新竹市第四十一屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國小組

作品名稱：造房子解密

關 鍵 詞：點格棋、圍地盤、極限棋局

編號：

造房子解密

摘要

本研究主要探討造房子（又稱點格棋）對戰遊戲的規律性，找出兩種遊戲規則下，不同棋局的優勢方及對戰策略。研究發現：

一、不形成ㄇ字的極限棋局，後續走法具有共通性，可從已連線數判斷走完者、得第 1 分者，及在不可多連遊戲規則下得最後 1 分者。

二、找出 2×3～2×5 的優勢方。

三、找出 N×M 棋局總點數、總線數、總格數的計算公式。

四、找出 2×N～5×N 最大已連線數極限棋局的連線圖形基本單位、已連線數計算公式、可得第 1 分者、及兩種遊戲規則的優勢方。

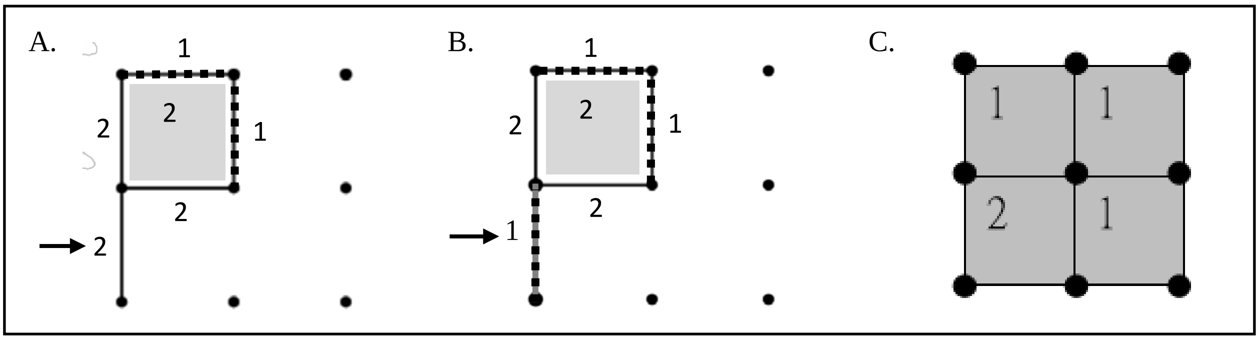
五、找出 N×M 的奇偶性與總格數、總線數、及對戰結果間的關係。

六、找出可創造對己方優勢的對戰策略。

壹、 前言

一、 研究動機

學校數學社團的老師，帶我們玩了許多數學小遊戲，在這些遊戲當中，我們最喜歡、最感興趣的就是「造房子」，又稱「點格棋」。這是一個形成最多格子數的人就贏了的數學小遊戲，玩法是：先在紙上畫下排列成矩形方陣的棋盤格點數，對戰雙方輪流在相鄰的上下兩點之間連直線，或左右兩點間連橫線。當連出的線圍成一個封閉的格子時，玩家便佔有此一方格。此時可以選擇兩種玩法：一種是連成格的玩家再多連一條線（如圖 1A 中玩家 2 可多連箭頭所指的線），直到連的線沒有形成封閉格子時，則換對方連線；另一種玩法則是不管連線有沒有形成格子，每個玩家每次只能連一條線、不能再多畫（如圖 1B）。最後，當任一玩家都無法再連線，計算雙方各自擁有的格子數，圍成最多格子的人就贏了。例如圖 1C 先手有 3 格，後手有 1 格，所以是先手贏了。



