1, n, n-1, \dots ,2,1$$

且此數列的第一項編號為 1 的數量，第二項編號為 2 的數量，第三項編號為 3 的數量，第四項編號為 1 的數量，第五項編號為 2 的數量，第六項編號為 3 的數量，三個項一循環。為計算方便，我們將奇數分成 $6k+1$、$6k+3$、$6k+5$ 三種情況討論：

1. 當$n = 6k + 1$時，舉例：

$n = 7$時：　　$a = 1 + 4 + 7 + 4 + 1$

$b = 2 + 5 + 6 + 3$

$c = 3 + 6 + 5 + 2$

$n = 13$時：　　$a = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 10 + 7 + 4 + 1$

$b = 2 + 5 + 8 + 11 + 12 + 9 + 6 + 3$

$c = 3 + 6 + 9 + 12 + 11 + 8 + 5 + 2$

$n = 19$時：　　$a = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 16 + 13 + 10 + 7 + 4 + 1$

$b = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 18 + 15 + 12 + 9 + 6 + 3$

$c = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 17 + 14 + 11 + 8 + 5 + 2$

觀察發現$a = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + n - 3 + n + n - 3 + \cdots + 10 + 7 + 4 + 1$，且 b 的前 $2k$ 項恰好是 a 的前 $2k$ 項每項各加 1，後 $2k + 1$ 項則恰好是 a 的後 $2k + 1$ 項每項各減 1。c 的前 $2k$ 項恰好是 a 的前 $2k$ 項每項各加 2，後 $2k + 1$ 項則恰好是 a 的後 $2k + 1$ 項每項各減 2，不過比較特別的是， c 的最後一項不是減 2，而是減 1。因此我們用等差級數公式求出

$$a = 2 \times \frac{(2k + 1)[2 \times 1 + 3(2k + 1 - 1)]}{2} - (6k + 1) = 12k^2 + 4k + 1$$

$$b = a + [2k - (2k + 1)] = a - 1 = 12k^2 + 4k$$

$$c = a + 2(2k) - 2(2k + 1) + 1 = a - 1 = 12k^2 + 4k$$

2. 當 $n = 6k + 3$時，$n = 3(2k + 1)$，因此每行 1、2、3 的個數皆會等於 $2k + 1$，由此可推斷出 a、b、c 都會等於 $3(2k + 1)^2$。舉例來說，當 $n = 15$ 時，每行的1、2、3 皆有 5 個，共 15 行，則以 $k = 2$ 代入 $3(2k + 1)^2$ 可得 $3(2k + 1)^2 = 3 \times 5^2 = 75$，因此 a、b、c 的值皆為 75，而將數列列出來計算後，結果一樣是75。

$$a = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 14 + 11 + 8 + 5 + 2 = 75$$

$$b = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 13 + 10 + 7 + 4 + 1 = 75$$

$$c = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 12 + 9 + 6 + 3 = 75$$

3. 當 $n = 6k + 5$ 時，舉例：

$n = 5$時： $a = 1 + 4 + 3$

$b = 2 + 5 + 2$

$c = 3 + 4 + 1$

$n = 11$時： $a = 1 + 4 + 7 + 10 + 9 + 6 + 3$

$b = 2 + 5 + 8 + 11 + 8 + 5 + 2$

$c = 3 + 6 + 9 + 10 + 7 + 4 + 1$

$n = 17$時： $a = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 15 + 12 + 9 + 6 + 3$

$b = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 14 + 11 + 8 + 5 + 2$

$c = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 16 + 13 + 10 + 7 + 4 + 1$

所以這串數列共有 $2n - 1$ 個數字，平均分給 1、2、3，那麼數字各有：

$$\frac{2n-1}{3} = \frac{2(6k+5)-1}{3} = 4k + 3$$

個數字，前 $2k + 2$ 項為公差為 3，首項為 1 的等差級數，後 $2k + 1$ 項則為公差為 3，首項為 3 的等差級數。而接下來我們發現 b 的前 $2k + 2$ 項恰好是 a 的前 $2k + 2$ 項每項各加 1，後 $2k + 1$ 項則恰好是 a 的後 $2k + 1$ 項每項各減 1，而 c 的前 $2k + 2$ 項恰好是 a 的前 $2k + 2$ 項每項各加 2，後 $2k + 1$ 項則恰好是 a 的後 $2k + 1$ 項每項各減 2。由上面的結果可得知：

$$a = \frac{(2k+2)[2\cdot 1 + 3(2k+2-1)]}{2} + \frac{(2k+1)[2\cdot 3 + 3(2k+1-1)]}{2}$$

$$= 12k^2 + 20k + 8$$

$$b = 12k^2 + 20k + 8 + (2k+2) - (2k+1) = 12k^2 + 20k + 9$$

$$c = 12k^2 + 20k + 8 + 2(2k+2) - 2(2k+1) = 12k^2 + 20k + 10$$

(二) 計算 $m \times m$ 的正方形方陣中 a、b、c的值

接著，為了計算扣掉四個 $m \times m$ 的角落的值，我們同樣算出 $m \times m$ 的方陣中 a、b、c的值，而奇數的狀況可用前面 $n = m$ 代入求值，其中奇數時 m 為 $6l + 1$、$6l + 3$、$6l + 5$。我們接下來只要討論 m 為偶數的狀況就好，而為了計算方便，我們將偶數分成 $6l + 6$、$6l + 2$、$6l + 4$ 三種情況討論。

1. 當 $m = 6l + 6$ 時，$m = 3(2l + 2)$，因此每行的 1、2、3 個數皆會等於 $2l + 2$，由此可推斷出 a、b、c 都會等於 $3(2l + 2)^2$。舉個例子，當 $m = 12$ 時，a、b、c 的值為 $3(2l + 2)^2 = 3 \times 4^2 = 48$，因此 a、b、c 的值皆為 48，而列出來計算後，結果相同。

$$a = 1 + 4 + 7 + 10 + 11 + 8 + 5 + 2 = 48$$

$$b = 2 + 5 + 8 + 11 + 10 + 7 + 4 + 1 = 48$$

$$c = 3 + 6 + 9 + 12 + 9 + 6 + 3 = 48$$

2. 當$m = 6l + 2$ 時，這串數列共有 $2m - 1$ 個數字，平均分給 1、2、3，那麼編碼各有：

$$\frac{2l - 1}{3} = \frac{2(6l + 2) - 1}{3} = 4l + 1$$

$m = 8$時：

$$a = 1 + 4 + 7 + 6 + 3$$

$$b = 2 + 5 + 8 + 5 + 2$$

$$c = 3 + 6 + 7 + 4 + 1$$

$m = 14$時：

$$a = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 12 + 9 + 6 + 3$$

$$b = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 11 + 8 + 5 + 2$$

$$c = 3 + 6 + 9 + 12 + 13 + 10 + 7 + 4 + 1$$

所以這個級數共有 $4l + 1$ 個項，前 $2l + 1$ 項為公差為 3，首項為 1 的等差級數，後 $2k$ 項則為公差為 3 ，首項為 3 的等差級數。而 b 的前 $2l + 1$ 項恰好是 a 的前 $2l + 1$ 項每項各加 1 ，後 $2l$ 項則恰好是 a 的後 $2l$ 項每項各減 1。而 c 的前 $2l$ 項恰好是 a 的前 $2l$ 項每項各加 2，後 $2l$ 項則恰好是 a 的後 $2l$ 項每項各減 2，因此可得：

$$a = \frac{(2l + 1)[2 \times 1 + 3(2l + 1 - 1)]}{2} + \frac{(2l)[2 \times 3 + 3(2l - 1)]}{2} = 12l^2 + 8l + 1$$

$$b = a + (2l + 1) - 2l = a + 1 = 12l^2 + 8l + 2$$

$$c = a + 2(2l) - 2(2l) = a = 12l^2 + 8l + 1$$

3. 當 $m=6l+4$ 時，這串數列共有 $2m-1$ 個數字，平均分給 1、2、3：

$$\frac{2m-1}{3}=\frac{2(6l+4)-1}{3}=(4l+2)+\frac{1}{3}$$

$m=10$時：

$$a=1+4+7+10+7+4+1=34$$

$$b=2+5+8+9+6+3+0=33$$

$$c=3+6+9+8+5+2+0=33$$

$m=16$時：

$$a=1+4+7+10+13+16+13+10+7+4+1=86$$

$$b=2+5+8+11+14+15+12+9+6+3+0=85$$

$$c=3+6+9+12+15+14+11+8+5+2+0=85$$

所以這個級數共有 $4l+2$ 個項，前 $2l+2$ 項為公差為 3 ，首項為 1 的等差級數，後 $2l+1$ 項則為公差為 3 ，首項為 3 的等差級數。而 b 的前 $2l+1$ 項恰好是 a 的前 $2l+1$ 項每項各加 1 ，後 $2l+2$ 項則恰好是 a 的後 $2l+2$ 項每項各減 1。而 c 的前 $2l$ 項恰好是 a 的前 $2l$ 項每項各加 2，後面的 $2l$ 項則恰好是 a 的後 $2l$ 項每項各減 2，不過比較特別的是，c 的最後一項不是減 2，而是減 1。因此可得：

$$a=(2l+2)[(6l+4)+1]-(6l+4)=12l^2+16l+6$$

$$b=12l^2+16l+5$$

$$c=12l^2+16l+5$$

(三) 計算 $KM(n,m)$棋盤中 a、b、c的值 $(n,m\in N,n\geq 5)$

我們在計算四個角的 a、b、c數量時，發現了一個問題，就是四個角落的 $m\times m$ 方陣不一定都是從 1 開始排列，而$n\times n$ 的棋盤中任意的 $m\times m$ 方陣都可由左上的 $m\times m$ 方陣置換編碼而來，同時也發現不管 n 多少，右上及左下的 $m\times m$ 正方形方陣會相同，如下圖（八），將左上的 3×3 方陣編碼為 1 的方格置換為 3，編碼為 2 的方格置換為 1，編碼為 3 的方格置換為 2，就會是右上和左下的的 3×3 方陣；同樣的，將左上的 3×3 方陣編碼為 1 的方格置換為 2，編碼為 2 的方格置換為 3，編碼為 3 的方格置換為 1，就會是右下的的 3×3 方陣。

m

n

1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3

圖（八）

接下來，討論置換的規則，觀察 $n\times n$ 方陣的第一列，右上 $m\times m$ 方陣的左上角數字為此列的第 $(n-m+1)$ 個，所以當 $n-m+1\equiv 0(mod\ 3)$ 則左上角數字為 3 ，$n-m+1\equiv 1(mod\ 3)$ 則左上角數字為 1 ，$n-m+1\equiv 2(mod\ 3)$ 則第一個數字為 2 。接著，觀察 $n\times n$ 方陣左上角到右下角的斜排，右下 $m\times m$ 方陣的第一個數字為此斜排的 $(n-m+1)$ 個，所以當 $n-m+1\equiv 0(mod\ 3)$ 則右下 $m\times m$ 方陣的左上角數字為 2 ，$n-m+1\equiv 1(mod\ 3)$ 則第一個數字為 1，$n-m+1\equiv 2(mod\ 3)$ 則左上角數字為 3，因此可將置換規則整理成下表(三)：

