新竹市第 42 屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：複係數 n 次方程式之求解也可以很藝術

關 鍵 詞：牛頓法、碎形幾何、複數係數 n 次方程式

編　　號：

複係數 n 次方程式之求解也可以很藝術

摘要

一、　碎形幾何美妙圖形的意涵(吸子與邊界的美妙)，這是複數平面上點座標代表的複數當初始值以牛頓法疊代是否收斂至某一解的程度細分來繪製的美麗圖案。

這是因為找的到複數係數 5 次方程式的解，才得以製造出的自然界的圖。

$$f(z) = (3+5i)z^5 + z^3 + 2z^2 + z + 2 + 3i = 0$$

$$\sqrt{-1} = i，i^2 = -1、i^3 = -i、i^4 = 1$$

五個解為　0.8331116219404011+0.6396223505449039 i

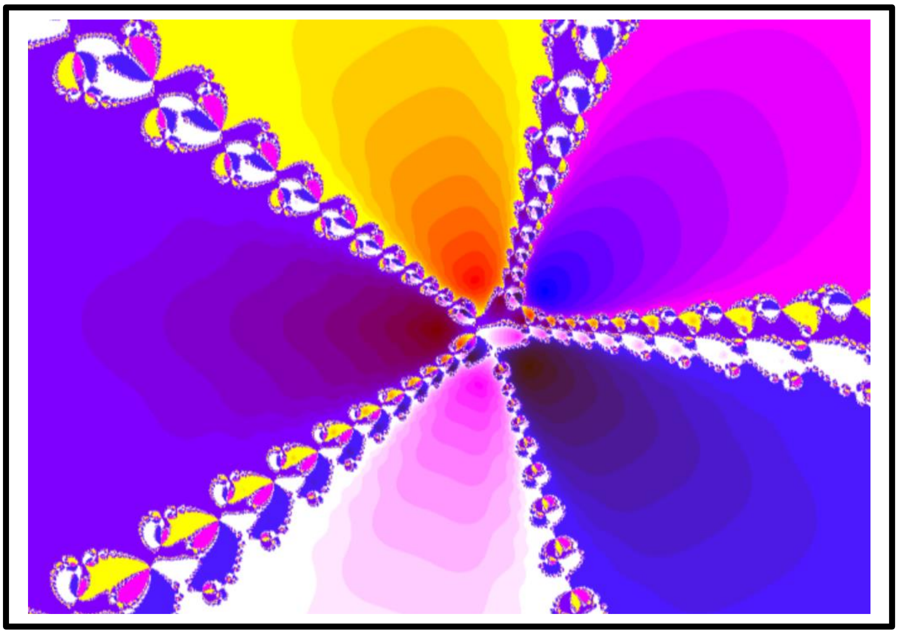
-0.2877009817976426+0.8123887629024689 i

-0.2912803627468869+0.8098070442704988 i

-0.22582487940411794-0.8725283299994171 i

0.5906331234527766-0.5832935165952742 i

運用牛頓法在二維平面(視為複數平面)上逐點當初始值經由迭代產生收斂至某一解或發散的程度(快慢)繪圖的效果畫面。



二、　思考任何複係數 n 次方程式必先完成求解才得以牛頓法配合繪圖軟體畫出難以想像及很期待的深奧圖像。若$\mathrm{f}(z)=0$，$\mathrm{f}(z)=\mathrm{a}_n z^n+\mathrm{a}_{n-1}z^{n-1}+\cdots\cdots+a_1 z+a_0$，其中$\mathrm{a}_j\in\mathbb{C}$、$\mathrm{j}=0$、$1$、…、$\mathrm{n}$，其求解可知是困難的。

三、　以國中數學教師的教育內容擴展加深加廣的延伸，尋找一種求解理論方法，任何複係數 n 次方程式，都可以此發明來求解，則以上之藝術碎形美圖就可以容易完成。

四、　事實上這是非線性方程式求解課題，本議題必先以類線性方式找尋最接近的解初值，

只要第一個解找到，則可以逐一完成其他各解。

五、 接著逐步的研究和探討，發現到全面性的一次完成所有解的方法。接著才有意想不到的震撼藝術殿堂之視覺享受。

壹、 研究動機

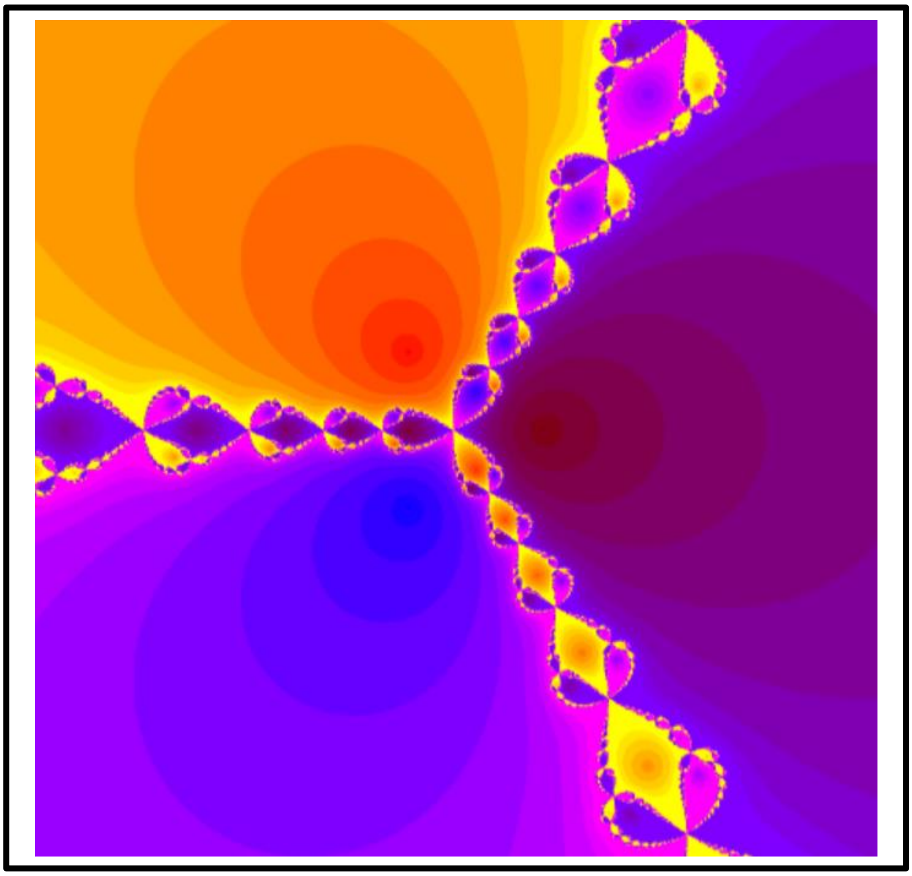
一、 以一個三次方程式

$$\mathbf{f(z) = z^3 - 1 = 0}$$

因式分解得

$$\mathbf{f(z) = (z-1)(z^2 + z + 1) = 0}$$

得 $\mathbf{z = 1}$ 或 $\mathbf{Z = \frac{-1 \pm \sqrt{3} i}{2}}$ ，我們必須定義出$\sqrt{-1} = i$，$i^2 = -1$、$i^3 = -i$、$i^4 = 1$ 可以輕而易舉地將這明確的複數三個解為依據，用牛頓法繪製如圖。



二、 思考$f(z) = 0$為複數係數之 z 的 n 次方程式，必有 n 個複數根，如果皆知 n 個根，必可以牛頓法(Newton’s method)或稱牛頓—拉弗森法(Newton-Raphson method)繪製難以想

像之美圖。因此以下例子

$$f(z)=z^3+2z^2+z+2+3i=0\ \text{(複數係數)}$$

令 $z=x+yi$ 經計算(複數加減乘除運算)

$$(x+yi)^3+2(\mathrm{x}+\mathrm{yi})^2+(x+yi)+2+3i=0+0i$$

$$(x^3-3xy^2+2x^2-2y^2+y+2)+(3x^2y-y+4xy+y+3)i=0+0i$$

得非線性 2 元 3 次之方程組

$$\begin{cases} x^3-3xy^2+2x^2-2y^2+y+2=0 \\ 3x^2y-y+4xy+y+3=0 \end{cases}$$

以現在正流行的 ChapGPT 求解，竟無法得解且錯誤嚴重。若以網路線上求解(非每一個皆能解)得以下之結論(如圖左)

$$\begin{cases} x=1.19062\cdot i+0.0894678 \\ y=0.453564\cdot i+0.238063 \\ x=0.0894678-1.19062\cdot i \\ y=0.238063-0.453564\cdot i \\ x=-2.17894 \\ y=-0.476127 \\ x=0.543032 \\ y=-0.952559 \\ x=(-0.952407\cdot i)-1.27152 \\ y=0.90742\cdot i+0.47628 \\ x=0.952407\cdot i-1.27152 \\ y=0.47628-0.90742\cdot i \\ x=-0.364096 \\ y=1.42869 \\ x=0.238216\cdot i-0.817952 \\ y=1.36098\cdot i-0.714343 \\ x=(-0.238216\cdot i)-0.817952 \\ y=(-1.36098\cdot i)-0.714343 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1.17131\cdot i+0.0872797 \\ y=0.0 \\ x=0.0872797-1.17131\cdot i \\ y=0.0 \\ x=-2.17456 \\ y=0.0 \\ x=0.0872797 \\ y=1.17131 \\ x=0.0872797 \\ y=-1.17131 \\ x=0.585656\cdot i-1.04364 \\ y=0.585656-1.13092\cdot i \\ x=0.585656\cdot i-1.04364 \\ y=1.13092\cdot i-0.585656 \\ x=(-0.585656\cdot i)-1.04364 \\ y=(-1.13092\cdot i)-0.585656 \\ x=(-0.585656\cdot i)-1.04364 \\ y=1.13092\cdot i+0.585656 \end{cases}$$

是很凌亂。

另一實例

$$\mathrm{f(z)=z^3+2z^2+z+3=0}\quad\text{(實數係數)}$$

令$\mathrm{z}=x+y\mathrm{i}$ 經計算(複數加減乘除運算)

$$(x+yi)^3+2(\mathrm{x}+\mathrm{yi})^2+(x+yi)+3=0+0i$$

$$(\mathrm{x^3-4xy^2+2x^2-2y^2+x+3})+(\mathrm{3x^2y-y^3+4xy+y})i=0+0i$$

得非線性 2 元 3 次之方程組

$$\begin{cases} \mathbf{x^3 - 4xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x + 3 = 0} \\ \mathbf{3x^2y - y^3 + 4xy + y = 0} \end{cases}$$

網路線上求解(非每一個皆能解)得以上之結論(如圖右)。

三、 因此思考以創新理論尋根新方法，以作為發表投書，方便探究更多不為人知的碎形之面貌。

貳、 研究目的

一、 審視過相關求解方法，不外乎空洞不切實際的邊際理論，並非一針見血的有效方式。因此不以參考其他方法，而由學生自創原創理論，以外積算有向面積，用類線性方式圍攻理想求解初值邊界的方式尋根。

二、 提出證明軌跡尋根方法理論依據。

三、 探究出所有的根，證明足以使用後續牛頓法探究碎形幾何。

參、 研究設備及器材

紙、筆、

i5 等級筆電(繪圖還蠻吃力的)、

動態數學軟體 Carmetal、cinderella。

肆、研究過程或方法

■事前準備

思考以一個複數係數的 6 次方程式為研究對象，且以向量相關性質依線性關係將方程式的猜解值提至解區的邊境內。

使用的軟體工具為 Carmetal 幾何繪圖軟體(具 JavaScript 程式設計)及 Cinderella 幾 何作圖軟體(具 CindyScript 程式設計)，前者為解方程式使用，後者為牛頓法繪製碎形幾何圖案使用。

考慮複數係數方程式為

$$f(z)=(-1+6i)z^6+(3+5i)z^5+z^3+2z^2+z+(2+3i)=0$$

將研究如何迅速找出此方程式的六個複數解，而且依照此六個解來繪製美麗藝術的碎形幾何圖。

在 Carmetal 幾何繪圖軟體中設置一般性的方程式(考慮至最高六次方程式，若需要更高次則可以再修改建置。)

$f(z)=a_6z^6+a_5z^5+a_4z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0=0$，