(圖 1)造房子遊戲規則示意圖（左：可多連線；右：不可多連）

我和別人玩了很多次，都是我輸了。我們還找到了一個可以與電腦對戰的網站，但是每次跟電腦玩也都屢戰屢敗。因此，我們想要破解潛藏在此遊戲中的規律，並找出獲勝秘訣。

二、 文獻探討

我們用 Google 查詢造房子和點格棋的科展，發現有三篇造房子的科展報告（見表 1）：

(表 1)造房子相關科展報告研究內容比較表

科展屆數	科展標題	主要研究內容
中華民國第 38 屆中小學科學展覽會初小組	「捨得！捨得！有捨才有得！！」中國民俗遊戲「造房子」之最佳策略探討	1. 遊戲規則為：連出格子後可再多連 1 條線。但是文章中並沒有說明是否可以連續多畫，還是只能多連一次，而且舉例的走法也很有問題。 2. 把尚未形成得分條件的圖形加以分類，並分析走法。 3. 有討論雙方應該怎麼去創造對自己有利的棋局。 4. 發現讓先技巧：先讓對方得分（格子），以讓自己連續得更多分（格子）而獲勝的機會。 5. 不同的棋局有不同的讓先技巧，要靠經驗累積。對戰時要看遠一點，有捨（讓先）才有得。但是如果經驗不足、不熟悉各種棋局的讓先技巧，有捨也不一定有得。
中華民國第 50 屆中小學科學展覽會國中組	圍地盤遊戲的必勝策略	1. 遊戲規則為：無論有沒有連出格子，每人每輪只能連一條線、不可多連線。 2. 探討 3×3～3×6 以及 2n×2n 棋局的必勝策略。 3. 利用窮舉法來探討所有可能棋局。 4. 必勝策略未進行定義。 5. 未延伸至 n×m。
中華民國第 39 屆中小學科學展覽會國小組	妙點連框，框成金	1. 遊戲規則為：連出格子後可再多連 1 條線。 2. 找出 3 × 3 棋盤先手、後手的必勝策略。 3. 分析 4 × 4 棋盤的必勝策略。 4. 分析 5 × 5、6 × 6 棋盤先、後手的必勝狀況或平手狀況。 5. 未延伸至長方形棋盤或更大的棋盤。 6. 有提供一個能和電腦對戰的網站資訊，可以讓人與電腦在 2×2～10×10 的棋局上對戰。

綜合上面的研究，可以發現到關於造房子的科展，目前大概的研究成果如下：

1.用窮舉法或有玩過的對戰棋局來分析走法，以找出特定大小棋局的必勝策略。

2.並沒有把棋局範圍再擴大延伸到探討 N×M。

3.每一篇研究都只針對一種遊戲規則來分析，沒有同時探討比較 2 種遊戲規則。

4.沒有去探討如何計算不同大小棋局的總點數、總線數與總格數。

所以我們想要探討比較在 2 種不同遊戲規則下，有什麼可以延伸到 N×M 棋局的共通規律性。例如：如何計算所有棋局的總點數、總線數、總格數，決定能否連出格子來得分的關鍵因素是什麼？怎樣將每一步的連線結果作分類以便分析？以及如何快速判斷出優勢方？

三、 研究目的

1. 分析 2x3、2x4、2x5 極限棋局的所有可能走法，找出兩種遊戲規則的優勢方。
2. 找出計算 N×M 棋局總點數、總線數、以及總格數的公式。
3. 探索 2×N～5×N 最大已連線數極限棋局的優勢方。
4. 探索可延伸至 N×M 棋局的規律性及對戰策略。

貳、 研究設備及器材

1. 研究記錄用具：紙、筆本、電腦、Microsoft Word。
2. 相關軟體與網站：Geogebra、點格棋遊戲網站（http://dotsandboxes.org/）。