		$n=6k+1$	$n=6k+3$	$n=6k+5$
$m=3t$	右上左下	$1\rightarrow 2$、$2\rightarrow 3$ $3\rightarrow 1$	$1\rightarrow 1$、$2\rightarrow 2$ $3\rightarrow 3$	$1\rightarrow 3$、$2\rightarrow 1$ $3\rightarrow 2$
	右下	$1\rightarrow 3\ \ 2\rightarrow 1$ $3\rightarrow 2$	$1\rightarrow 1\ \ 2\rightarrow 2$ $3\rightarrow 3$	$1\rightarrow 2\ \ 2\rightarrow 3$ $3\rightarrow 1$
$m=3t+1$	右上左下	$1\rightarrow 1\ \ 2\rightarrow 2$ $3\rightarrow 3$	$1\rightarrow 3\ \ 2\rightarrow 1$ $3\rightarrow 2$	$1\rightarrow 2\ \ 2\rightarrow 3$ $3\rightarrow 1$
	右下	$1\rightarrow 1\ \ 2\rightarrow 2$ $3\rightarrow 3$	$1\rightarrow 2\ \ 2\rightarrow 3$ $3\rightarrow 1$	$1\rightarrow 3\ \ 2\rightarrow 1$ $3\rightarrow 2$
$m=3t+2$	右上左下	$1\rightarrow 3\ \ 2\rightarrow 1$ $3\rightarrow 2$	$1\rightarrow 2\ \ 2\rightarrow 3$ $3\rightarrow 1$	$1\rightarrow 1\ \ 2\rightarrow 2$ $3\rightarrow 3$
	右下	$1\rightarrow 2\ \ 2\rightarrow 3$ $3\rightarrow 1$	$1\rightarrow 3\ \ 2\rightarrow 1$ $3\rightarrow 2$	$1\rightarrow 1\ \ 2\rightarrow 2$ $3\rightarrow 3$

表（三）

我們以圖(八)為例，$KM(11,3)$，在表(三)中是$n=6k+5$、$m=3t+2$，右上及左下為$1\rightarrow 3$、$2\rightarrow 1$、$3\rightarrow 2$，就是將左上的 3×3 方陣編碼為 1 的方格置換為 3，編碼為 2 的方格置換為 1，編碼為 3 的方格置換為 2，就會是右上和左下的的 3×3 方陣；而右下為$1\rightarrow 2$、$2\rightarrow 3$、$3\rightarrow 1$，就是將左上的 3×3 方陣編碼為 1 的方格置換為 2，編碼為 2 的方格置換為 3，編碼為 3 的方格置換為 1，就會是右下的的 3×3 方陣。

接下來我們依照上述的置換規則，計算 $KM(n,m)$棋盤中 a、b、c的值，可以得到以下18種情形：

1. 當 $n=6k+1$、$m=6l+3$時

$$a=(12k^2+4k+1)-3(2l+1)^2-6(2l+1)^2-3(2l+1)^2-1$$

$$=12k^2+4k-48l^2-48l-12$$

$$b=(12k^2+4k)-3(2l+1)^2-6(2l+1)^2-3(2l+1)^2$$

$$=2k^2+4k-48l^2-48l-12$$

$c = (12k^2 + 4k) - 3(2l + 1)^2 - 6(2l + 1)^2 - 3(2l + 1)^2$

$= 12k^2 + 4k - 48l^2 - 48l - 12$

2. 當 $n = 6k + 1$、$m = 6l + 6$ 時

$a = (12k^2 + 4k + 1) - 3(2l + 2)^2 - 6(2l + 2)^2 - 3(2l + 2)^2$

$= 12k^2 + 4k - 48l^2 - 96l - 48$

$b = (12k^2 + 4k) - 3(2l + 2)^2 - 6(2l + 2)^2 - 3(2l + 2)^2$

$= 12k^2 + 4k - 48l^2 - 96l - 48$

$c = (12k^2 + 4k) - 3(2l + 2)^2 - 6(2l + 2)^2 - 3(2l + 2)^2$

$= 12k^2 + 4k - 48l^2 - 96l - 48$

3. 當$n = 6k + 1$、$m = 6l + 1$ 時

$a = (12k^2 + 4k + 1) - (12l^2 + 4l + 1) - 2(12l^2 + 4l + 1) - (12l^2 + 4l + 1)$

$- 1 = 12k^2 + 4k - 48l^2 - 16l - 4$

$b = (12k^2 + 4k) - (12l^2 + 4l) - 2(12l^2 + 4l) - (12l^2 + 4l)$

$= 12k^2 + 4k - 48l^2 - 16l$

$c = (12k^2 + 4k) - (12l^2 + 4l) - 2(12l^2 + 4l) - (12l^2 + 4l)$

$= 12k^2 + 4k - 48l^2 - 16l$

4. 當$n = 6k + 1$、$m = 6l + 4$ 時

$a = 12k^2 + 4k + 1 - (12l^2 + 16l + 6) - 2(12l^2 + 16l + 6)$

$-(12l^2 + 16l + 6) - 1 = 12k^2 + 4k - 48l^2 - 64l - 24$

$b = (12k^2 + 4k) - (12l^2 + 16l + 5) - 2(12l^2 + 16l + 5) - (12l^2 + 16l + 5)$

$= 12k^2 + 4k - 48l^2 - 64l - 20$

$c = (12k^2 + 4k) - (12l^2 + 16l + 5) - 2(12l^2 + 16l + 5) - (12l^2 + 16l + 5)$

$= 12k^2 + 4k - 48l^2 - 64l - 20$

5. 當$n = 6k + 1$、$m = 6l + 2$ 時

$a = (12k^2 + 4k + 1) - (12l^2 + 8l + 1) - 2(12l^2 + 8l + 2) - (12l^2 + 8l + 1)$

$-1 = 12k^2 + 4k - 48l^2 - 32l - 6$

$b = (12k^2 + 4k) - (12l^2 + 8l + 2) - 2(12l^2 + 8l + 1) - (12l^2 + 8l + 1)$

$= 12k^2 + 4k - 48l^2 - 32l - 5$

$c = (12k^2 + 4k) - (12l^2 + 8l + 1) - 2(12l^2 + 8l + 1) - (12l^2 + 8l + 2)$

$= 12k^2 + 4k - 48l2 - 32l - 5$

6. 當$n = 6k + 1$、$m = 6l + 5$時

$a = 12k^2 + 4k + 1 - 12l^2 - 20l - 8 - 2(12l^2 + 20l + 9)$

$- (12l^2 + 20l + 10\ ) - 1$

$= 12k^2 + 4k - 48l^2 - 80l - 36$

$b = (12k^2 + 4k) - (12l^2 + 20l + 9) - 2(12l^2 + 20l + 10)$

$- (12l^2 + 20l + 8)$

$= 12k^2 + 4k - 48l^2 - 80l - 37$

$c = (12k^2 + 4k) - (12l^2 + 20l + 10\ ) - 2(12l^2 + 20l + 8)$

$- (12l^2 + 20l + 9)$

$= 12k^2 + 4k - 48l^2 - 80l - 35$

7. 當$n = 6k + 3$、$m = 6l + 3$時

$a = 12k^2 + 12k + 3 - 4 \times 3(2l + 1)^2 = 12k^2 + 12k - 48l^2 - 48l - 9$

$b = 12k^2 + 12k + 3 - 4 \times 3(2l + 1)^2 = 12k^2 + 12k - 48l^2 - 48l - 9$

$c = 12k^2 + 12k + 3 - 4 \times 3(2l + 1)^2 - 1 = 12k^2 + 12k - 48l^2 - 48l - 10$

8. 當$n = 6k + 3$、$m = 6l + 6$時

$a = 12k^2 + 12k + 3 - 4 \times 3(2l + 2)^2 = 12k^2 + 12k - 48l^2 - 96l - 45$

$b = 12k^2 + 12k + 3 - 4 \times 3(2l + 2)^2 = 12k^2 + 12k - 48l^2 - 96l - 45$

$c = 12k^2 + 12k + 3 - 4 \times 3(2l + 2)^2 - 1 = 12k^2 + 12k - 48l^2 - 96l - 46$