$a_i\in\mathbb{C}$，$i=1$、2、⋯、6

在 Carmetal 幾何繪圖軟體中設定直角坐標系點變數為

$$P1,\quad x、y\text{座標值分別為}\ x(P1)、y(P1)$$

即複數表示為 $z=x(P1)+y(P1)*i\in\mathbb{C}$。其中$i=\sqrt{-1}$

在 Carmetal 幾何繪圖軟體中設定輸入變數 h1、h2、i1、i2、j1、j2、k1、k2、l1、l2、m1、m2、n1、n2。

即複數係數表示為

$a_0=\mathrm{h1}+\mathrm{h2}*i$、$a_1=\mathrm{i1}+\mathrm{i2}*i$、$a_2=\mathrm{j1}+\mathrm{j2}*i$、$\mathrm{a_3}=\mathrm{k1}+\mathrm{k2}*i$、

$a_4=\mathrm{l1}+\mathrm{l2}*i$、$a_5=\mathrm{m1}+\mathrm{m2}*i$、$a_6=\mathrm{n1}+\mathrm{n2}*i$。

其中$i=\sqrt{-1}$

在 Carmetal 幾何繪圖軟體中設定變數 E1 值為$x(P1)$、變數 E2 值為$y(P1)$，即複數表示變為 $z=\mathrm{E1}+\mathrm{E2}*i\in\mathbb{C}$。其中$i=\sqrt{-1}$。

利用複數乘法運算法則及巴司卡三角形原理處理二項式乘方展開之係數。

1	
1 1	$z=\mathrm{E1}+\mathrm{E2}*i$
1 2 1	$z^2=(\mathrm{E1}+\mathrm{E2}*i)^2=\mathrm{E3}+\mathrm{E4}*i$
1 3 3 1	$z^3=(\mathrm{E1}+\mathrm{E2}*i)^3=\mathrm{E5}+\mathrm{E6}*i$
1 4 6 4 1	$z^4=(\mathrm{E1}+\mathrm{E2}*i)^4=\mathrm{E7}+\mathrm{E8}*i$
1 5 10 10 5 1	$z^5=(\mathrm{E1}+\mathrm{E2}*i)^5=\mathrm{E9}+\mathrm{E10}*i$
1 6 15 20 15 6 1	$z^6=(\mathrm{E1}+\mathrm{E2}*i)^6=\mathrm{E11}+\mathrm{E12}*i$

得新的變數為(*代表乘運算，^代表次方)

E3＝E1^2-E2^2

E4＝2*E1*E2

E5＝E1^3-3*E1*E2^2

E6＝3*E1^2*E2-E2^3

E7＝E1^4-6*E1^2*E2^2+E2^4

E8＝4*E1^3*E2-4*E1*E2^3

E9＝E1^5-10*E1^3*E2^2+5*E1*E2^4

E10＝5*E1^4*E2-10*E1^2*E2^3+E2^5

E11＝E1^6-15*E1^4*E2^2+15*E1^2*E2^4-E2^6、

E12＝6*E1^5*E2-20*E1^3*E2^3+6*E1*E2^5

最後

$$\boldsymbol{f(z) = \mathbf{E27} + \mathbf{E28} * i}$$

E27＝

n1*E11-n2*E12+m1*E9-m2*E10+l1*E7-l2*E8+k1*E5-k2*E6+j1*E3-j2*E4+i1*E1-i2*E2+h1

E28＝

n1*E12+n2*E11+m1*E10+m2*E9+l1*E8+l2*E7+k1*E6+k2*E5+j1*E4+j2*E3+i1*E2+i2*E1+h2

因為

$\boldsymbol{f(z) = a_6 z^6 + a_5 z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$，

$\boldsymbol{a_i \in \mathbb{C}}$，$\boldsymbol{i = 1}$、$\boldsymbol{2}$、$\cdots$、$\boldsymbol{6}$

本身也是連續函數，所以也可以有導函數

$\boldsymbol{\frac{df(z)}{dz} = 6a_6 z^5 + 5a_5 z^4 + 4a_4 z^3 + 3a_3 z^2 + a_2 z + a_1}$

在 Carmetal 幾何繪圖軟體中設定輸入導數變數

$\boldsymbol{\frac{df(z)}{dz} = E29 + E30 * i \in \mathbb{C}}$ 。其中$\boldsymbol{i = \sqrt{-1}}$

E29＝6*n1*E9-6*n2*E10+5*m1*E7-

5*m2*E8+4*l1*E5-4*l2*E6+

3*k1*E3-3*k2*E4+2*j1*E1-

2*j2*E2+i1

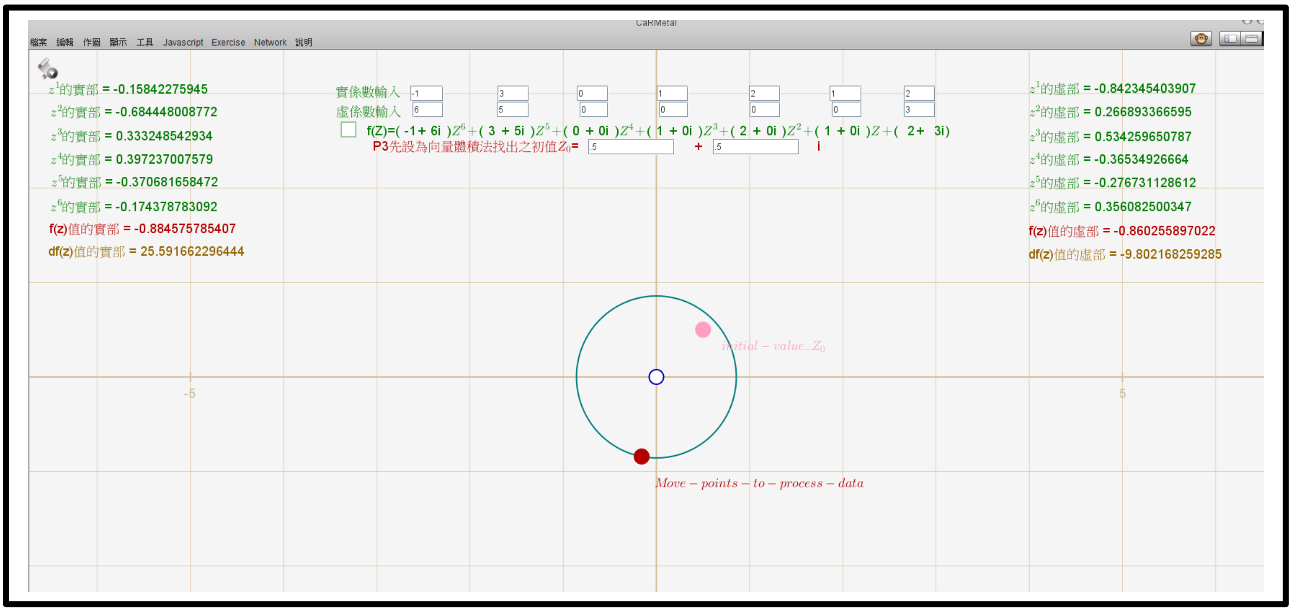
E30＝6*n1*E10+6*n2*E9+5*m1*E8+

5*m2*E7+4*l1*E6+4*l2*E5+

3*k1*E4+3*k2*E3+2*j1*E2+

2*j2*E1+i2

這是完備設定的 Carmetal 介面



考慮複數係數方程式為

$$f(z) = (-1+6i)z^6 + (3+5i)z^5 + z^3 + 2z^2 + z + (2+3i) = 0$$

牛頓法勘根解複數係數方程式的解時要先有理想的初值再用迭代的方式去找到解。但也有發散的時候，那是因為初始給的值不夠接近解區的邊界，同樣的!開始的方法是要先解決找出理想的初始值。

一、 給定猜想的值，用向量及面積法線性引導出理想初值。

(一)、理論根據:

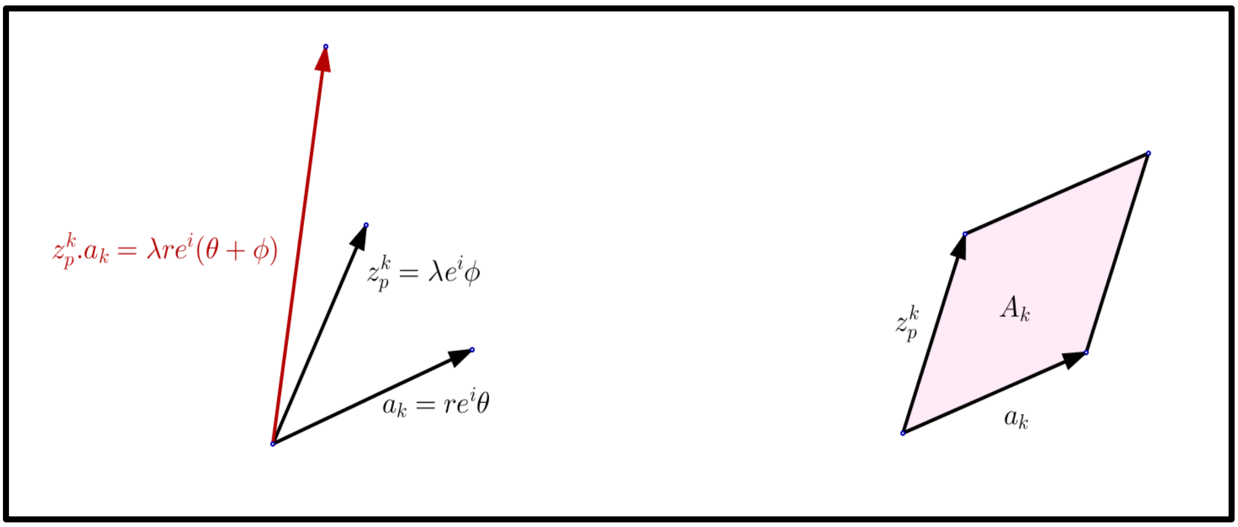
$$f(z) = a_6z^6 + a_5z^5 + a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$$

令 $z_0 = mz_p$ 滿足 $f(z_0) = a_6{z_0}^6 + a_5{z_0}^5 + a_4{z_0}^4 + a_3{z_0}^3 + a_2{z_0}^2 + a_1z_0 + a_0 = 0$

z_p 為給定的猜想初值。所以 $a_k{z_0}^k = a_k\left(m^kz_p^k\right) = m^ka_kz_p^k$，$k = 1$、$2$、$\cdots$、$6$

$a_0 = a_0(1+0i) \in \mathbb{C}$，$a_k \in \mathbb{C}$，$k = 1$、$2$、$\cdots$、$6$。

以複數相乘來看 *以向量外積概念為有方向性的平行四邊形面積來看*



讓$v_k = a_k \cdot z_p^k \in \mathbb{C}$，$k = 1$、$2$、⋯、$6$。$v_0 = a_0 \cdot (1 + 0i)$

若 $a_k = w + ti$、$z_p^k = u + si$， 則

$$|A_k| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ w & t & 0 \\ u & s & 0 \end{vmatrix}，|A_0| = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}，此例 \quad a_0 = 2 + 3i$$