參、研究過程、方法與結果

一、不形成ㄇ字的極限棋局的定義及與連出格子的關係

若下一步就會形成ㄇ字的圖形，我們就稱此棋局為「不形成ㄇ字的極限棋局」。

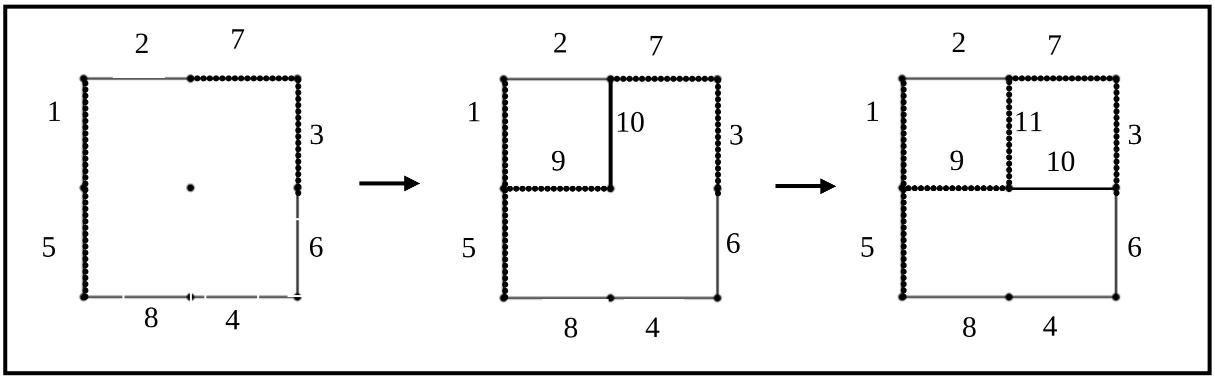
以圖 2 左為例，此棋局的下一步輪到先手，不管連哪一條線都會形成ㄇ字，這種開始會出現ㄇ字圖形的前一步棋局（如圖 2 左），就稱為「不形成ㄇ字的極限棋局」，簡稱「極限棋局」。

極限棋局的下一步因為會形成至少 1 個ㄇ字（例如圖 2 中的第 9 步），接下來就會開始得到連出格子的機會（例如圖 2 中的第 10 步）。

我們發現：

1. 要連出格子前，先要有形成至少 1 個ㄇ字圖形。
2. 因為走到極限棋局的玩家，會讓對手的連線形成ㄇ字，輪到自己時就可以得到連出格子的機會。所以走完極限圖的玩家，就一定會得到至少能連出 1 個格子的機會。