9. 當$n = 6k + 3$、$m = 6l + 1$時

$a = 12k^2 + 12k + 3 - (12l^2 + 4l + 1) - 2(12l^2 + 4l) - (12l^2 + 4l)$

$= 12k + 12k - 36l^2 - 4l + 2$

$b = 12k^2 + 12k + 3 - (12l^2 + 4l) - 2(12l^2 + 4l) - (12l^2 + 4l + 1)$

$= 12k + 12k - 36l^2 - 4l + 2$

$c = 12k^2 + 12k + 3 - (12l^2 + 4l) - 2(12l^2 + 4l + 1) - (12l^2 + 4l) - 1$

$= 12k + 12k - 36l^2 - 4l + 2$

10. 當$n = 6k + 3$、$m = 6l + 4$時

$a = 12k^2 + 12k + 3 - (12l^2 + 16l + 6) - 2(12l^2 + 16l + 5)$

$-(12l^2 + 16l + 5) = 12k^2 + 12k - 48l^2 - 64l - 18$

$b = 12k^2 + 12k + 3 - (12l^2 + 16l + 5) - 2(12l^2 + 16l + 5)$

$-(12l^2 + 16l + 6) = 12k^2 + 12k - 48l^2 - 64l - 18$

$c = 12k^2 + 12k + 3 - 12l^2 - 16l - 5 - 2(12l^2 + 16l + 6)$

$-(12l^2 + 16l + 5) - 1 = 12k^2 + 12k - 48l^2 - 64l - 18$

11. 當$n = 6k + 3$、$m = 6l + 2$時

$a = 12k^2 + 12k + 3 - 12l^2 - 8l - 1 - 24l^2 - 16l - 4 - 12l^2 - 8l - 1$

$= 12k^2 + 12k - 48l^2 - 32l - 3$

$b = 12k^2 + 12k + 3 - 12l^2 - 8l - 2 - 24l^2 - 16l - 2 - 12l^2 - 8l - 1$

$= 12k^2 + 12k - 48l^2 - 32l - 2$

$c = 12k^2 + 12k + 3 - 12l^2 - 8l - 1 - 24l^2 - 16l - 2 - 12l^2 - 8l - 2 - 1$

$= 12k^2 + 12k - 48l^2 - 32l - 3$

12. 當$n = 6k + 3$、$m = 6l + 5$時

$a = 12k^2 + 12k + 3 - 12l^2 - 20l - 8 - 24l^2 - 40l - 16 - 12l^2 - 20l - 10$

$= 12k^2 + 12k - 48l^2 - 80l - 31$

$b = 12k^2 + 12k + 3 - 12l^2 - 20l - 8 - 24l^2 - 40l - 20 - 12l^2 - 20l - 8$

$= 12k^2 + 12k - 48l^2 - 80l - 33$

$c = 12k^2 + 12k + 3 - 12l^2 - 20l - 10 - 24l^2 - 40l - 16 - 12l^2 - 20l - 8$

$= 12k^2 + 12k - 48l^2 - 80l - 31$

13. 當$n = 6k + 5$、$m = 6l$時

$a = 2(6k^2 + 10k + 4) - 4 \times 3(2l + 2)^2 = 12k^2 + 20k - 48l^2 - 96l - 40$

$b = 2(6k^2 + 10k + 4) + 1 - 1 - 4 \times 3(2l + 2)^2$

$= 12k^2 + 20k - 48l^2 - 96l - 40$

$c=2(6k^2+10k+5)-4\times 3(2l+2)^2=12k^2+20k-48l^2-96l-38$

14. 當$n=6k+5$、$m=6l+3$時

$a=2(6k^2+10k+4)-4\times 3(2l+1)^2=12k^2+20k-48l^2-48l-4$

$b=2(6k^2+10k+4)+1-1-4\times 3(2l+1)^2$

$=12k^2+20k-48l^2-48l-4$

$c=2(6k^2+10k+5)-4\times 3(2l+1)^2=12k^2+20k-48l^2-48l-2$

15. 當$n=6k+5$、$m=6l+1$時

$a=2(6k^2+10k+4)-[2(6l^2+2l)+1]-2\times 2(6l^2+2l)-2(6l^2+2l)$

$=12k^2+20k-48l^2-16l+7$

$b=2(6k^2+10k+4)+1-1-2(6l^2+2l)-2\times 2(6l^2+2l)$

$-[2(6l^2+2l)+1]=12k^2+20k-48l^2-16l+7$

$c=2(6k^2+10k+5)-2(6l^2+2l)-2\times[2(6l^2+2l)+1]-2(6l^2+2l)$

$=12k^2+20k-48l^2-16l+8$

16. 當$n=6k+5$、$m=6l+4$時

$a=2(6k^2+10k+4)-2(6l^2+8l+3)-2[2(6l^2+8l)+5]$

$-[2(6l^2+8l)+5]=12k^2+20k-48l^2-64l-13$

$b=2(6k^2+10k+4)+1-1-[2(6l^2+8l)+5]-2[2(6l^2+8l)+5]$

$-2(6l^2+8l+3)=12k^2+20k-48l^2-64l-13$

$c=2(6k^2+10k+5)-[2(6l^2+8l)+5]-2\times 2(6l^2+8l+3)$

$-[2(6l^2+8l)+5]=12k^2+20k-48l^2-64l-12$

17. 當$n=6k+5$、$m=6l+2$時

$a=2(6k^2+10k+4)-4[2(6l^2+4l)+1]=12k^2+20k-48l^2-32l+4$

$b=2(6k^2+10k+4)+1-1-4\times 2(6l^2+4l+1)$

$=12k^2+20k-48l^2-32l+4$

$c=2(6k^2+10k+5)-4[2(6l^2+4l)+1]=12k^2+20k-48l^2-32l+4$

18. 當$n=6k+5$、$m=6l+5$時:

$$a=2(6k^2+10k+4)-4\times 2(6l^2+10l+4)$$

$$=12k^2+20k-48l^2-80l-24$$

$$b=2(6k^2+10k+4)+1-1-4[2(6l^2+10l+4)+1]$$

$$=12k^2+20k-48l^2-80l-28$$

$$c=2(6k^2+10k+5)-4\times 2(6l^2+10l+5)$$

$$=12k^2+20k-48l^2-80l-30$$

透過初步計算，我們將 18 種情況將數對 (a,b,c) 的奇偶情形整理成表(四)：

	$n=6k+1$	$n=6k+3$	$n=6k+5$
$m=3t$	（偶,偶,偶）	（奇,奇,偶）	（偶,偶,偶）
$m=3t+1$	（偶,偶,偶）	（偶,偶,偶）	（奇,偶,奇）
$m=3t+2$	（偶,奇,奇）	（偶,偶,偶）	（偶,偶,偶）

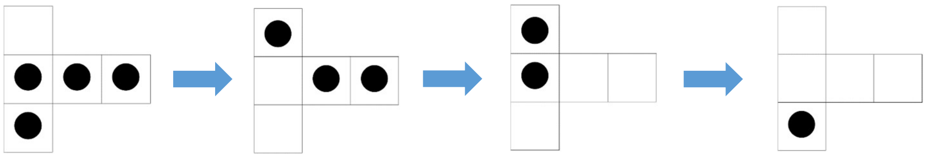
結合前面所提到的：a、b、c 的差必為兩奇一偶才可能有解，可得知，當 $n=6k+1,m=3t+2$、$n=6k+3,m=3t$、$n=6k+5,m=3t+1$時三種情形時，$KM(n,m)$可能有解，其餘皆無解。而我們也發現$KM(2m+3,m)$的棋盤在理論上都有解，且標準孔明棋$KM(7,2)$即為其中之一，於是我們想討論$KM(2m+3,m)$ 棋盤是否皆有解。

伍、討論

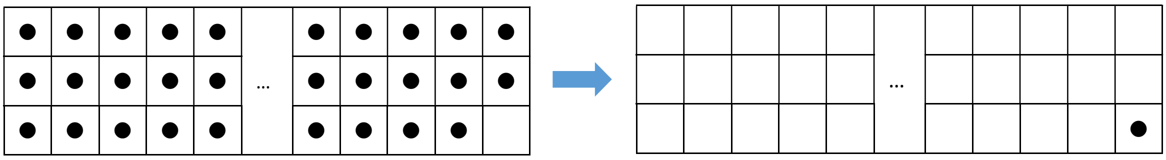
我們已經解出了可能有解的情形，接下來就要討論如何移動了。首先要先了解孔明其中的一些公式：

一、孔明棋公式

(一) 新北市 104 年科展研究[4]中，消三子公式：

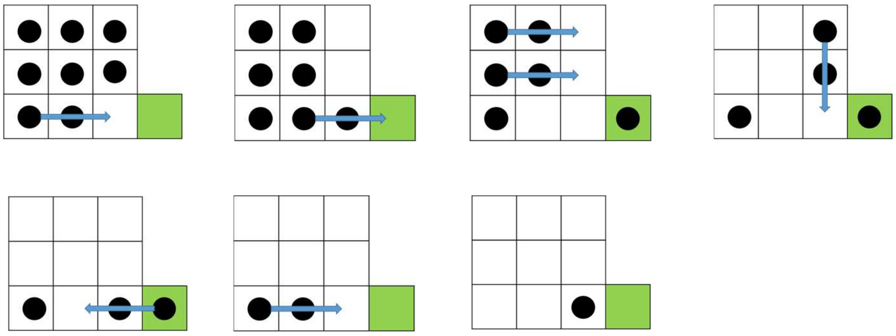


(二) 新竹市 41 屆科展研究[5]中，解決$3\times d$棋盤空兩子消至剩兩子（$d\geq 4$ 且 $d\neq 5$）：

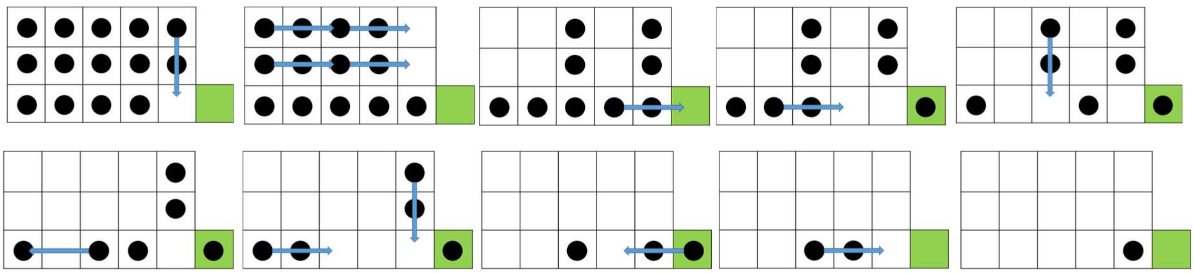


因為我們要研究的內容需要消去$3\times d$的長方形（$d\geq 3$），但參考的文獻中 3 × 3 和 3 × 5 這兩種無解，所以我們在初始空格旁多加了一格（圖中綠色部分為增加的格子），來使這兩種情況有解。