因此以複數觀點

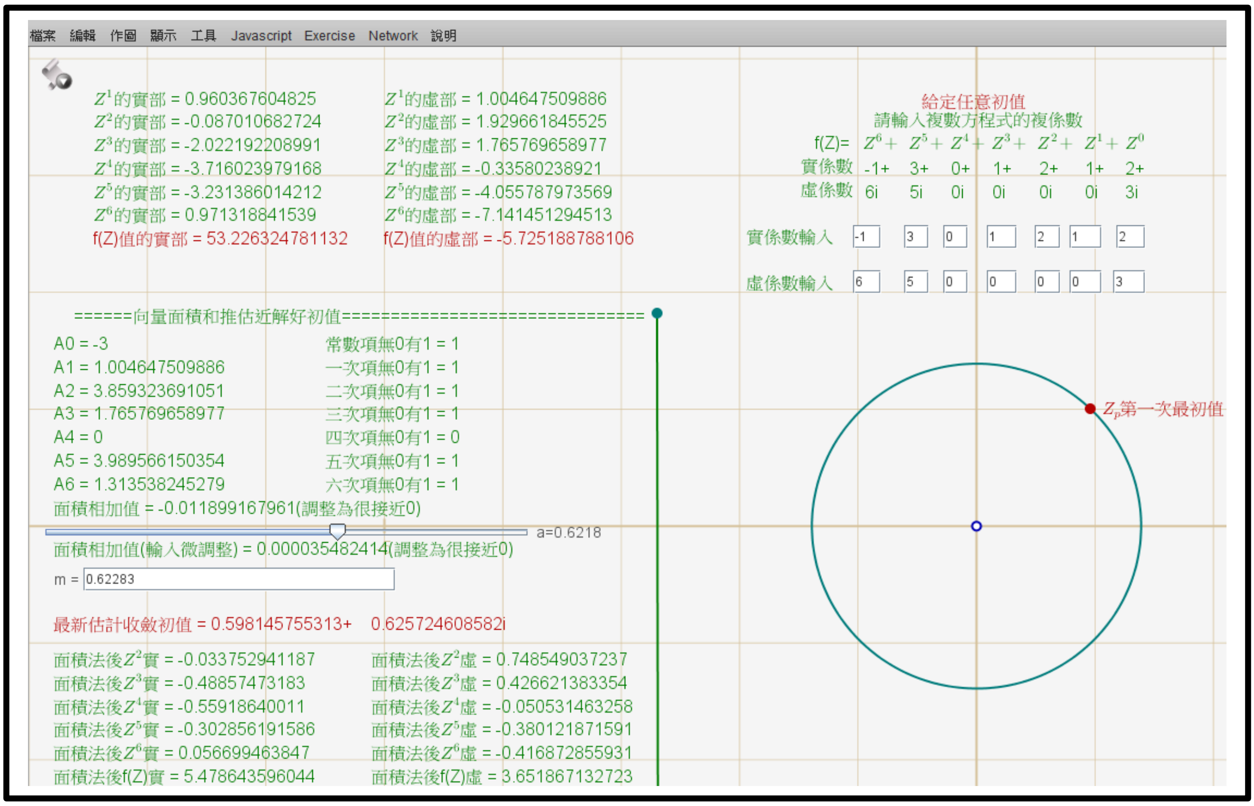
$$mv_1 + m^2v_2 + m^3v_3 + m^4v_4 + m^5v_5 + m^6v_6 = -a_0 \cdot (1 + 0i)$$

以向量外積處理有向面積觀點

$$mA_1 + m^2A_2 + m^3A_3 + m^4A_4 + m^5A_5 + m^6A_6 = -A_0$$

若以面積考量，則創造以線性關係簡化問題，所以一定存在$m \in R$，滿足 $z_0 = mz_p$ ，z_p 為給定的猜想初值。z_0必定合於$f(z) = 0$解的邊界值內。

(二)、實際操作:



複數係數方程式為

$$f(z)=(-1+6i)z^6+(3+5i)z^5+z^3+2z^2+z+(2+3i)=0$$

在複數平面取最初值$z_p=0.960367604825+1.0046447509886i$

經 carmetal(設計的向量面積法)得參數 m=0.62283 使得

$$A_0+mA_1+m^2A_2+m^3A_3+m^4A_4+m^5A_5+m^6A_6\text{接近於}\,0.000035482414$$

$$z_0=0.62283z_p=0.598145755313+0.625724608583i$$

$$\text{原 } f(z_p)=53.226324781132-5.72518878106i$$

$$\text{轉成 } f(z_0)=5.478643596044+3.651867132723i$$

最新初值為 $z_0=0.62283z_p=0.598145755313+0.625724608583i$ 已被拉至合理解的邊界區域了。

二、 尋求第一個解的有效方法(非牛頓勘根法)

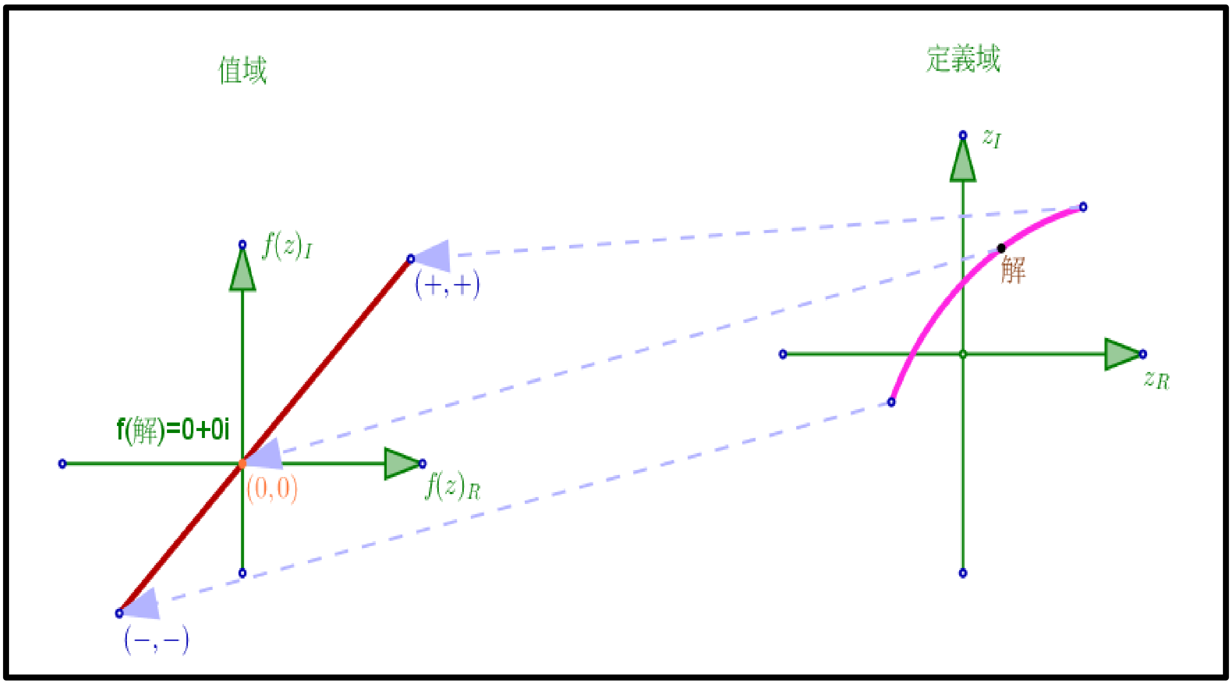
理論根據:

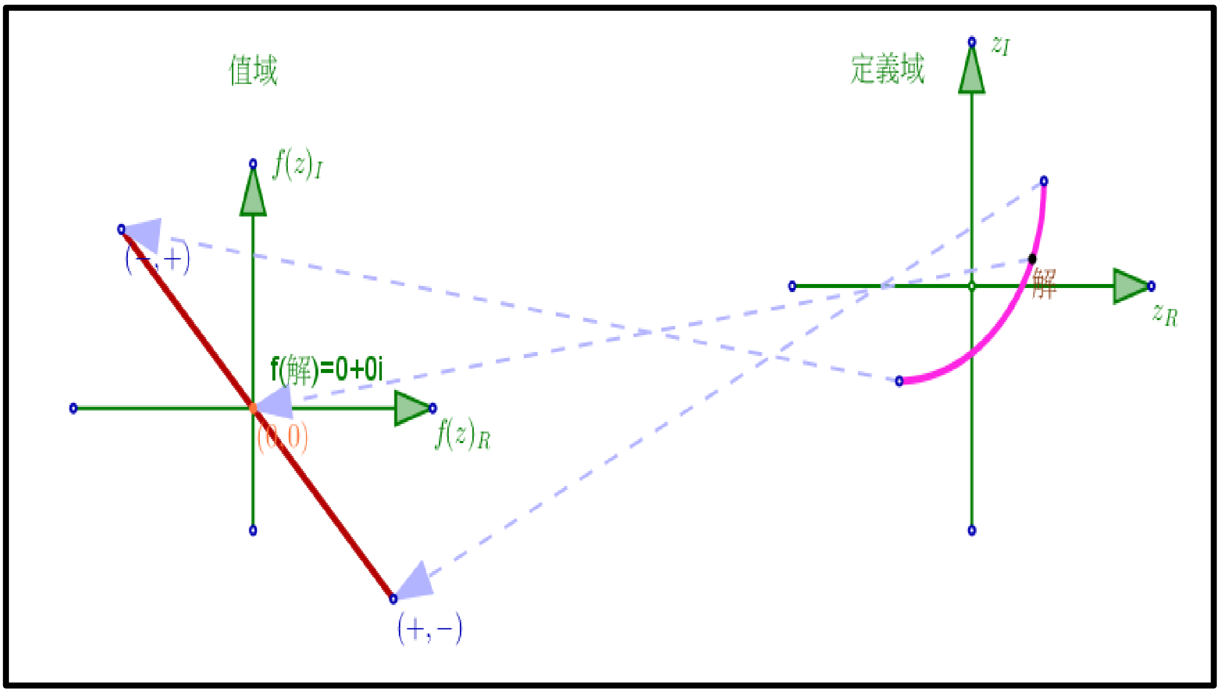
值域特定通過原點的線性軌跡在定義域內必有相對應的非線性曲軌跡。

$$f(z)=a_6z^6+a_5z^5+a_4z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0$$

是一個複數平面對應到複數平面的連續函數關係，$\forall c\in \mathbf{C}$，$\exists z_c\in C$滿足$f(z_c)=c$

因此可以考慮以下兩種軌跡對應理論，以便做為尋根的依據。





綜合以上在定義域內的複數平面上有

$z_0 = 0.62283z_p = 0.598145755313 + 0.625724608583i$ 及以上值域複數平面上過原點兩種直線反對映回定義域複數平面上得曲線。

如圖說明。

其中 $z_t \in \{z | f(z) = \alpha + \alpha i，\alpha\epsilon R\}$ 或

$z_t \in \{z | f(z) = \alpha - \alpha i，\alpha\epsilon R\}$

$f(z) = a_6z^6 + a_5z^5 + a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$，

$a_i \in \mathbb{C}$，$i = 1$、2、⋯、6。

以下的步驟為相同的理論下，更是方便快速!

三、 標記符號尋找軌跡法，一次解決所有解。

(一)、理論根據:

1、解的存在性

(1) $f(z_\alpha)=\alpha+\alpha i$，$f(z_\beta)=\beta+\beta i$，$\alpha>0$，$\beta<0$，則 $\exists\, z_c\in\{z|f(z)=p+pi，p\in(\beta，\alpha)\}$滿足 $f(z_c)=0$

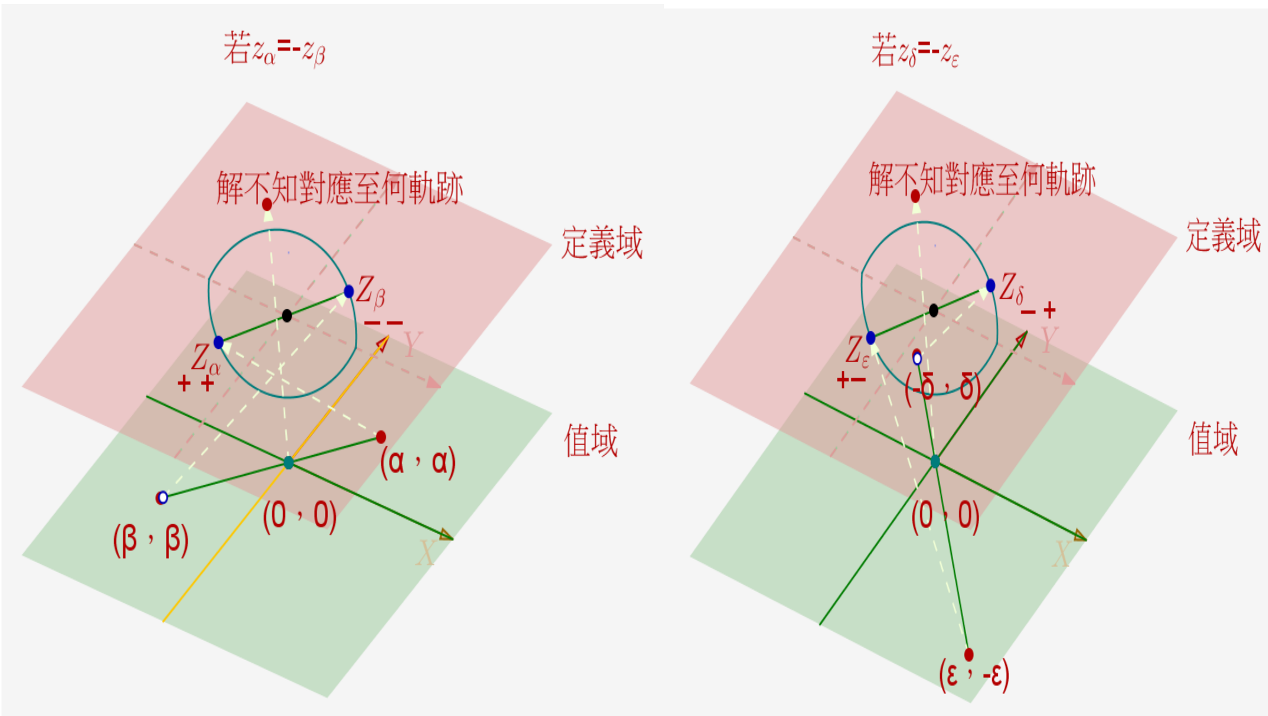
(2) $f(z_\delta)=-\delta+\delta i$，$f(z_\varepsilon)=\varepsilon-\varepsilon i$，$\delta>0$，$\varepsilon>0$，則 $\exists\, z_c\in\{z|f(z)=p-pi，p\in(-\delta，\varepsilon)\}$滿足 $f(z_c)=0$