3. 連出來的格子數：1 條線有可能只能連出 1 個格子（例如圖 2 中的第 10 步），也可能可以連出 2 個格子（例如圖 2 右的第 11 步）。



（圖 2）極限棋局及ㄇ字圖形示意圖

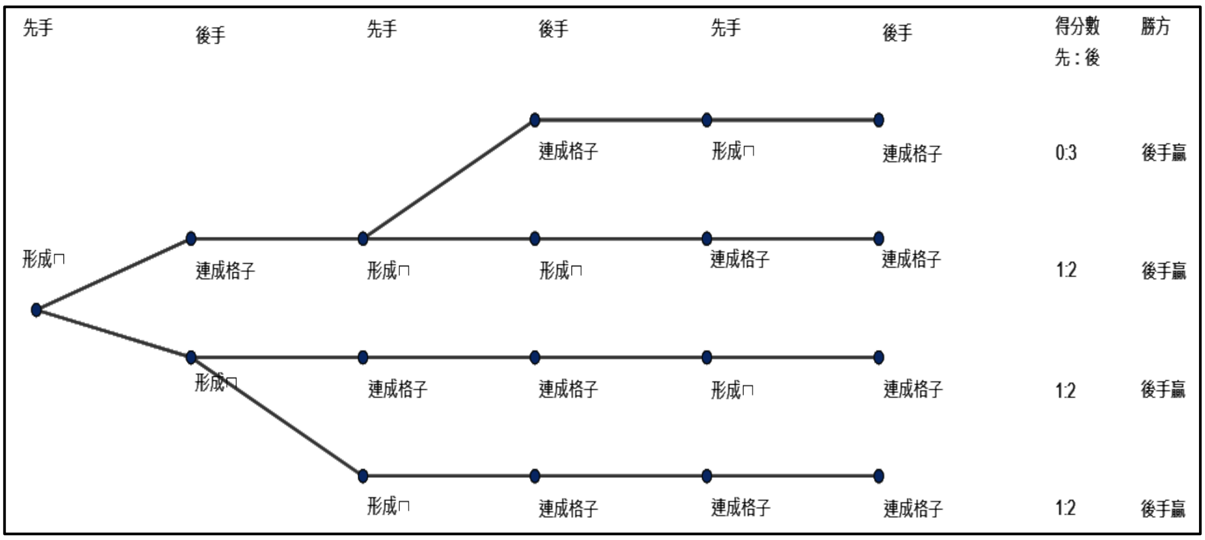
二、探討2×4、2×5極限棋局不可多連規則下的優勢方

至少要是≧2×2的棋局，才能連出格子來。但是2×2只能連出 1 個格子，由後手得分獲勝；2×3只能連出 2 個格子，棋局太過於簡單，不值得研究。因此我們決定從2×4開始研究，再擴大到2×5的棋盤，分析雙方採用每輪只能連 1 條線（不可多連）的遊戲規則，當走到不形成ㄇ字的極限棋局之後的所有可能走法，來找出優勢方。

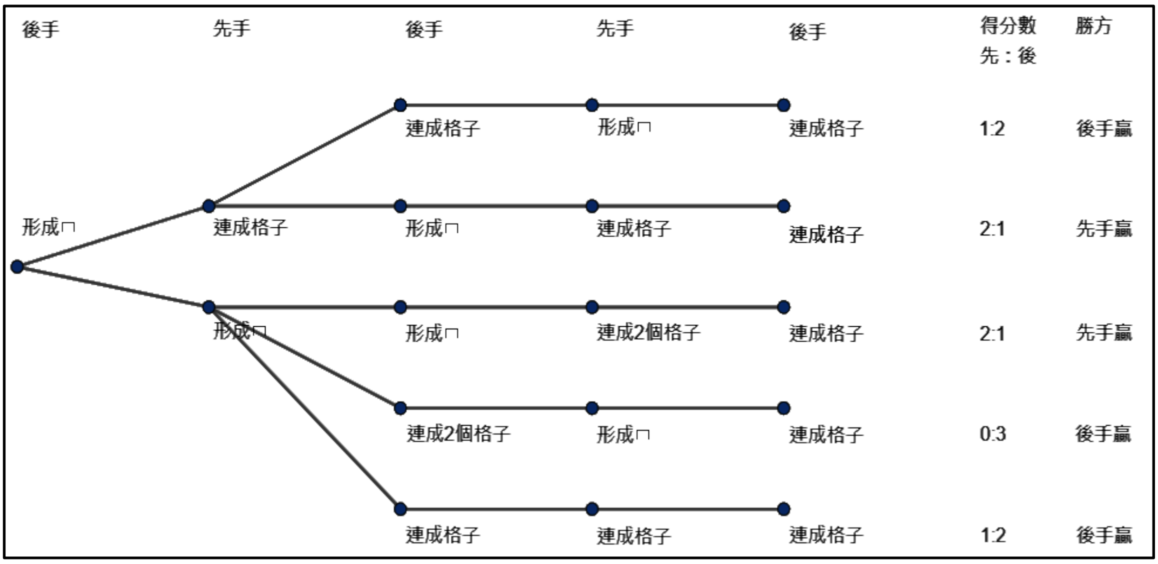
(一) 2×4極限棋局的可能走法與勝方分析

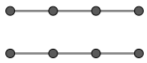
2×4可連出的總格子數是 3 格，在不連成ㄇ的情況下，剩下未連的線數最少是總格數+1＝4 條線，最多是總格數的兩倍＝6 條線。每種已連線數，各找 1 個例子，將不合理的對戰走法排除掉後，分析後續所有可能走法。