(三) 消3×3公式：



(四) 消3×5公式：

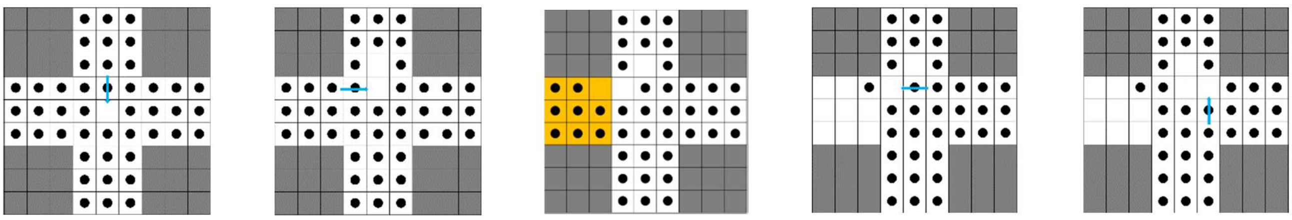


二、接下來我們利用上述$3\times d(d\geq 3)$ 的消法處理 $KM(2m+3,m)$ 的解法，我們希望利用$3\times d$的公式，將$KM(2m+3,m)$ 的棋盤分區塊消除，並讓棋子盡量向中間靠攏，解法的動作程序如下：