其中 $\boldsymbol{\{z|f(z)=p+pi，p\in(\beta，\alpha)\}}$、
$\boldsymbol{\{z|f(z)=p-pi，p\in(-\delta，\varepsilon)\}}$
皆是連續的曲線軌跡

2、曲線軌跡尋解的合理性

若$\boldsymbol{z_\alpha=-z_\beta}$，則$\boldsymbol{\{z|f(z)=p+pi，p\in(\beta，\alpha)\}}$的軌跡尋解變化因素大，不予考慮。

若$\boldsymbol{z_\delta=-z_\varepsilon}$，則$\boldsymbol{\{z|f(z)=p+pi，p\in(-\delta，\varepsilon)\}}$的軌跡尋解變化因素大，不予考慮。



3、不在(0,0)為圓心的同圓周上原理

在$z_\alpha\neq -z_\beta$時
$f(z_\alpha)=\alpha+\alpha i$，$f(z_\beta)=\beta+\beta i$，$\alpha>0$，$\beta<0$，則 $z_\alpha\neq z_\beta$ 且 $|z_\alpha|\neq|z_\beta|$

在$z_\delta\neq -z_\varepsilon$時
$f(z_\delta)=-\delta+\delta i$，$f(z_\varepsilon)=\varepsilon-\varepsilon i$，$\delta>0$，$\varepsilon>0$，則 $z_\delta\neq z_\epsilon$ 且 $|z_\delta|\neq|z_\varepsilon|$

證明：

設$z_\alpha = \gamma_\alpha(cos\theta_\alpha + i * sin\theta_\alpha)$，$z_\beta = \gamma_\beta(cos\theta_\beta + i * sin\theta_\beta)$ ，

$z_\delta = \gamma_\delta(cos\theta_\delta + i * sin\theta_\delta)$，$z_\varepsilon = \gamma_\varepsilon(cos\theta_\varepsilon + i * sin\theta_\varepsilon)$

假設$z_\alpha = z_\beta$則違背$f(z) = a_6z^6 + a_5z^5 + a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$

是一個函數關係，則$z_\alpha \neq z_\beta$。

同理可證! $z_\delta \neq z_\epsilon$。

假設$|z_\alpha| = |z_\beta|$ 則$|\gamma_\alpha(cos\theta_\alpha + i * sin\theta_\alpha)| = |\gamma_\beta(cos\theta_\beta + i * sin\theta_\beta)|$

$=> |\gamma_\alpha||(cos\theta_\alpha + i * sin\theta_\alpha)| = |\gamma_\beta||(cos\theta_\beta + i * sin\theta_\beta)|$

$=> |\gamma_\alpha|\sqrt{cos^2\theta_\alpha + sin^2\theta_\alpha} = |\gamma_\beta|\sqrt{cos^2\theta_\beta + sin^2\theta_\beta}$

$=> |\gamma_\alpha| = |\gamma_\beta|$， $\because cos^2\theta_\alpha + sin^2\theta_\alpha = 1$及$cos^2\theta_\beta + sin^2\theta_\beta = 1$

$=> cos\theta_\alpha + i * sin\theta_\alpha = \pm(cos\theta_\beta + i * sin\theta_\beta)$

$=> cos\theta_\alpha \mp cos\theta_\beta + i * \left(sin\theta_\alpha \mp sin\theta_\beta\right) = 0$

$=> cos\theta_\alpha \mp cos\theta_\beta = 0$，$sin\theta_\alpha \mp sin\theta_\beta = 0$

第一種情況

$cos\theta_\alpha = cos\theta_\beta$，$sin\theta_\alpha = sin\theta_\beta$，$\theta_\alpha = 2t\pi + \theta_\beta$，$t$為自然數

$=> z_\alpha = z_\beta$ 則又違背$z_\alpha \neq z_\beta$之事實。

第二種情況

$cos\theta_\alpha = -cos\theta_\beta$，$sin\theta_\alpha = -sin\theta_\beta$，$\theta_\alpha = t\pi + \theta_\beta$，$t$為正奇數。

此種情形是$z_\alpha = -z_\beta$, $z_\alpha \neq z_\beta$，但軌跡太長不適尋根。

則又違背在 $z_\alpha \neq -z_\beta$ 的前提下。

則$|z_\alpha| \neq |z_\beta|$。

同理可證! $|z_\delta| \neq |z_\varepsilon|$。

以上事實即是強調

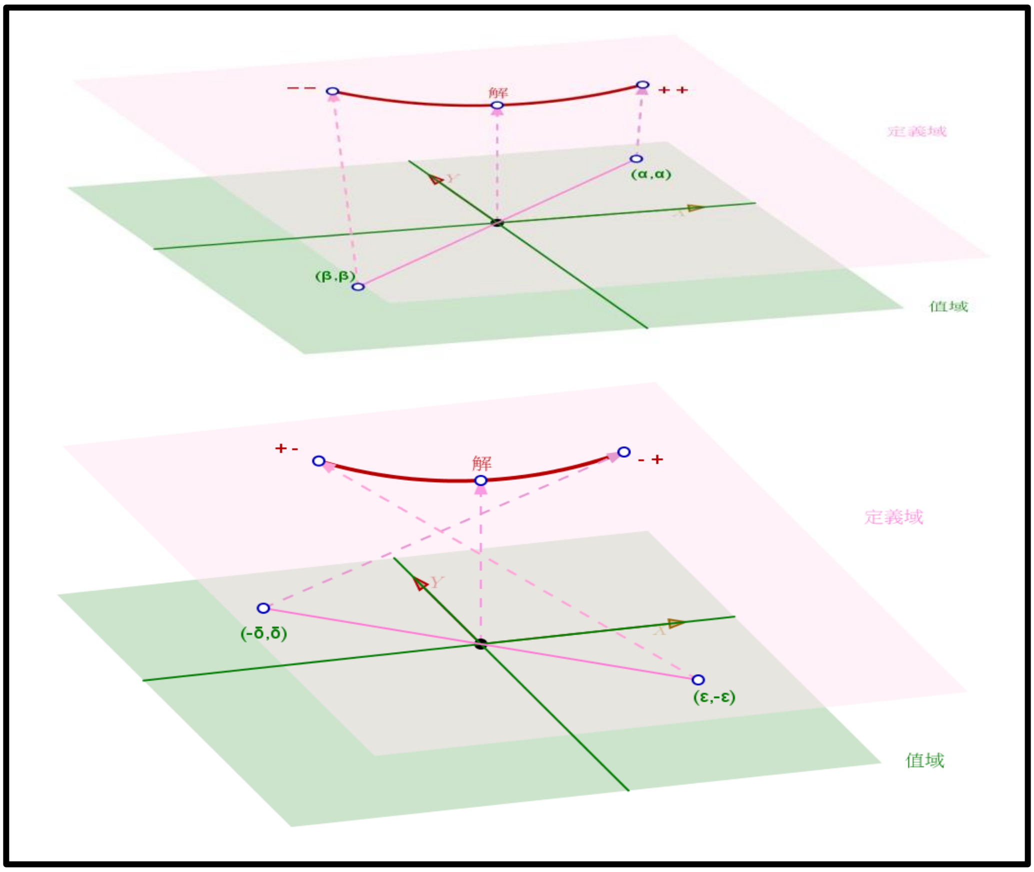
在定義域的複數平面上只要$z_\alpha \neq -z_\beta$、$z_\delta \neq -z_\varepsilon$下

z_α、z_β不會在以原點為圓心的同一圓周上

z_δ、z_ε不會在以原點為圓心的同一圓周上

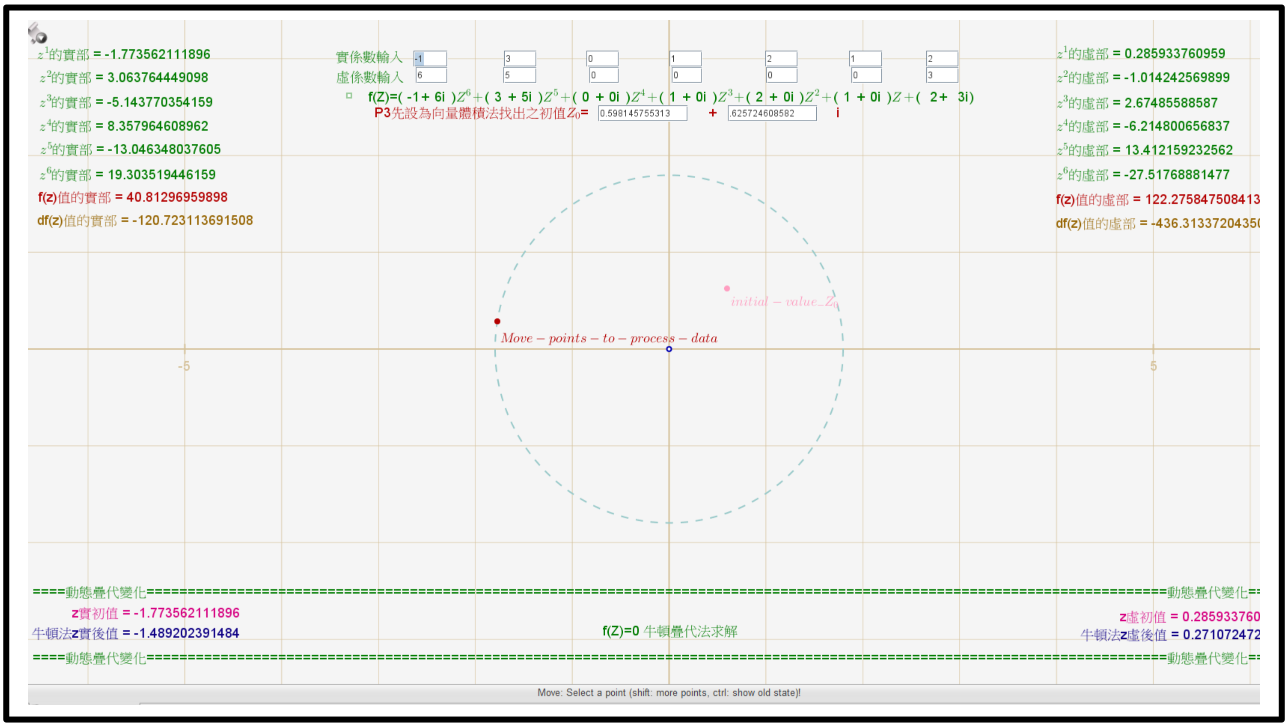
所以解必可在z_α至z_β的一段軌跡上找到。解必可在z_δ至z_ε的一段軌跡上找到。