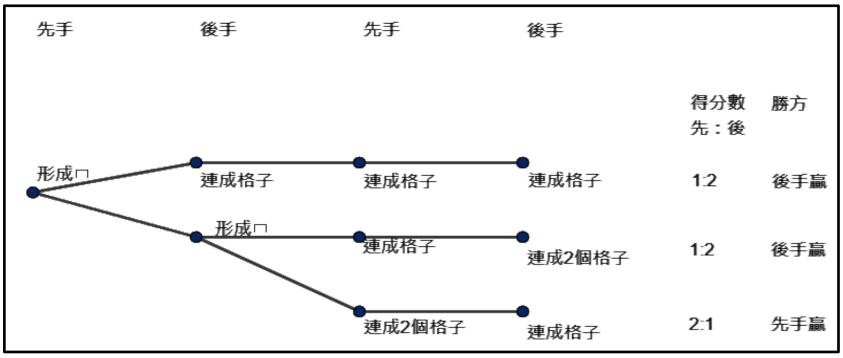
1.已連 4 條、剩 6 條：例圖 



2.已連 5 條、剩 5 條：例圖 



3.已連 6 條、剩下 4 條：例圖 

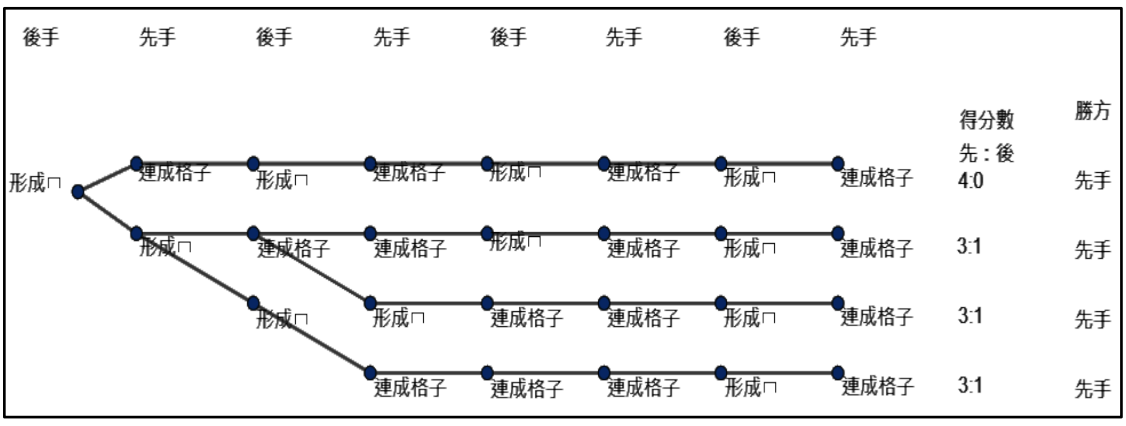


【研究發現】

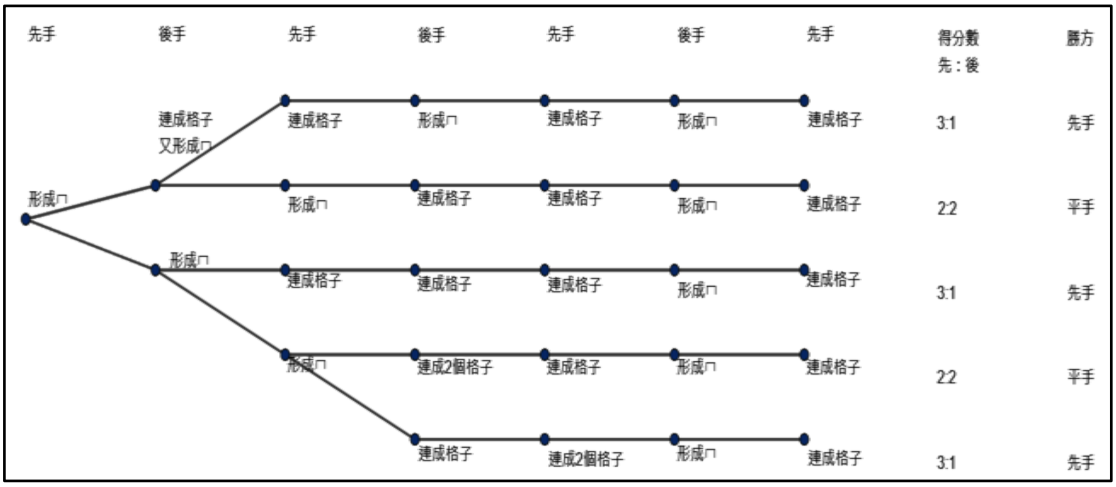
2×4極限棋局，我們分析的 3 個例子，共有 10 種可能走法，其中先手贏的有 4 種、後手贏的有 6 種，後手較佔優勢。