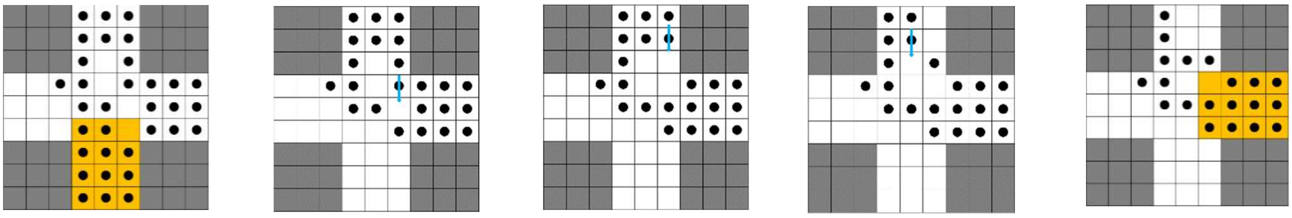
(一) $KM(7,2)$

由於$KM(7,2)$是孔明棋的標準棋盤，確定有解，本研究就不再討論。

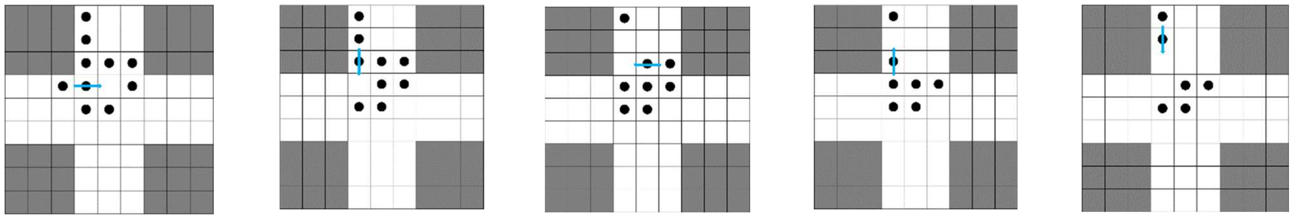
(二) $KM(9,3)$

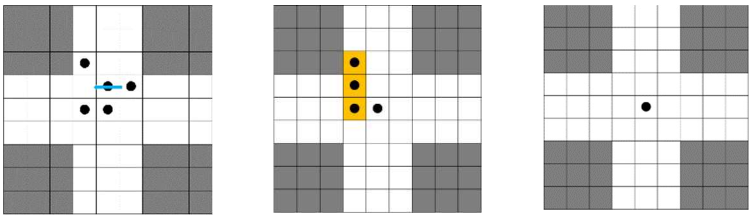


初始棋盤　　將3×3消至一子



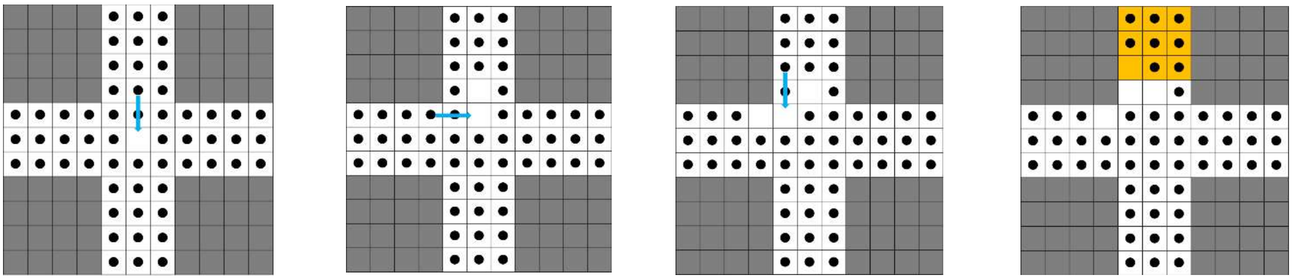
將$3\times d$消至一子　　將$3\times d$消至一子



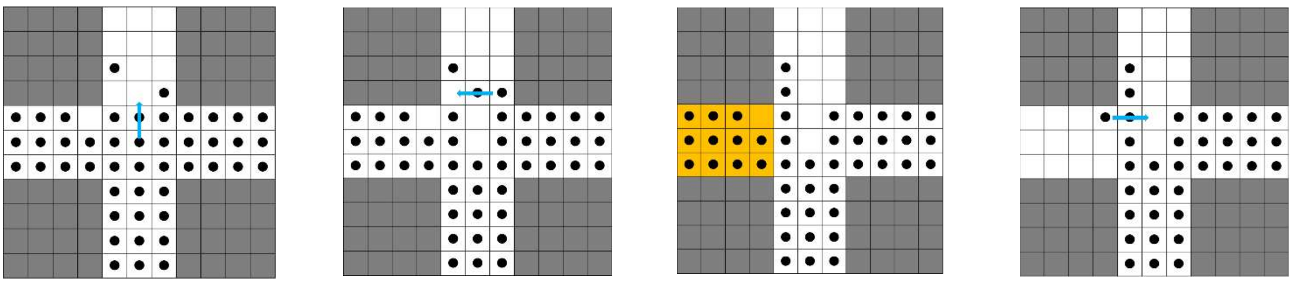


消三子公式　　完成

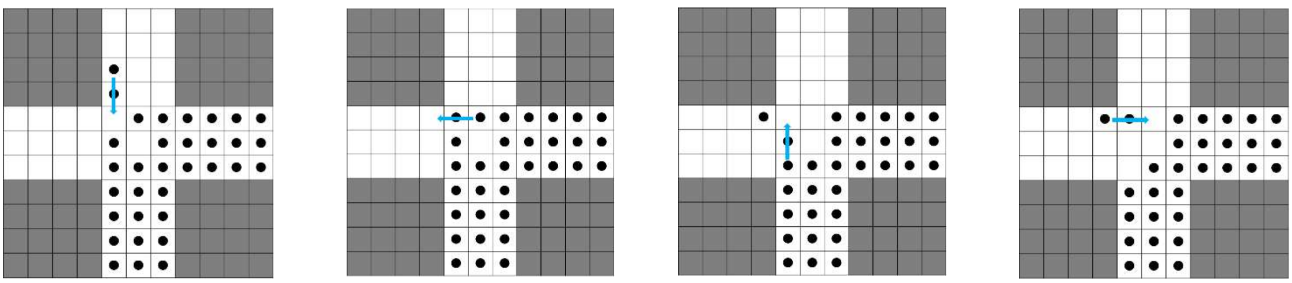
(三) $KM(11,4)$

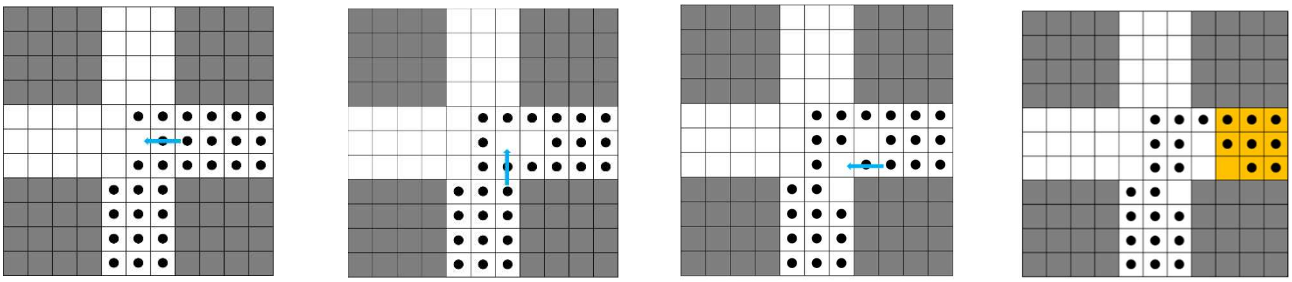


初始棋盤　　將3×3消至一子

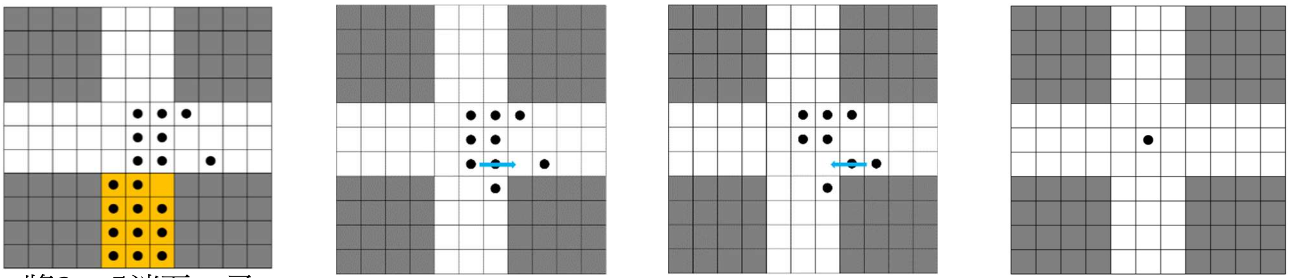


將$3\times d$消至一子

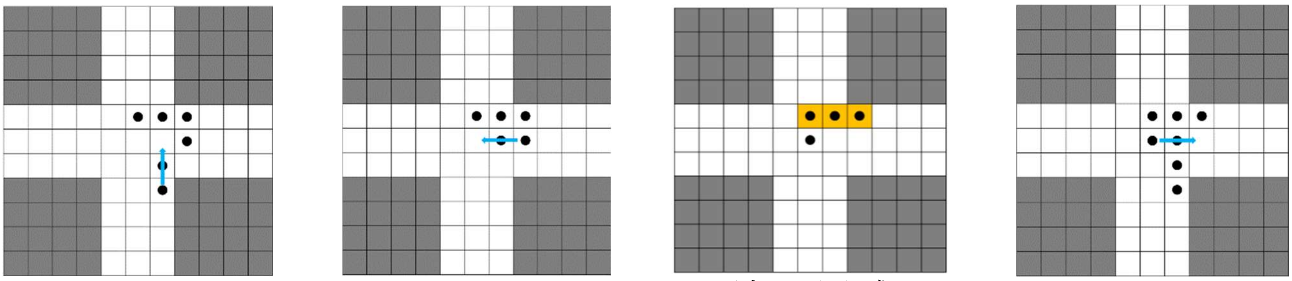




將3×3消至一子



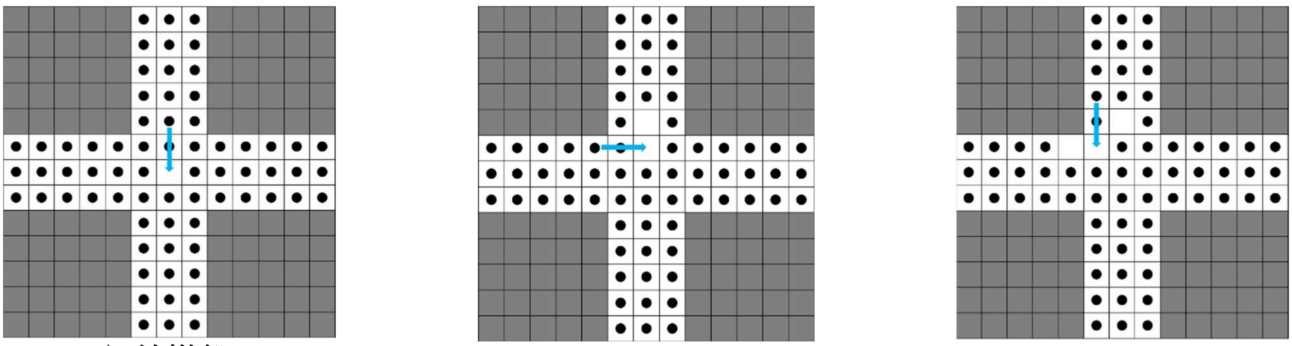
將3×5消至一子



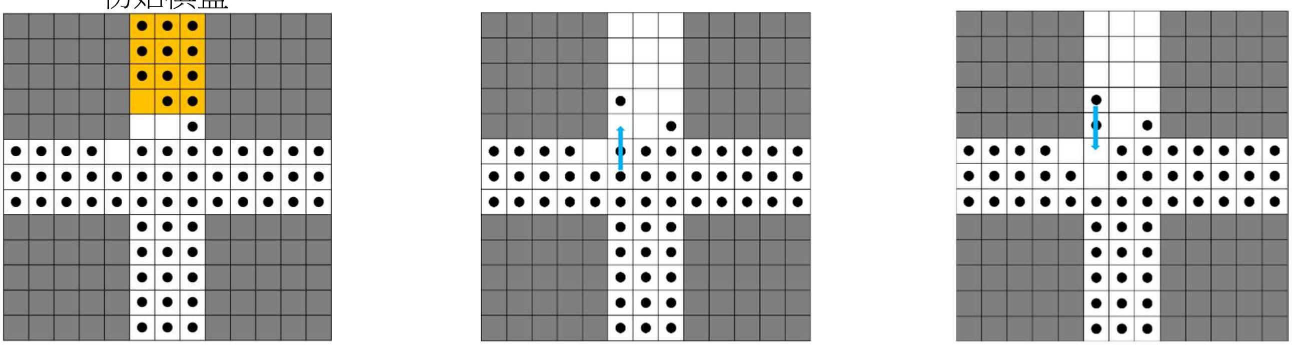
消三子公式　完成

$KM(13,5)$、$KM(15,6)$、$KM(2m+3,m), m \geq 7$ 其移動方式基本雷同，公式的使用也大致相同。

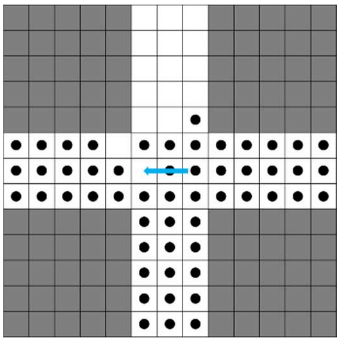
(四) $KM(13,5)$

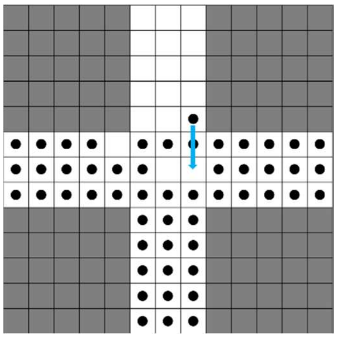


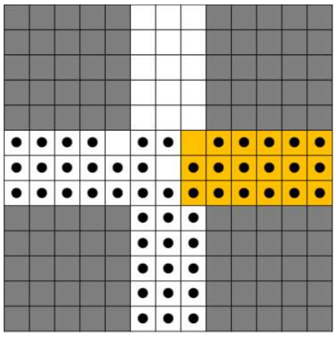
初始棋盤



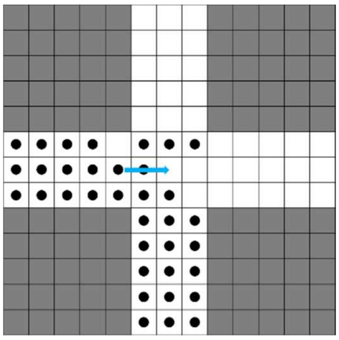
將$3 \times d$消至一子

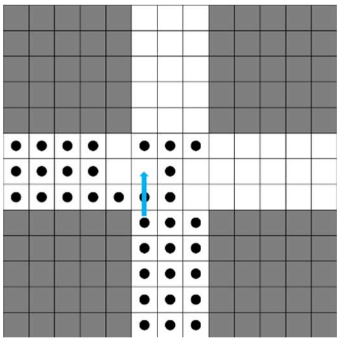


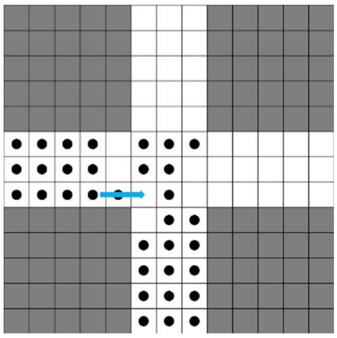


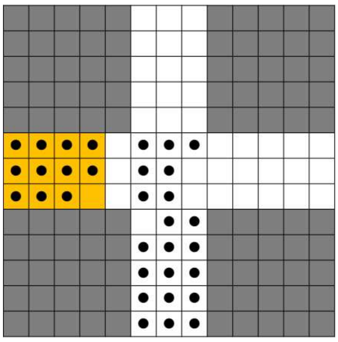


將$3\times d$消至一子

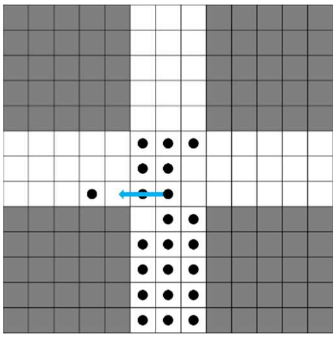


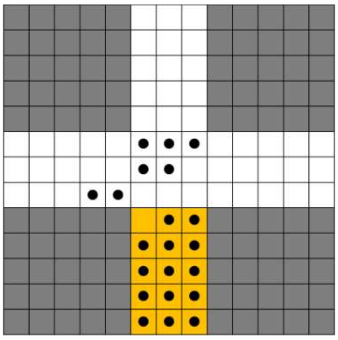