以圖示說明，只要找的到z_α、z_β及z_δ、z_ε的位置及標記符號，就可明確找到理想軌跡而找到解。

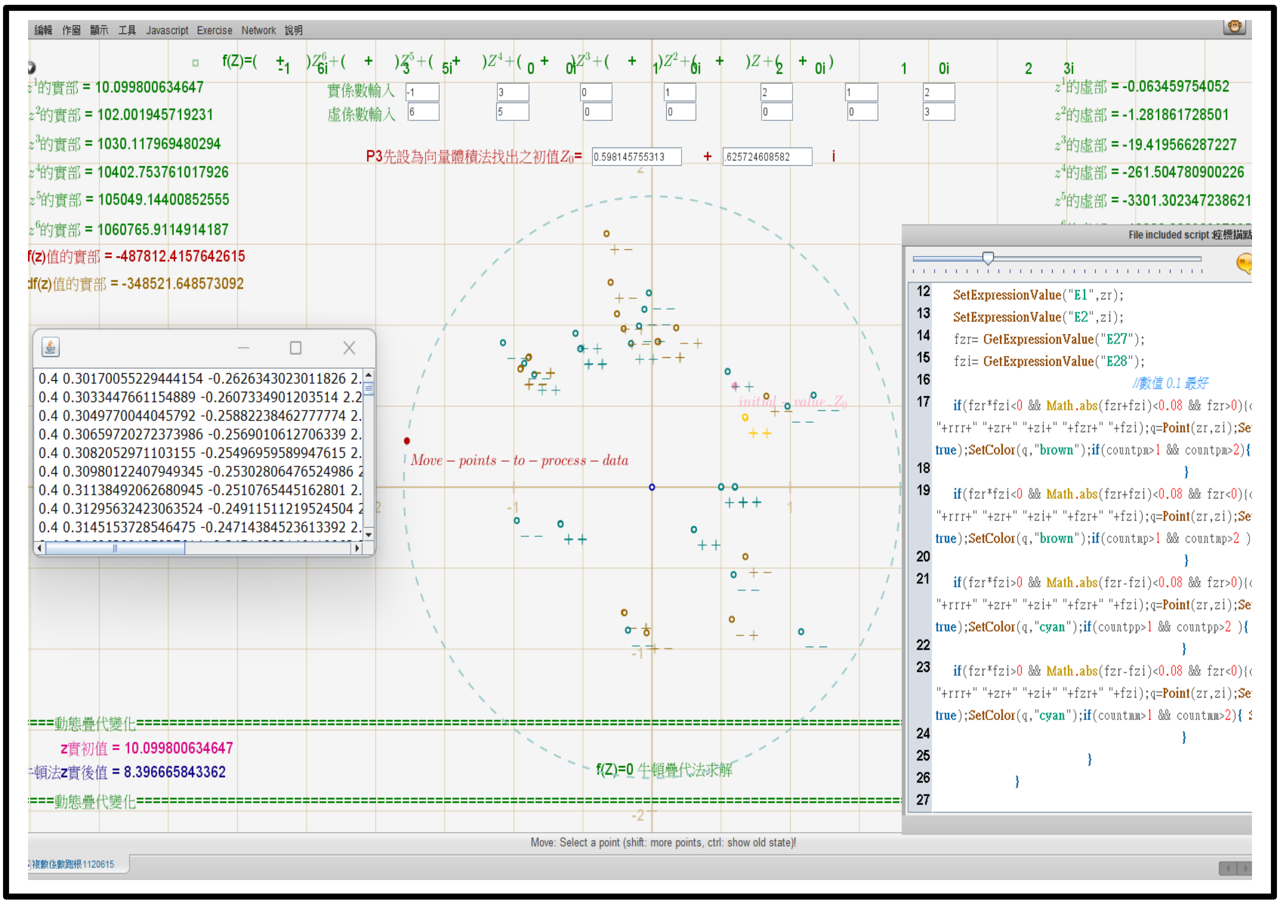


(二)、實際操作:

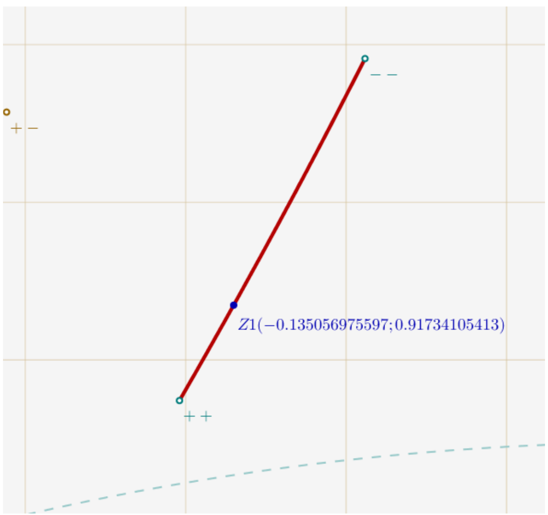
1、開始執行 carmetal 標記作業的程式。



2.開啟座標描點求解軌跡程式。

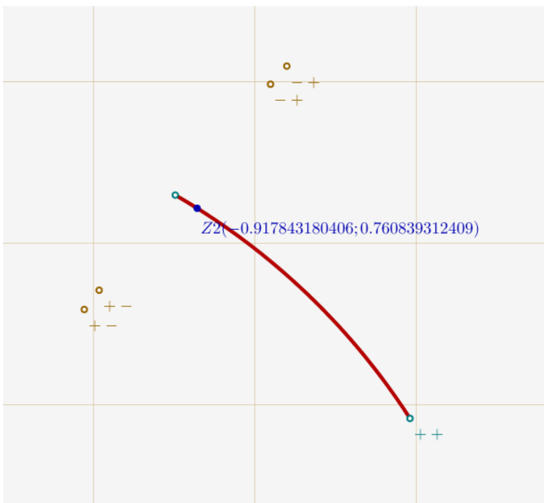


3.放大六個解區觀察且用軌跡線找根程式尋根。



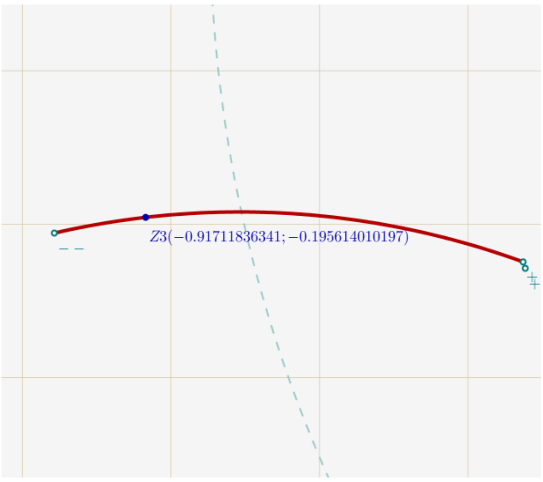
z_1

標記符號尋找軌跡法找到z_1



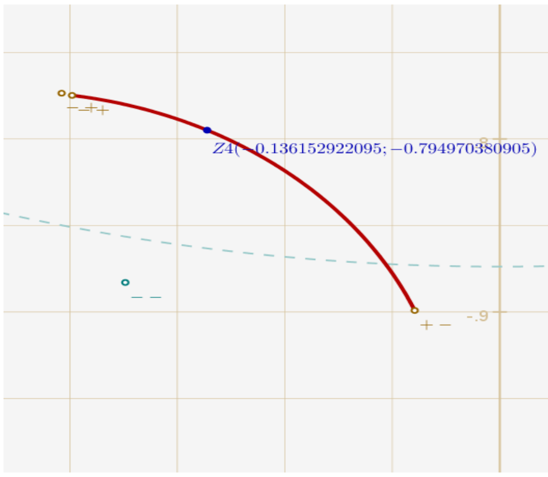
z_2

標記符號尋找軌跡法找到z_2



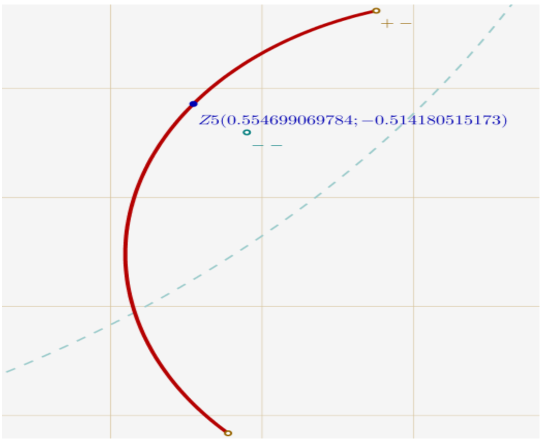
z_3

標記符號尋找軌跡法找到z_3



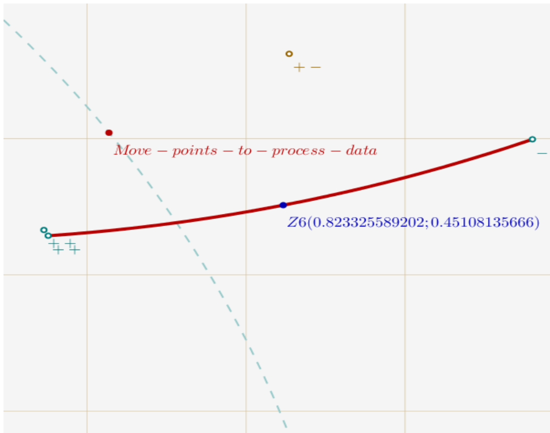
z_4

標記符號尋找軌跡法找到z_4



z_5

標記符號尋找軌跡法找到z_5



z_6

標記符號尋找軌跡法找到z_6

4、以下為z_1、z_2、z_3、z_4、z_5、z_6六個解的數據資料

$$z_1 = -0.13570266868909353 + 0.9191206591976318\,i$$

$$z_2 = -0.9196349401002808 + 0.7628190937766757\,i$$

$$z_3 = -0.9186588063254422 - 0.1912665022633413\,i$$

$$z_4 = -0.13595560106133497 - 0.7945178783511484\,i$$

$$z_5 = 0.5528367044316983 - 0.514831313970495\,i$$

$$z_6 = 0.8241671178460047 + 0.45020010523474663 6\,i$$

5、最後整理出完整 6 個根的數據分析。

$$
\begin{aligned}
z_1 &= -0.13570266868909353 &&+ 0.9191206591976318\, i \\
z_2 &= -0.9196349401002808 &&+ 0.7628190937766757\, i \\
z_3 &= -0.9186588063254422 &&- 0.1912665022633413\, i \\
z_4 &= -0.13595560106133497 &&- 0.7945178783511484\, i \\
z_5 &= 0.5528367044316983 &&- 0.514831313970495\, i \\
z_6 &= 0.8241671178460047 &&+ 0.45020010523474663 6\, i
\end{aligned}
$$

$$f(z) = (-1+6i)z^6 + (3+5i)z^5 + z^3 + 2z^2 + z + (2+3i)\text{，}$$

$$\text{滿足 } f(z_i) = 0\text{，}i = 1\text{、}2\text{、}\cdots\text{、}6$$

四、 舉第二個實例，調整找解的方式及程序，就用標記符號尋找軌跡法即可。但就要認清理想初值的重要性。

考慮第二個例子

$$\boldsymbol{f(z) = z^3 + (4+3i)z^2 + (5-3i) = 0}$$

(一)、理論根據:

標記符號尋找軌跡法所用的搜尋半徑要取用(在定義域中)

$\mathbf{R} = \mathbf{max}\{|z_0|$：所有符合向量及面積法線性引導出理想初值$z_0$*集合*$\}$。

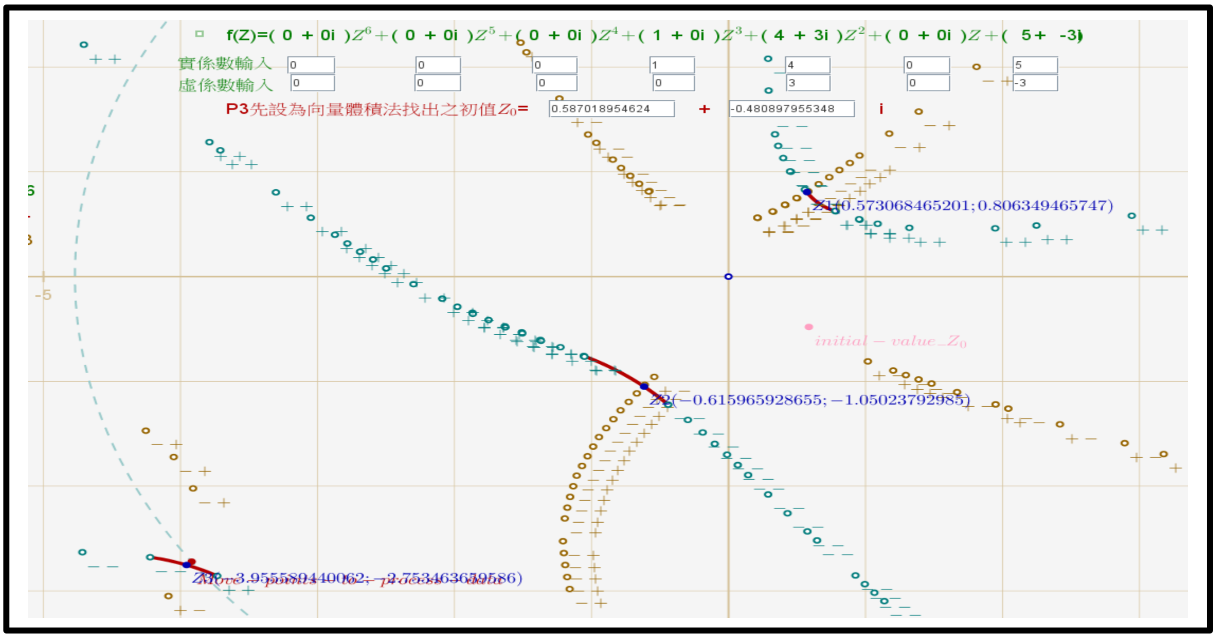
經過處理及調整 R=6 最適合。

$$\boldsymbol{z_0 = -1.0676 z_p = -3.83646754739 - 3.692198212284i}$$

$$\boldsymbol{z_p = 3.59333716255 + 3.458409715515i}$$

(二)、實際操作:

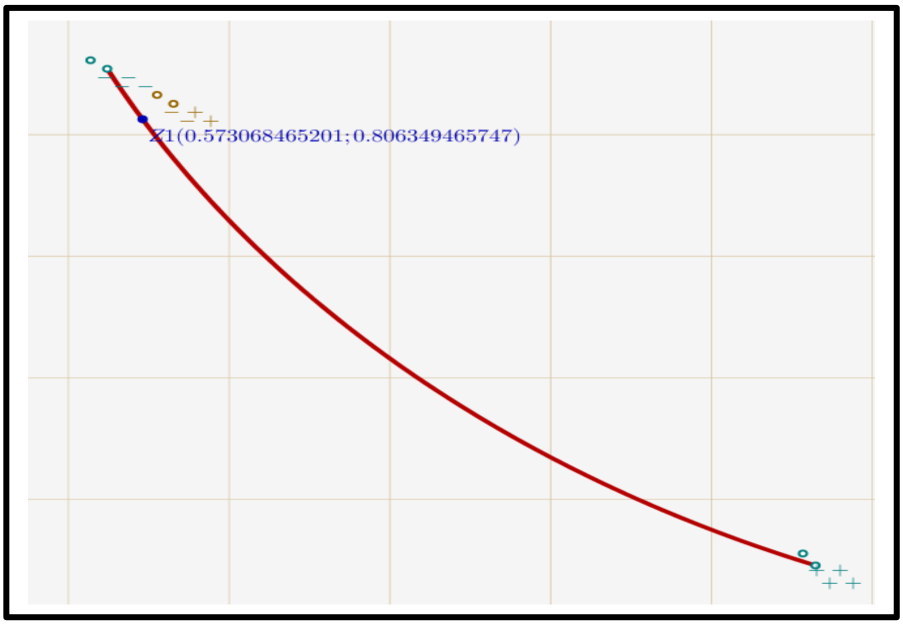
1、使用標記符號尋找軌跡法

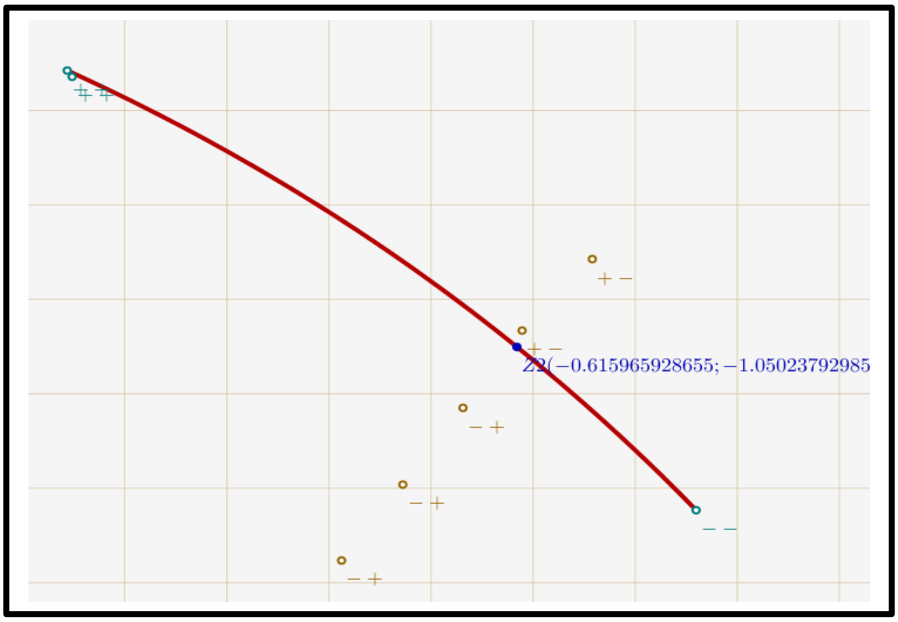


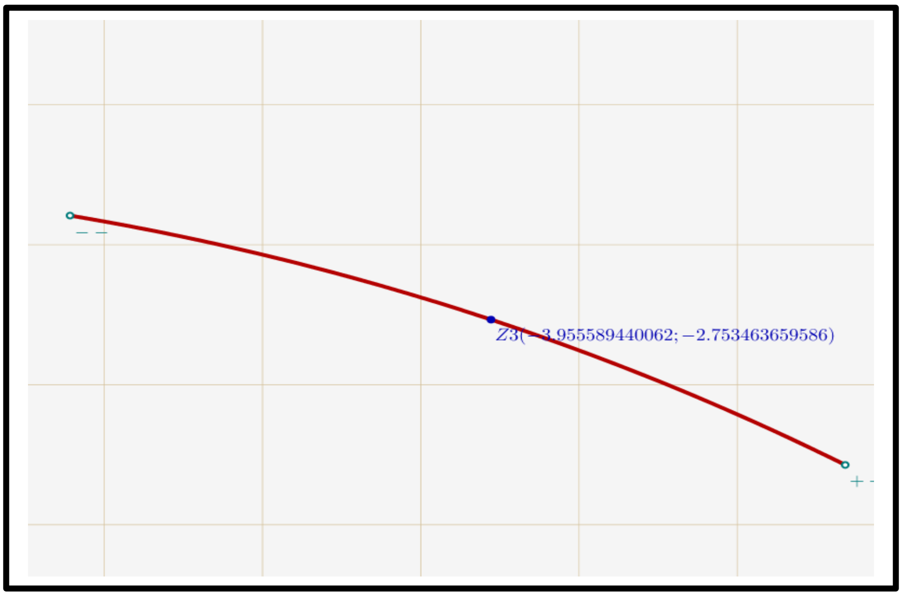
可以發現此例較特殊，有一解在左下離較遠，若不用理想初值尋找最大值

$\mathbf{R} = \mathbf{max}\{|z_0|$：所有符合向量及面積法線性引導出理想初值$z_0$集合$\}$，可能被忽略，而以為找不到。

2、三個解軌跡尋找







3、三個解數據分析

$$f(z) = z^3 + (4+3i)z^2 + (5-3i) = 0$$

R = max{$|z_0|$：所有符合向量及面積法線性引導出理想初值z_0集合}。

經過處理及調整(標記符號尋找軌跡法最大圓周半徑) R=6 最適合。

$z_0 = -1.0676 z_p = -3.83646754739 - 3.692198212284i$ ，$z_p = 3.59333716255 + 3.458409715515i$ 。

得到 $f(z_i) = 0$，$i = 1$、2、3。

$\lvert f(z_1)\rvert$	z_1	$f(z_1)$
0.010315895423635485	0.5722875994776015 ＋ 0.806868422580466 *i*	0.005032101386843735 − 0.009005312544487776 *i*
$\lvert f(z_2)\rvert$	z_2	$f(z_2)$
0.007894173864595911	−0.6203588695116209−1.054569036757632 *i*	−0.0033597253907844404＋0.007143544379577094*i*
$\lvert f(z_3)\rvert$	z_3	$f(z_3)$
0.046817591231958625	−3.9522096296160623−2.7548687255926128 *i*	0.045898430870948914＋0.009231516253979777 *i*

伍、 研究結果

一、 偉大的數學家高斯在 1799 年首先證明了代數基本定理:一個 n 次複係數代數方程有且僅有 n 個根。可是,當時他的證明還不是構造性的,也就是說,只肯定根的存在,但沒有同時告訴求解的方法。如今這 n 次複係數代數方程式已用兩個真實例子完整找出所有的根了。接著將由這些解來探究碎形美圖奧妙。

二、 享受碎形幾何之美

(一)、理論根據:

1、 整個複數平面每一點當作牛頓法的初始值。

2、 運用複數牛頓法迭代方式，以初始值判斷是否迭代收斂至事先找到的解。

3、 運用動態數學軟體 cinderella 程式設計。

(二)、實際操作:

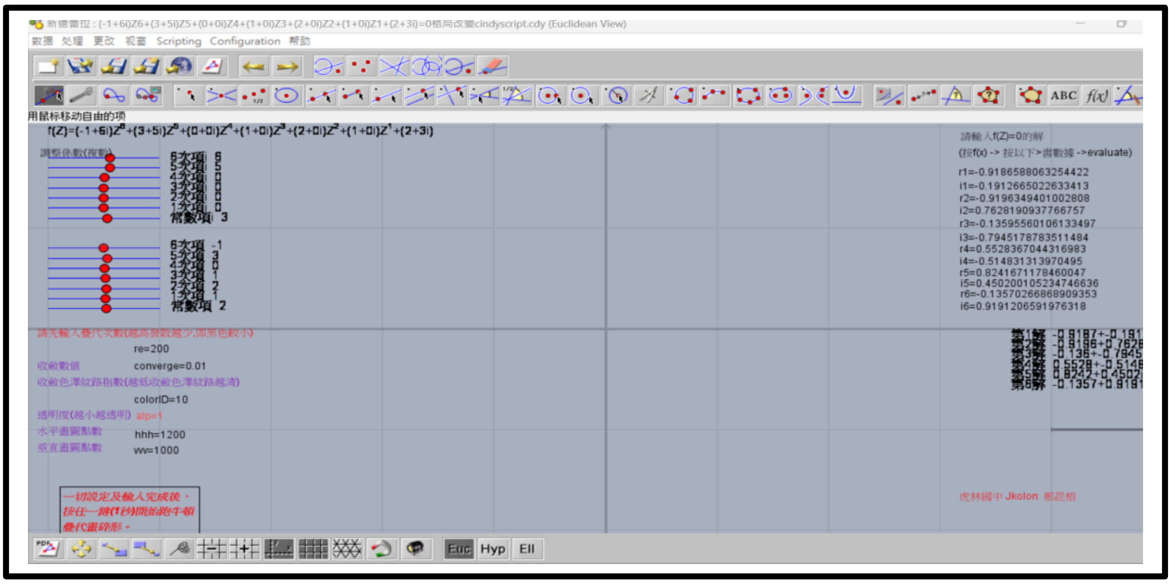
1、第一個成功求解的複係數 6 次方程式

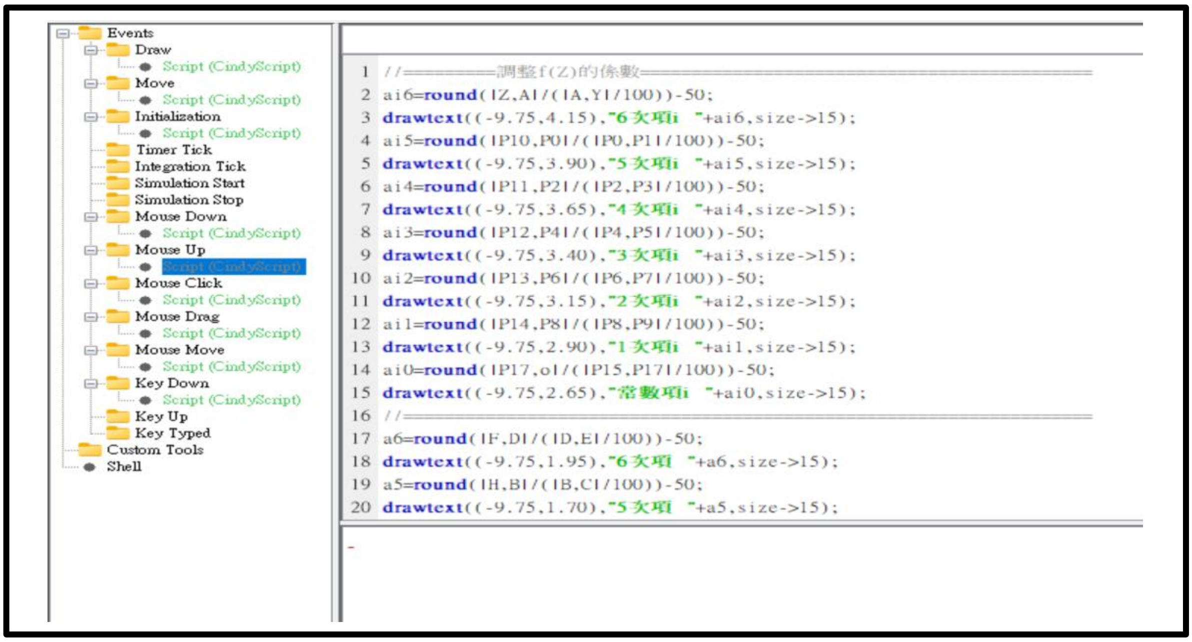
$$
\begin{aligned}
z_1 &= -0.13570266868909353 &+ 0.9191206591976318\,i\\
z_2 &= -0.9196349401002808 &+ 0.7628190937766757\,i\\
z_3 &= -0.9186588063254422 &- 0.1912665022633413\,i\\
z_4 &= -0.13595560106133497 &- 0.7945178783511484\,i\\
z_5 &= 0.5528367044316983 &- 0.514831313970495\,i\\
z_6 &= 0.8241671178460047 &+ 0.45020010523474636\,i
\end{aligned}
$$