(二) 2×5極限棋局的可能走法與勝方分析

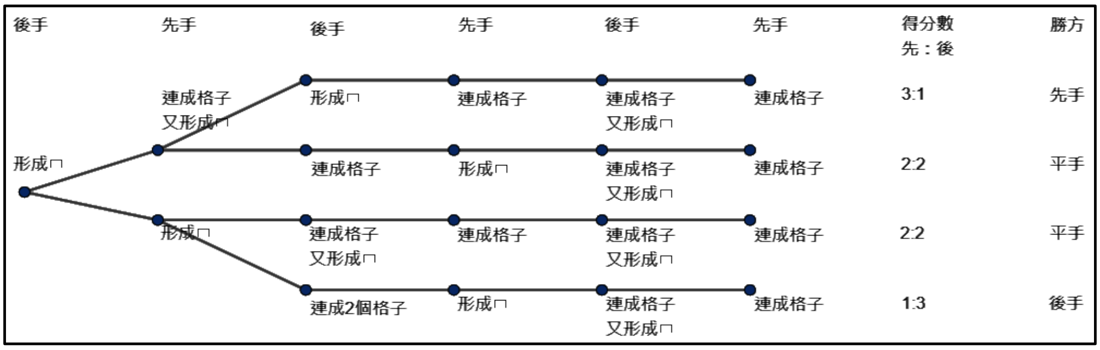
1.已連 5 條、剩下 8 條：例圖 



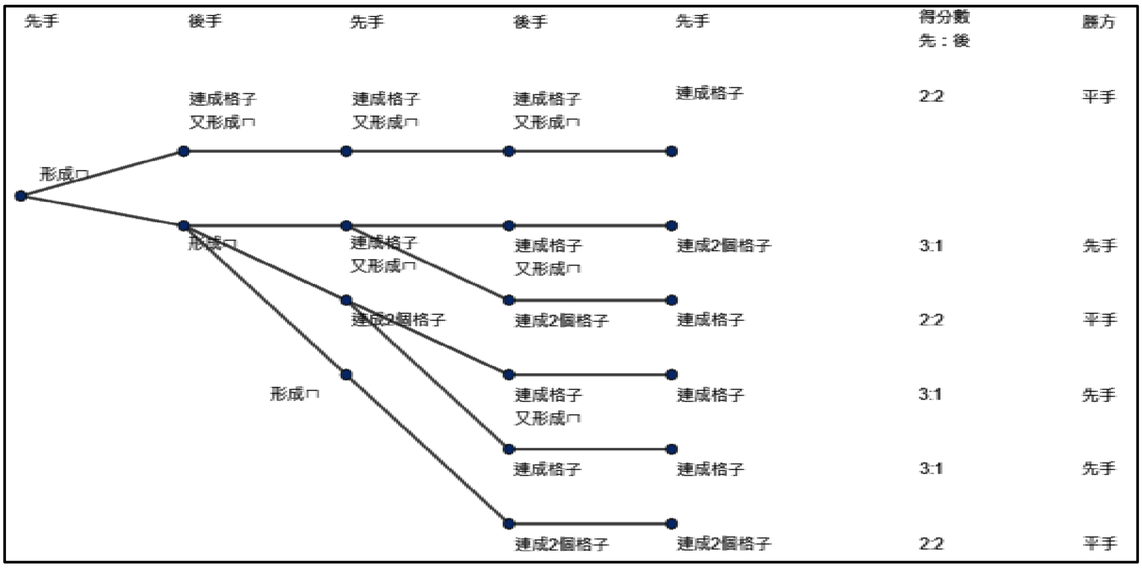
2.已連 6 條、剩下 7 條：例圖 



3.已連 7 條、剩下 6 條：例圖 



4.已連 8 條、剩下 5 條：例圖 



【研究發現】

2×5的極限棋局，我們分析了 4 個例子，共有 19 種可能走法，其中先手贏的有 11 種、後手贏的只有 1 種、平手的有 7 種，先手較佔優勢。

上面的分析，我們針對每種已連線數，只找出一種極限棋局的例子來分析後續所有可能走法，排除掉不合理的走法後，歸納出：

$\boxed{2 \times 4\text{ 後手較佔優勢、}2 \times 5\text{ 則是先手較佔優勢}}$。

因為兩種不同大小的棋局，優勢方並不相同，也很難判斷要怎樣走才可以確保優勢方必能獲勝。加上每種連線數只是用一個例子來分析，如果改變極限棋局的連線方式，後續合理走法的可能性便也會有所不同。所以這樣的分析方法，很難找出能用來判斷各種不同大小棋盤的優勢方，也不容易找出必勝策略。

我們試著去比較2×4和2×5這兩種棋盤大小的極限棋局後續走法，發現有下列幾個共通性：

1. 走完極限棋局時，因為還沒有任何一方連出格子而得分，雙方每輪都只能連 1 條線。所以從已連線數，便可以判斷後續該輪到哪一方。
2. 不管剩下幾條線、也不管已經連出怎樣的圖形，極限棋局後續所連出的每一條線，其作用共有「形成ㄇ」、「連成格子」或「連成格子同時又形成ㄇ」這三種情形。
3. 只要有形成ㄇ，下一步至少可以連成 1 個格子而得分。