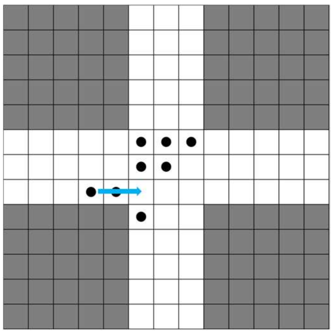


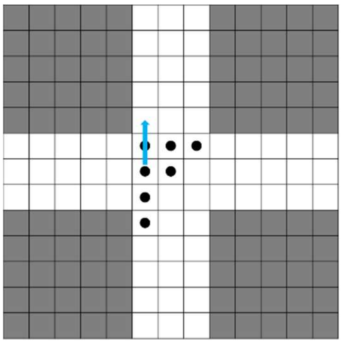
將$3\times d$消至一子

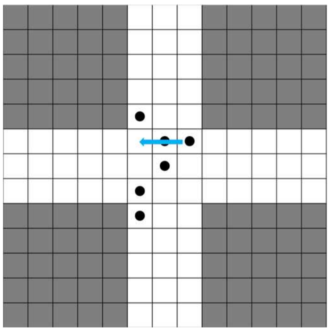


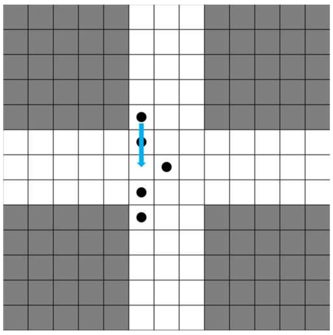


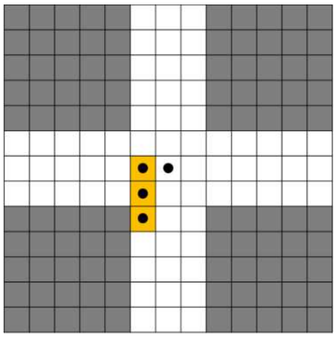
將3×5消至一子



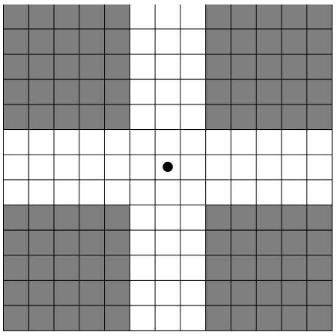






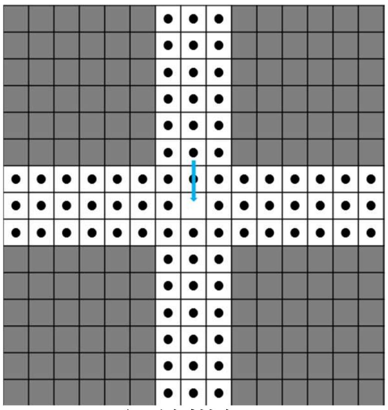


消三子公式

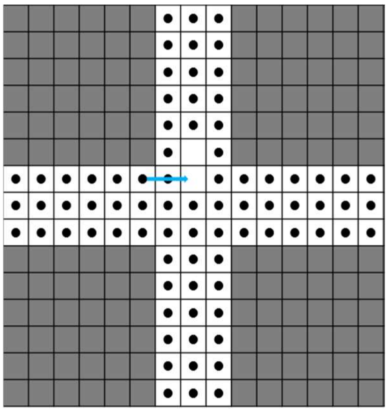


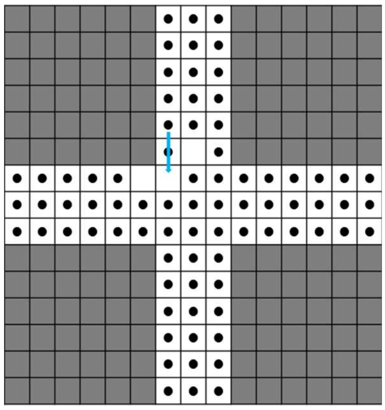
完成

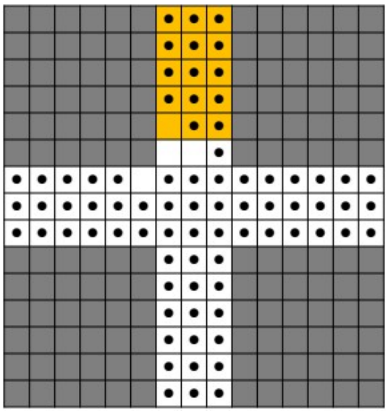
(五) $KM(15,6)$



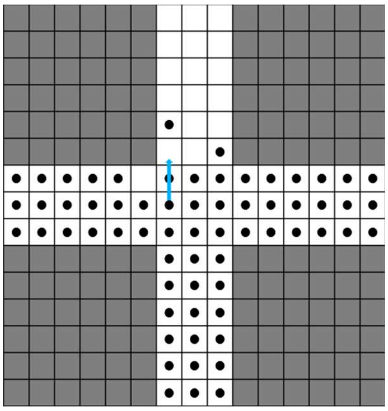
初始棋盤

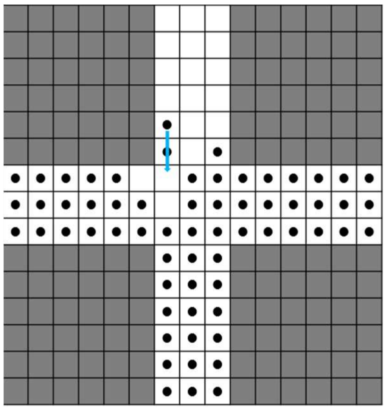


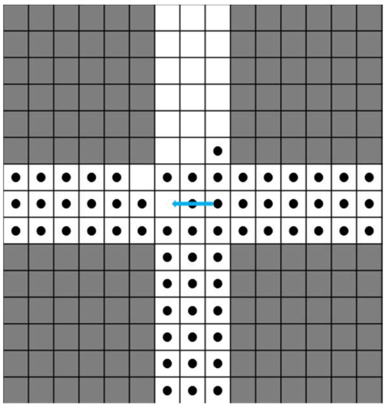


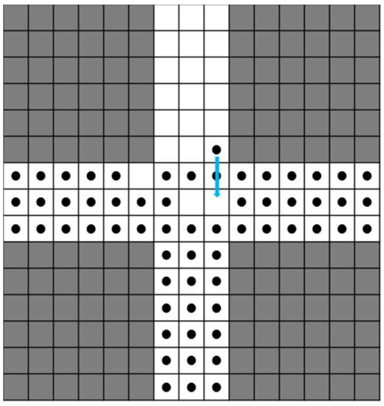


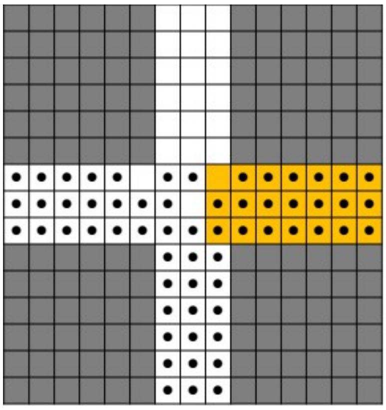
將3×5消至一子



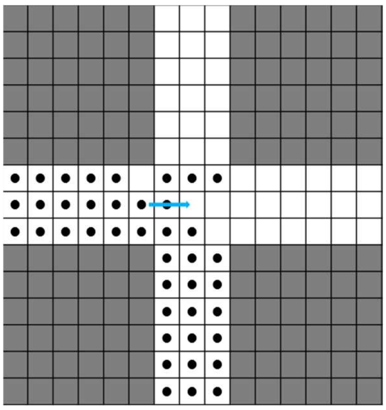


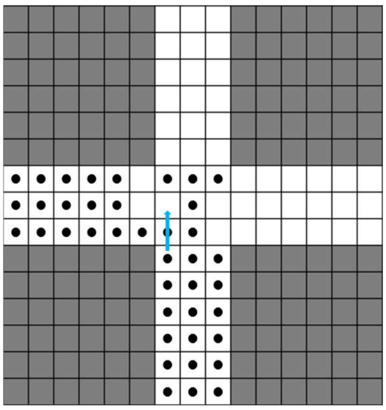


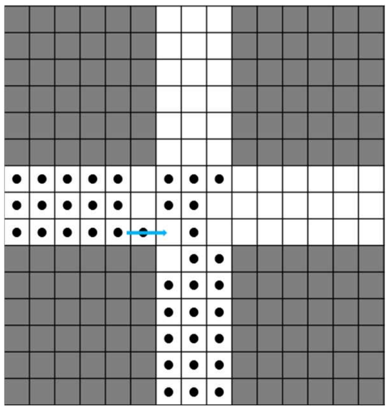


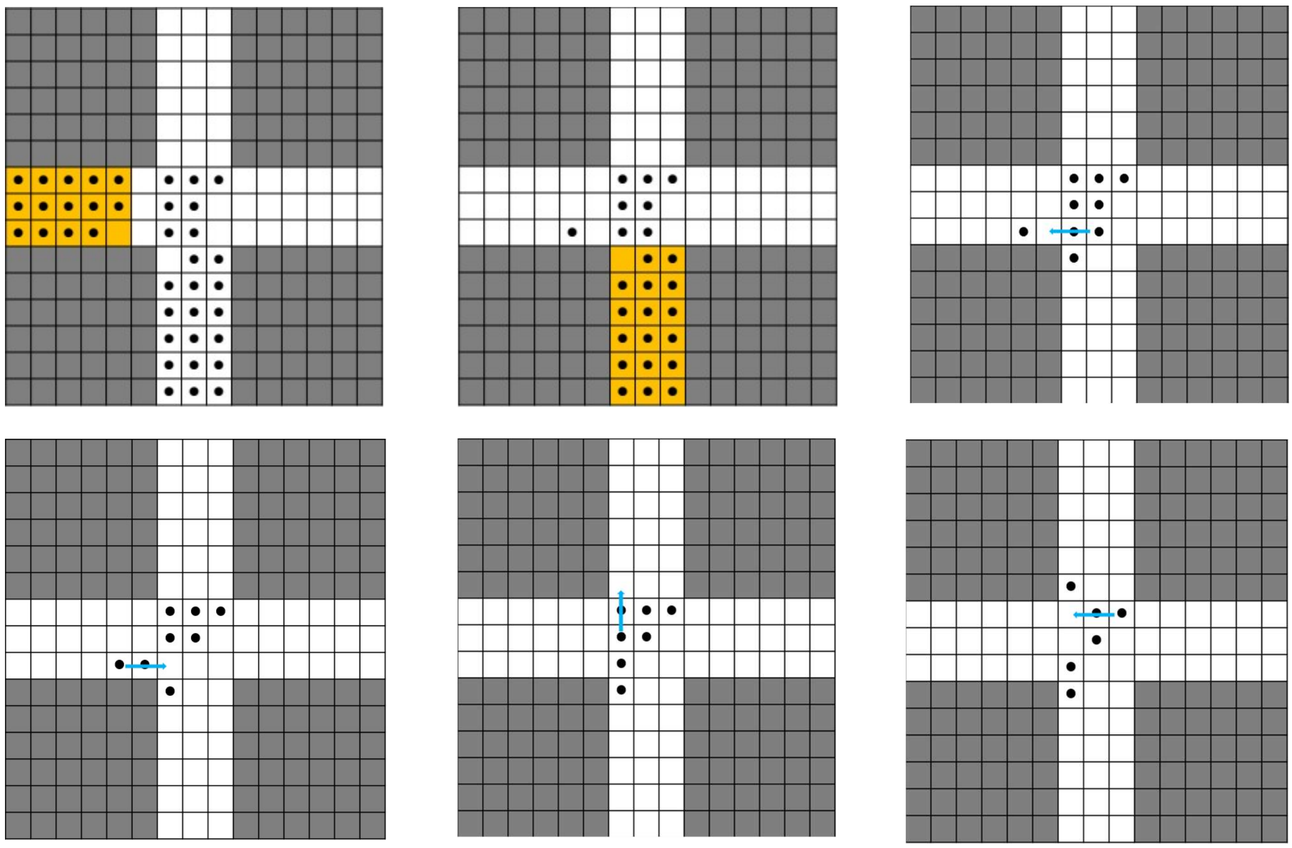


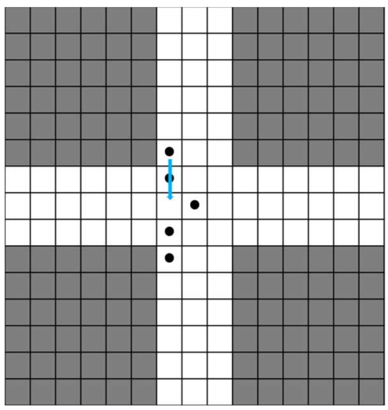
將$3\times d$消至一子

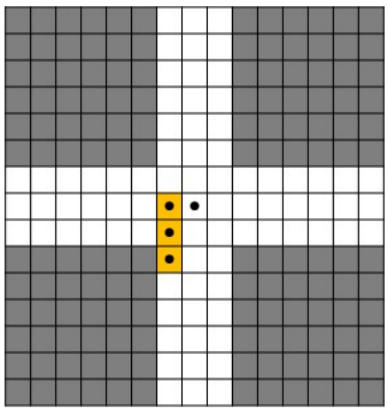




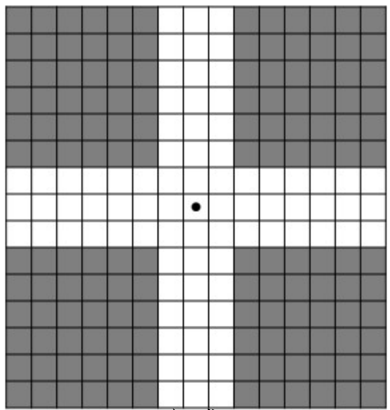






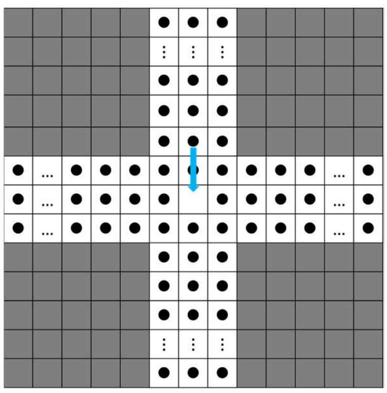


消三子公式

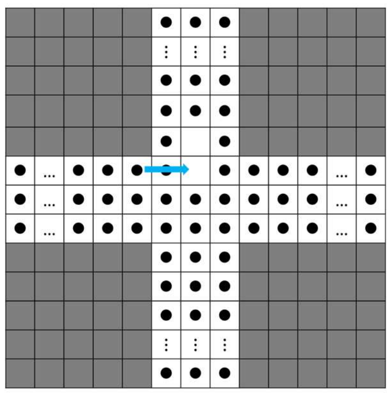


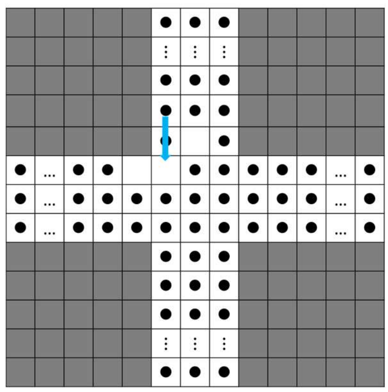