$$f(z) = (-1+6i)z^6 + (3+5i)z^5 + z^3 + 2z^2 + z + (2+3i)，$$

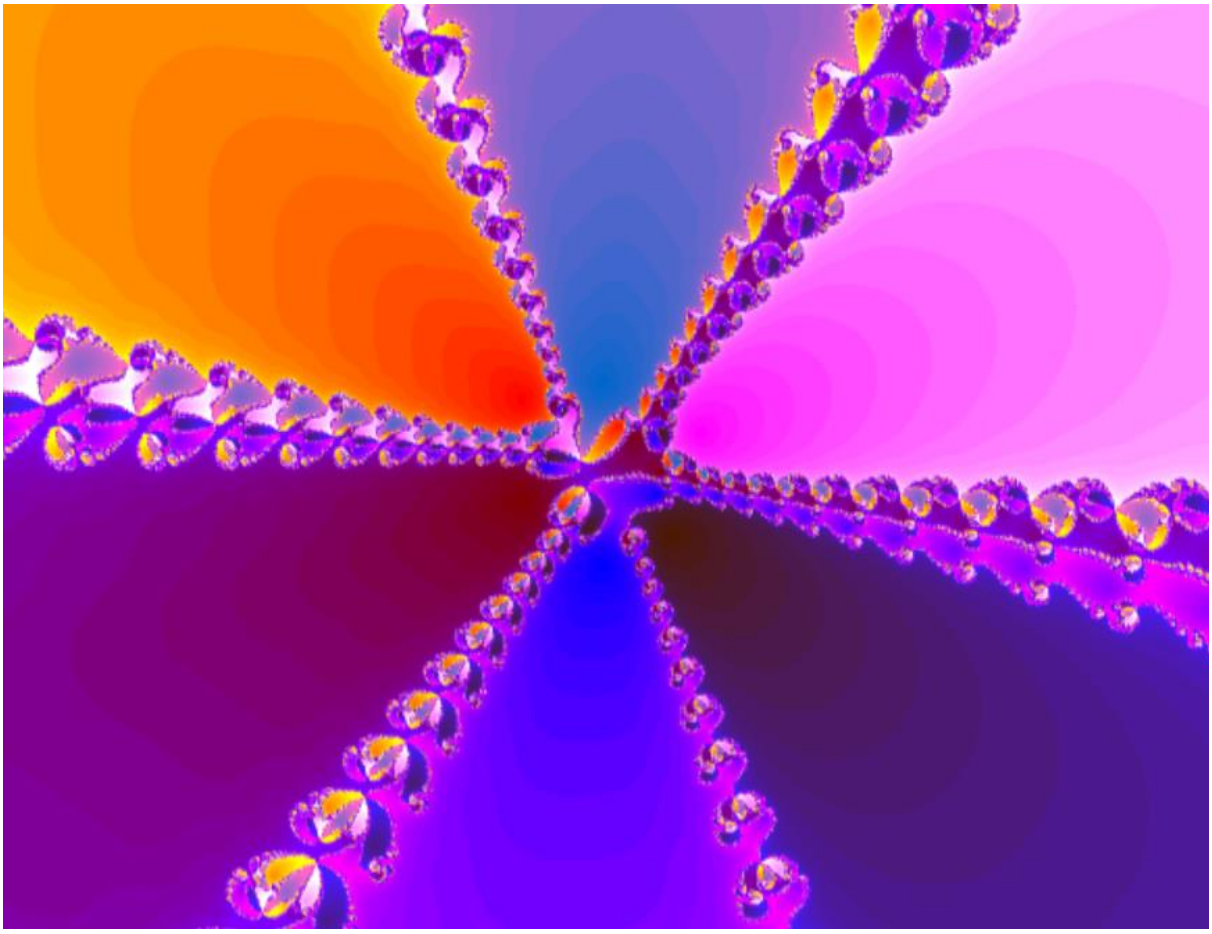
$$\text{滿足 } f(z_i) = 0，i = 1、2、\cdots、6$$

2、動態數學軟體 cinderella 程式設計介面處理





3、碎形幾何之美



4、 第二個成功求解的複係數 3 次方程式

$$f(z) = z^3 + (4+3i)z^2 + (5-3i) = 0$$

$R = \max\{|z_0|$：所有符合向量及面積法線性引導出理想初值z_0集合$\}$。

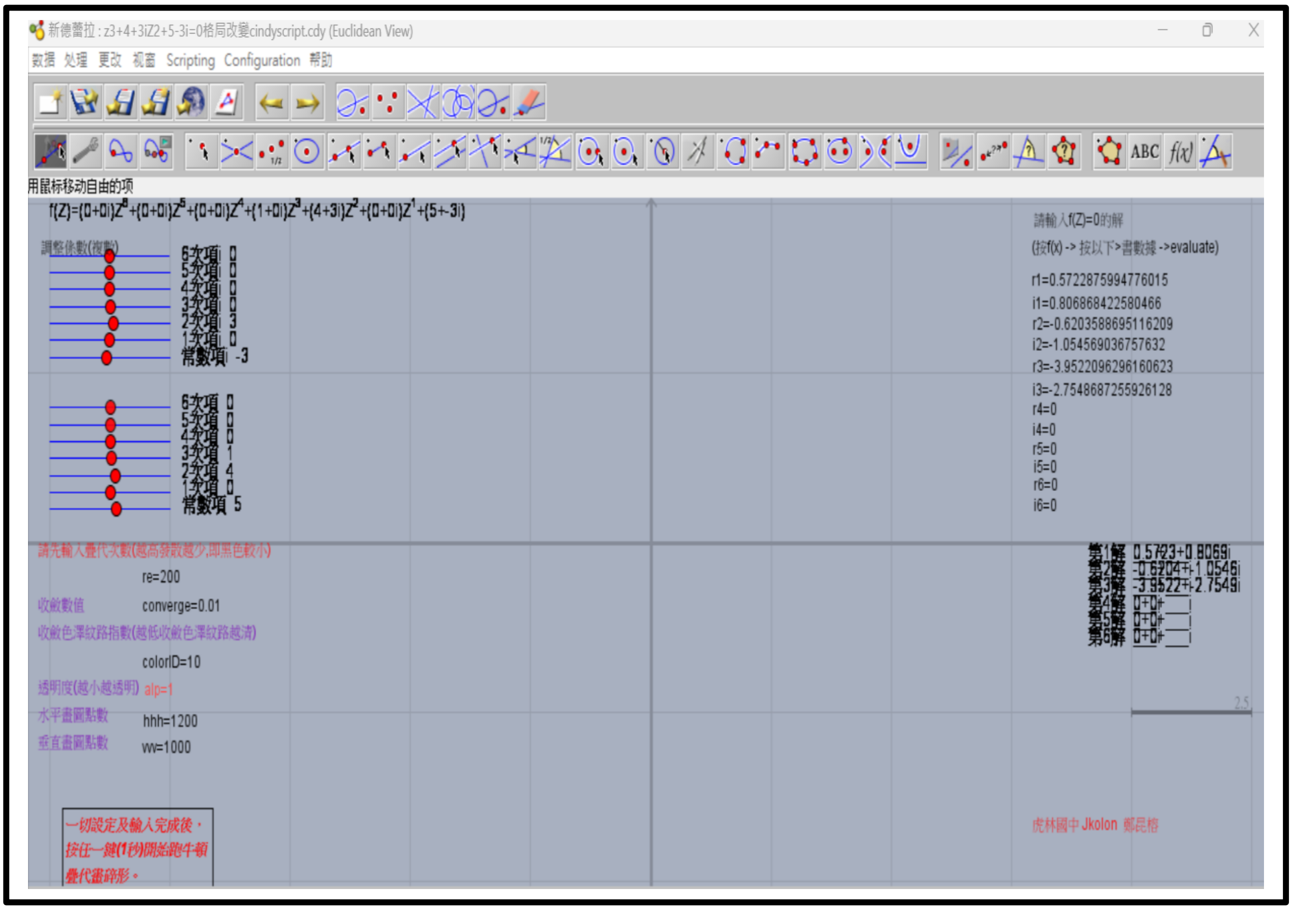
經過處理及調整(標記符號尋找軌跡法最大圓周半徑) R=6 最適合。

$z_0 = -1.0676 z_p = -3.83646754739 - 3.692198212284i$，$z_p = 3.59333716255 + 3.458409715515i$。

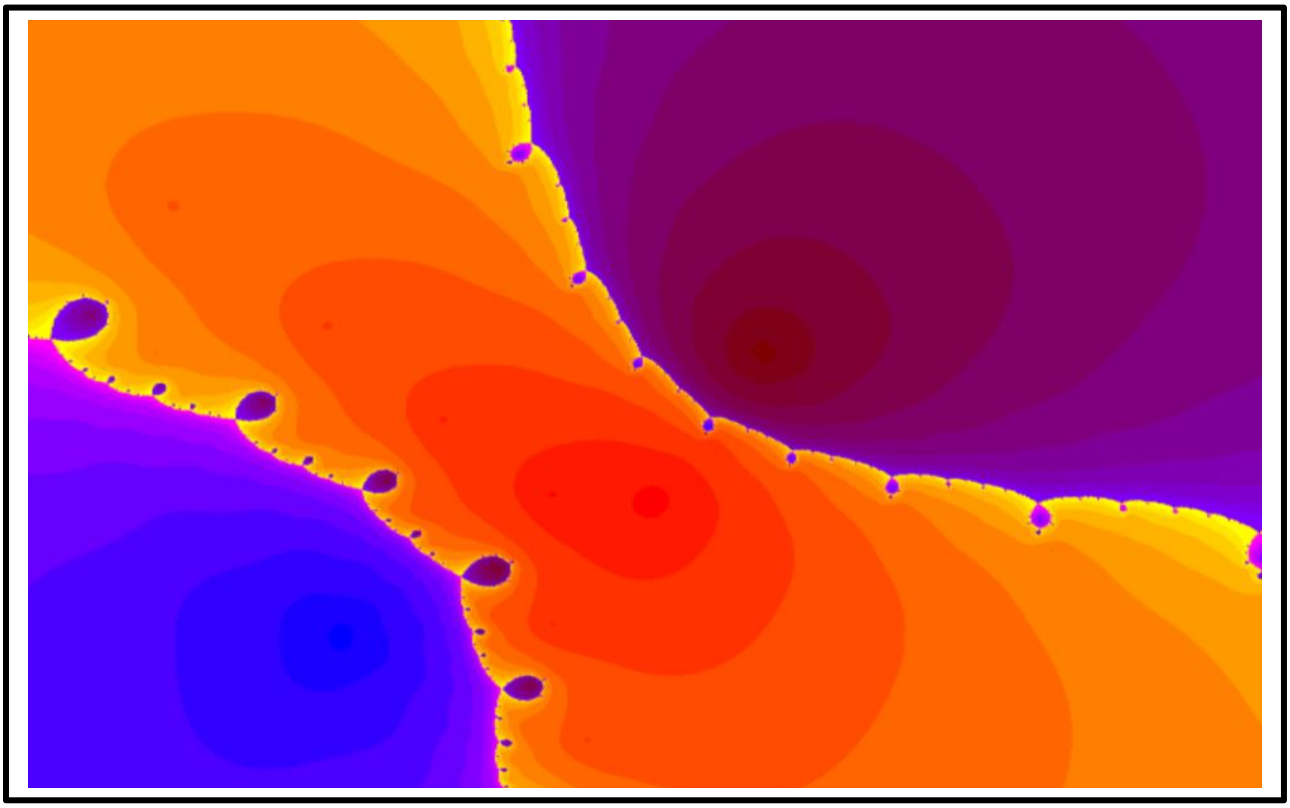
得到 $f(z_i) = 0$，$i = 1$、2、3。

$\lvert f(z_1)\rvert$	z_1	$f(z_1)$
0.010315895423635485	0.5722875994776015 + 0.806868422580466 *i*	0.005032101386843735 − 0.009005312544487776 *i*
$\lvert f(z_2)\rvert$	z_2	$f(z_2)$
0.007894173864595911	−0.6203588695116209−1.054569036757632 *i*	−0.003359725390784404+0.007143544379577094*i*
$\lvert f(z_3)\rvert$	z_3	$f(z_3)$
0.046817591231958625	−3.9522096296160623−2.7548687255926128 *i*	0.045898430870948914+0.009231516253979777 *i*

(1)、動態數學軟體 cinderella 程式設計介面處理



(2)、碎形幾何之美



三、 其他研究結果(以實數係數方程式呈現比較)

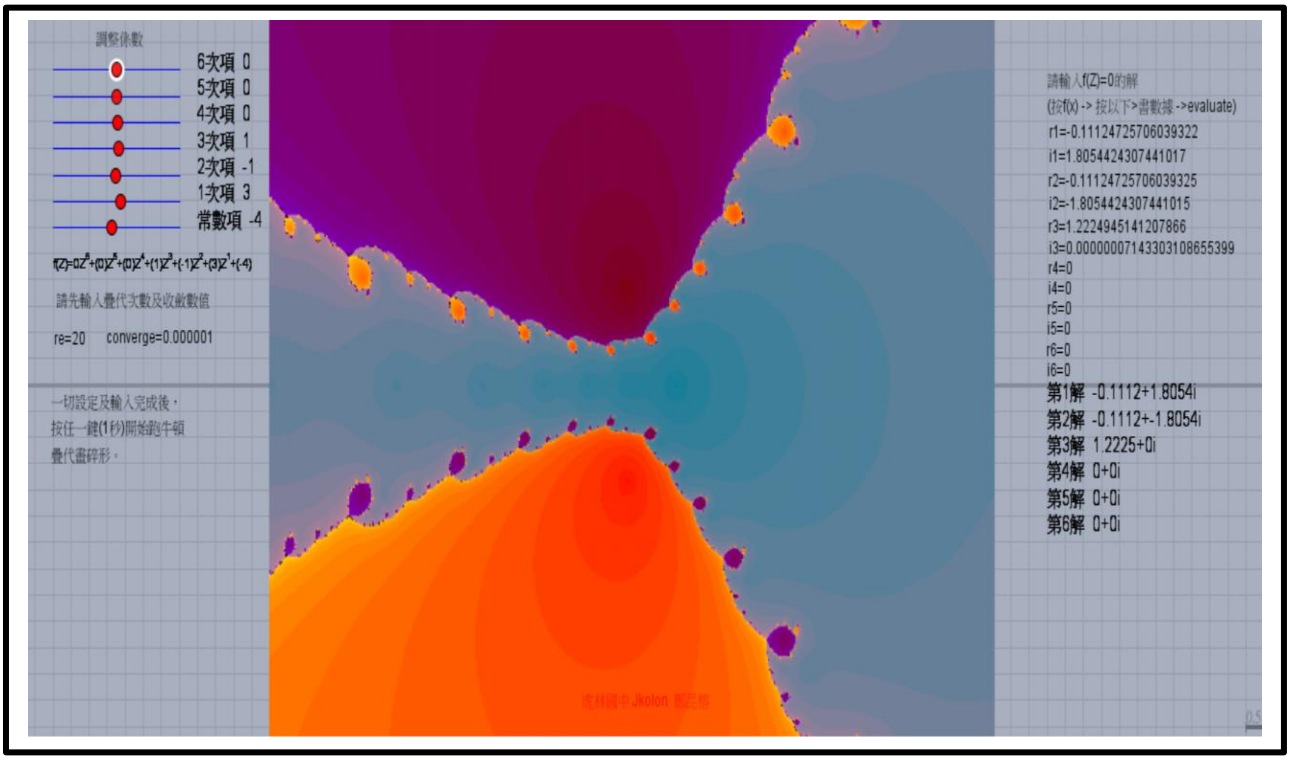
(一)、$f(z) = z^3 - z^2 + 3z - 4 = 0$ 其解必為一組共軛複數根及一實根

$$z_1 = -0.11124725706039322 + 1.8054424307441017\,i$$

$$z_2 = -0.11124725706039325 - 1.8054424307441015\,i$$

$$z_3 = 1.2224945141207866$$

碎形幾何之美為



(二)、$f(z) = z^6 - 2z^5 + 3z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 6z + 7 = 0$其解必為三組共軛複數根

$$z_1 = -0.7103788693127154 + 1.1068452983838488\,i$$

$$z_2 = -0.7103788693127157 - 1.106845298383849\,i$$

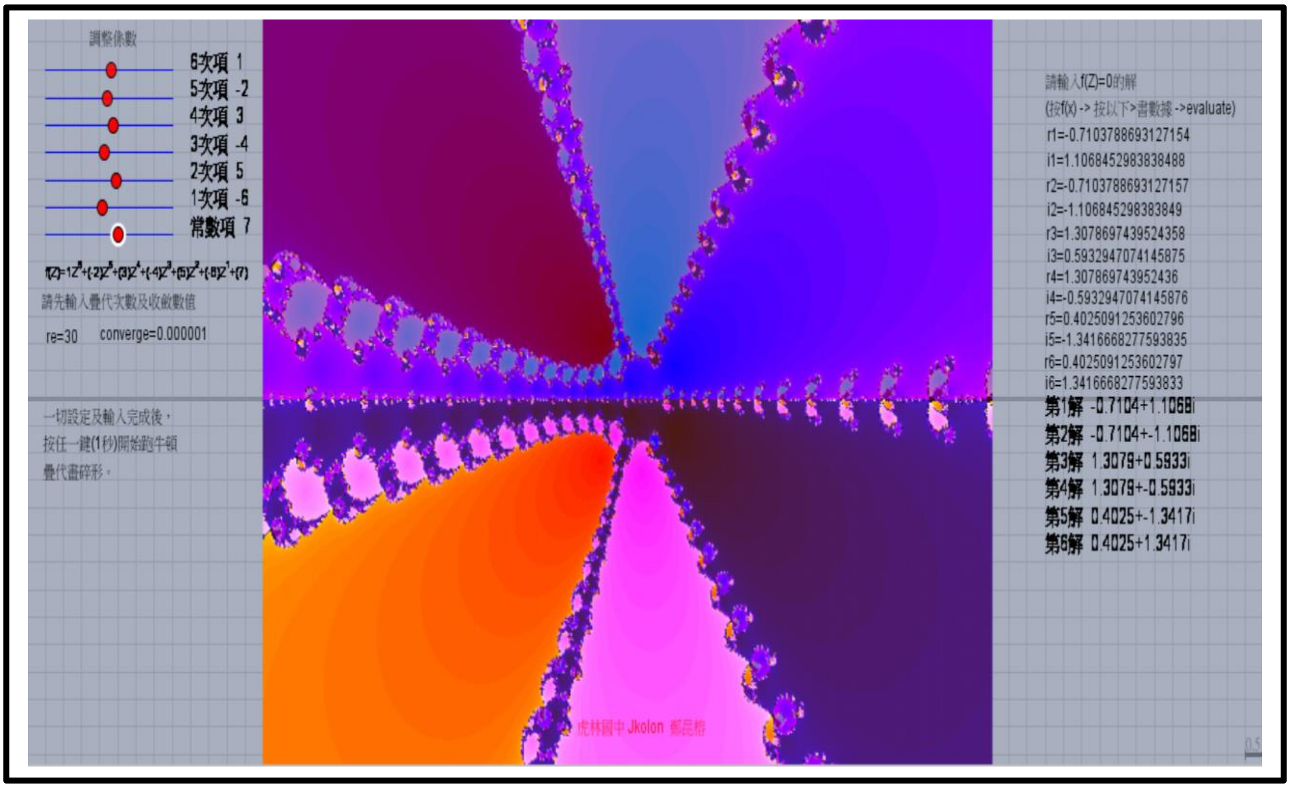
$$z_3 = 1.3078697439524358 + 0.5932947074145875\,i$$

$$z_4 = 1.307869743952436 - 0.5932947074145876\ i$$

$$z_5 = 0.4025091253602796 - 1.3416668277593835\ i$$

$$z_6 = 0.4025091253602797 + 1.3416668277593833\ i$$

碎形幾何之美為



陸、討論

一、 在實行標記符號尋找軌跡法之前，嘗試過導數法的策略，在 carmetal 中採單純的實部及虛部分向導數法，曾由學生思考採行，迭代次數就明顯很多但相當精確。在 cinderella 中繪圖作用是由老師設計採行二維度的牛頓法去迭代收斂至已知的解，其迭代次數就明顯減少(更快)。以下為第一個例子找第一個解時，兩種方法的迭代次數比較。初始值一樣但收斂的解不一樣。

初始值 皆是 0.598145755313+0.625724608582 i					
實部及虛部分向導數法			二維度的牛頓法		
迭代次數(m)	$\lvert f(z_m)\rvert$	z_m	迭代次數(m)	$\lvert f(z_m)\rvert$	z_m
			1	4.172226283491135	1.2170506249607662+0.8298002936708142 i
			2	72.38643344128158	1.0217258510995462+0.6967260895567002 i
			3	23.07502338562287	0.8859238099632155+0.5837526022872919 i
	0.058391882728764714	-0.1360064265585886+0.9136079143581403 i	4	6.782772313185595	0.8205464023810076+0.49464131014991186 i
			5	1.5804827694453722	0.8186073229794129+0.45181113655590643 i
			6	0.17959648768138045	0.8236071635344312+0.4496184940753597 i
	2.589462819655575e-15	-0.9154139525956653 -0.19361312512909334 i	7	0.002779494689292818	0.8235799255319504+0.44969665542670983 i
	3.580361673049448e-15	-0.9154139525956654 -0.19361312512909346 i	8	6.453648731002189e-7	0.8235799441493249+0.4496966601928115 i
175 次以上	2.6645352591003757e-15	-0.9154139525956655 -0.1936131251290932 i	9	3.263980166148343e-14	0.8235799441493239+0.44969666019281146 i

二、 經過以上說明比較!可知用導數法(兩者)拿來求解是不恰當的，只能指引到某一個解，並非全面性的，因為其充滿不確定性。

三、 標記符號尋找軌跡法雖然精確度沒有導數法那樣高，但可以在操作過程程中將 carmetal 的複數平面持續放大軌跡尋根，可以得到 $|\mathbf{f}(\mathbf{z}_m)| < \mathbf{0.0001}$，甚至可以更小，而且是全面性求解一次到位。所得到的解一樣可以處理畫出美麗的碎形圖案。

四、 在處理時一定要用向量及面積法實際試驗出理想初值的最大允許半徑 R，以便標記符號尋找軌跡法使用，才可以找到所有解。

五、 由研究結果的各示例中，只要方程式的係數全為實數，則次數為偶數次時，解必為共軛複數形式。次數為奇數次時，解必有一實數解，其餘為共軛複數形式。但只要方程式的係數有複數形式出現，則解就不會呈現共軛複數形式或實數解，一定是不同的複數解。

柒、結論

一、 標記符號尋找軌跡法絕對是最適當的方法，可以一次到位找到每一個解。

二、 不管解是共軛複數形式或實數解或完全不相關的複數形式解，它在碎形圖形中皆是充滿藝術及自然、自我相似的呈現，可說是一種數學之美。

三、 若想一探自己思考的複係數 n 次方程式(係數自己設計)的解產生的奧妙圖形如何?可以馬上試一下。

捌、參考資料及其他

一、 複數及複變函數的圖形表徵在數學算板中的實踐 林保平 數學傳播 44 卷 4 期, pp. 65-77

https://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d444/44409.pdf

二、 複數法在中學數學中的應用 葉文傑 數學傳播 37 卷 2 期, pp. 80-92

http://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d372/37208.pdf

四、 函數求根：牛頓法（含廣義牛頓法）

http://boson4.phys.tku.edu.tw/numerical_methods/nm_units/root_finding_Newton-Raphson.htm