完成

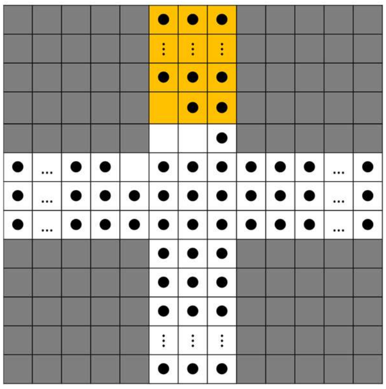
(六) $KM(2m+3,m), m \geq 7$



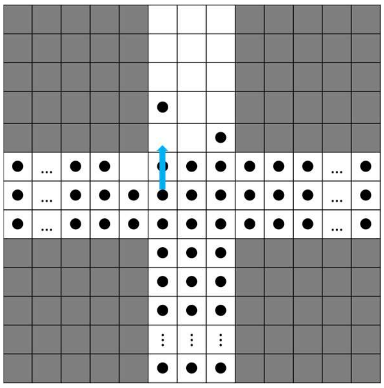
初始棋盤

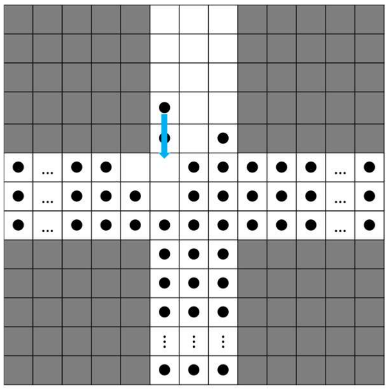


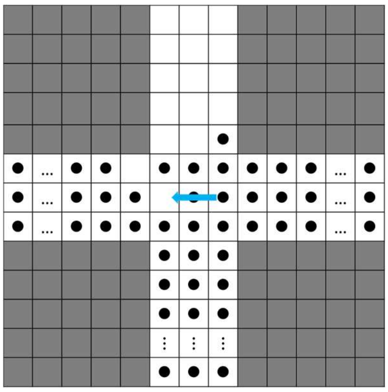


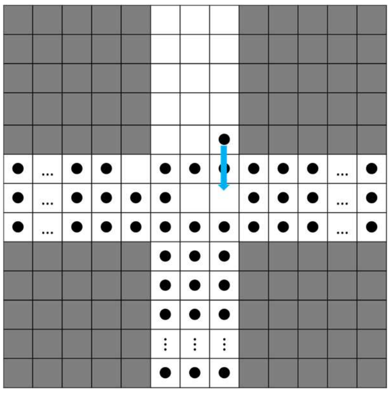


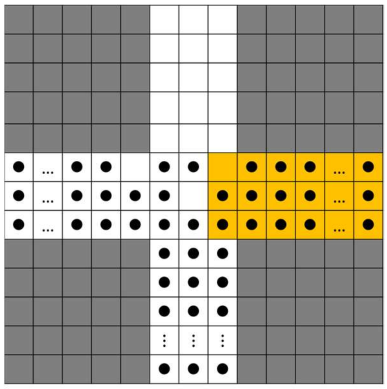
將$3 \times d$消至一子



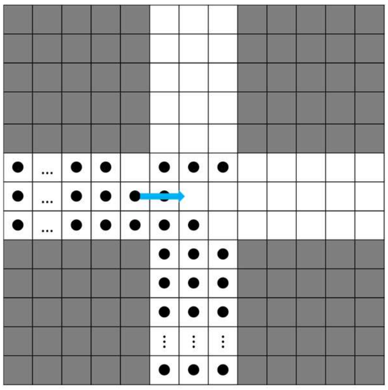


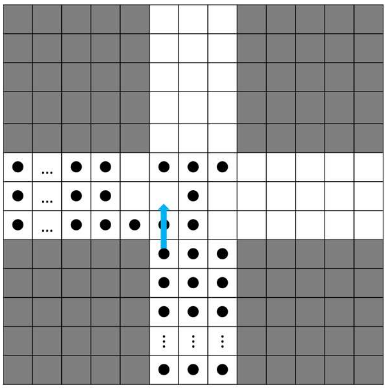


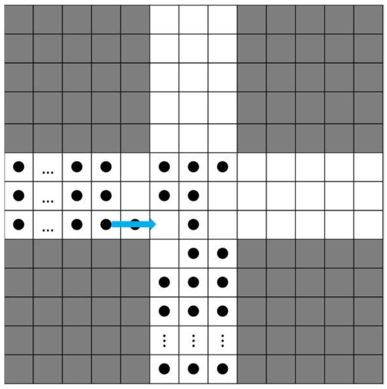


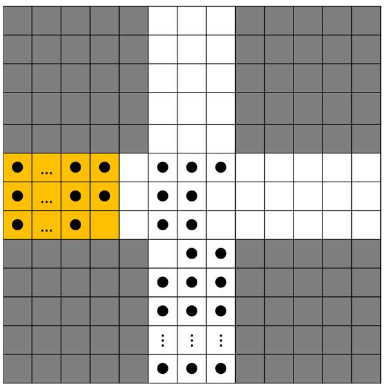


將$3 \times d$消至一子

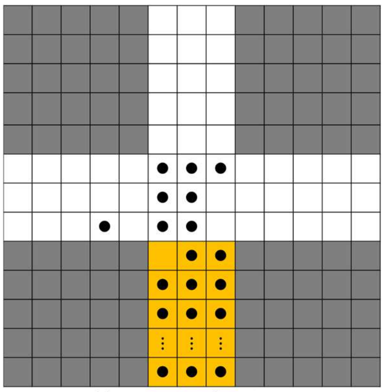




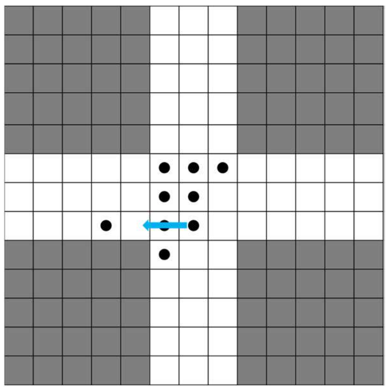


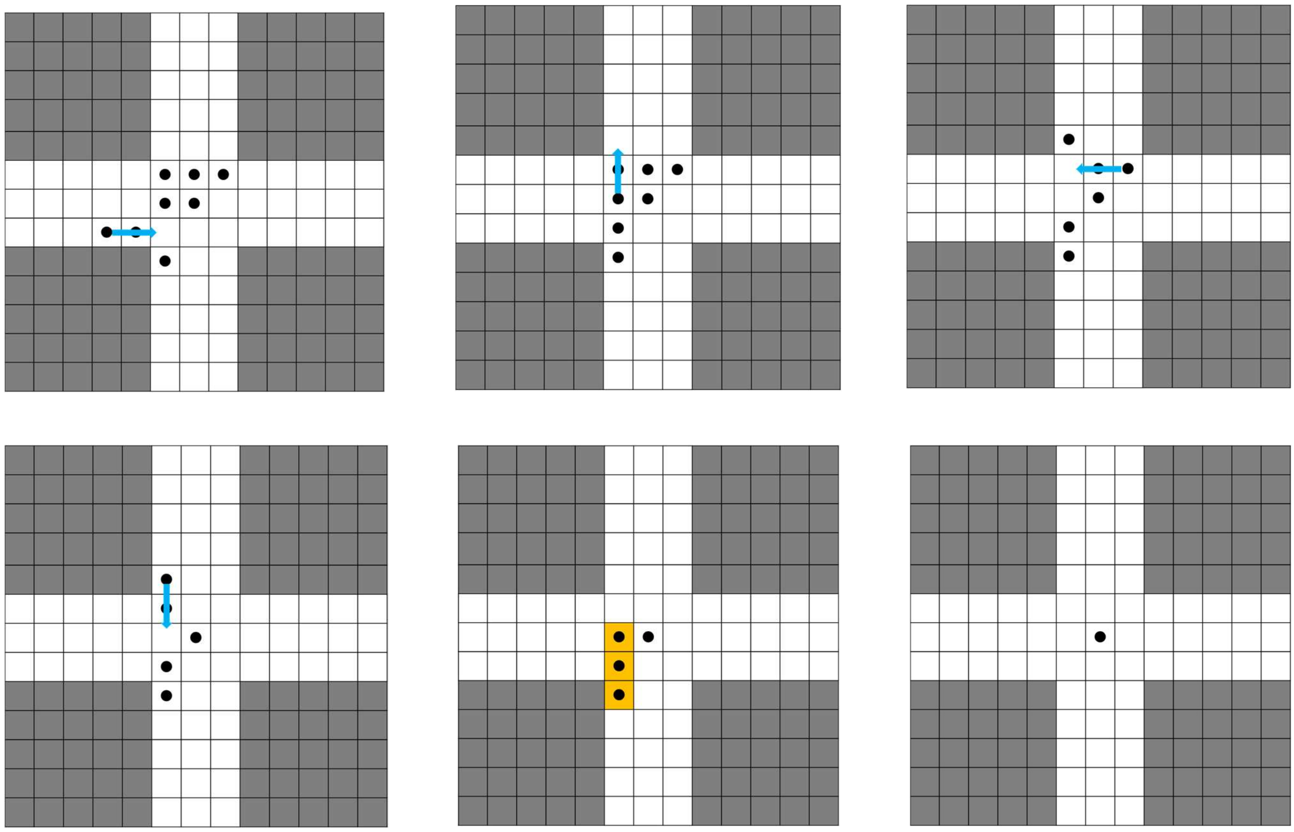


將$3 \times d$消至一子



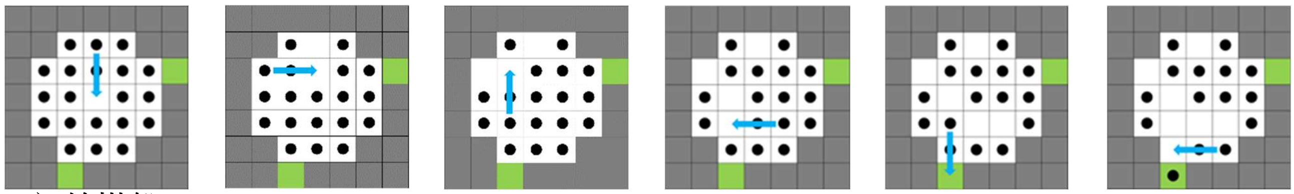
將$3 \times d$消至一子



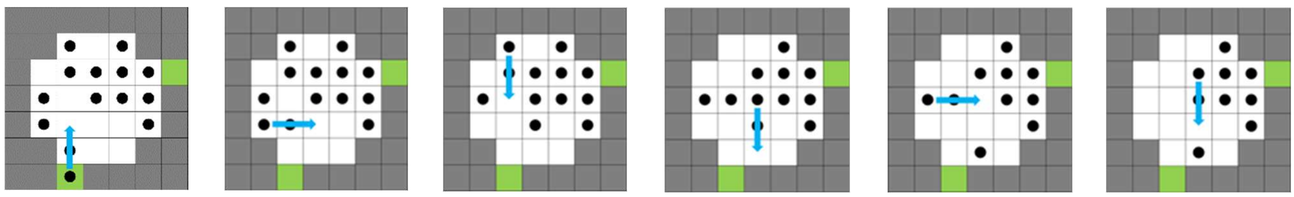


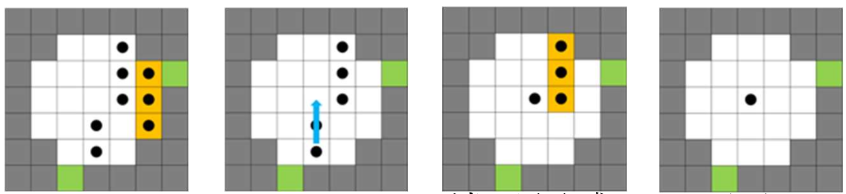
消三子公式　完成

(七) 我們發現 $KM(5,1)$ 的棋盤雖無解，但在多加兩格的狀況下仍可有解，以下是移動的過程（圖中綠色部分為增加的格子）。



初始棋盤





消三子公式　消三子公式　完成

陸、結論

一、$KM(n,m)$的棋盤，在 $n=6k+1, m=3t+2$、$n=6k+3, m=3t$、

$n=6k+5, m=3t+1$ $(k,t \geq 0, k,t \in N)$ 三種情形時可能有解，其餘皆無解。

二、3×3 和 3×5 棋盤角落空一子，在多加一格的條件下有解。

三、$KM(2m+3,m)$ 的棋盤有解（$m \geq 2$）。

四、$KM(5,1)$的棋盤無解，但多加兩格的條件下有解。

柒、未來研究

本研究受限於時間關係，目前只找出 $KM(2m+3,m)$ 的棋盤有解，因此未來如果還有機會，我們會試著找出其他情況是否有解，也就是討論至$KM(2m+s,m)$ 的棋盤（s為正奇數），找出其有解的移法公式。

捌、心得

做科展果然不是一件容易的事！做到這一步再回頭看時，居然已經過了將近半年了，這半年來我壓力其實有點大，除了科展還有段考、數學競試以及其他比賽，不過我還是保有熱忱並且持續製作科展，並從中學到了如何透過現在自己所擁有的數學知識，去解決我們遇到的問題。例如當我們要找出計算$n \times n$方陣的1,2,3值時，就利用等差級數的概念將其解出。正因為有這些努力，我們才拿到了進入市賽的門票。

在算出判斷是否可能有解的公式後，我覺得很有成就感，因為這是我第一次認真去做一個研究，雖然因為經驗不多的關係導致剛開始時常常手忙腳亂，有時候甚至不知道接下來可以怎麼進行下去，不過在經過老師的幫忙以及夥伴的合作下，這次的研究還是順利的完成了!儘管過程真的很累很辛苦，但我認為這樣的付出是值得的，而這次的經驗也會在未來幫助我繼續向前！

我們的研究終於接近尾聲了！想想我們靠著自己一點一滴研究出的這些種種，半年來的努力與付出也算是值得了。不管是從計算奇偶性、移動出有解的情形，還有修改報告、製作海報，甚至是與隊友們的團隊合作，都讓我學到很多，儘管很辛苦，但也讓我得到很多的經驗，能在未來成為我的助力，讓我能夠更上一層樓。

玖、參考文獻及來源

[1] 維基百科-
https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%AD%94%E6%98%8E%E6%A3%8B

[2] 破解孔明棋-百度文庫
https://wenku.baidu.com/view/16267c29bd64783e09122b81.html?_wkts_=169933328462

[3] 黃韻璇、何碩宸著,”三角獨子棋”,中華民國第 56 屆全國中小學科展作品,2016
https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/56/pdf/030404.pdf

[4] ”跳 k 子的矩形和立體孔明棋”, 新北市 104 年科展
https://science.ntpc.edu.tw/pro/Ctrl/OpenFileContent.ashx?id=33CXDCTTQT6R844G68BXQ3D33QQFRQTQ4HGT32QCDQ364RR3TF4HG8B3C2DC3344R3

[5] “孔明再現—孔明棋延伸玩法研究”,新竹市第 41 屆中小學科展作品,2022

[6] 陳人瑋著,”平面孔明棋與立體孔明棋之研究”, 新竹市第 38 屆中小學科展作品,2019