4. 如果有出現 1 步就連成 2 個格子的情況，前面一定至少要完成極限圖形、且有出現 2 次形成ㄇ的下一步並沒有連成格子的情形。
5. 最後一條線，一定會是連成 1 個或 2 個格子。所以輪到連最後一條線的玩家，至少可以得到 1 個格子。
6. 因為採用不可多連的規則，如果得知棋局的總線數，就可以預測走完極限棋局的玩家，以及後續連出格子時會分配給哪一方，即使不知道具體是連哪一條線，或是連成怎樣的圖形，只要依據連線作用是形成ㄇ字或連出格子，便能分析雙方各得到多少格子、最後會由誰獲勝。

(三)分析2×3、2×4、2×5所有可能對戰結果與優勢方

因為走到極限棋局時，還沒有任何一方連出格子而得分，所以不管是採用哪一種遊戲規則，雙方每輪都只能連 1 條線。要等到極限棋局之後，有連出格子時，才會因為是採用「可多連 1 條線」或「不可多連」的遊戲規則，而有不同的結果。

我們試著從極限棋局開始，不考慮可能的連線圖形和對戰走法的合理性，一步一步列出所有可能的連線走法，依序分配給先手或後手，判斷出雙方各可輪到連出幾格、勝方為誰。分析結果見表 2。

(表 2) 2 × 3～2 × 5所有可能對戰結果分析表

棋局大小	已連線數(條)	走完極限棋局者	剩餘線數(條)	後續可能走法 ($\boxed{\text{2 格}}$表示 1 條線連 2 格)	遊戲規則			
					可多連		不可多連	
					勝方	優勢方	勝方	優勢方
2×3	3	先手	4	1.ㄇ格ㄇ格 2.ㄇㄇㄇ $\boxed{\text{2 格}}$	1.平手 2.先手	先手	1.先手 2.先手	先手
	4	後手	3	1.ㄇ格格 2.ㄇㄇ $\boxed{\text{2 格}}$	1.後手 2.先手	機會均等(實為後手)	1.平手 2.先手	先手
2×4	4	後手	6	1.ㄇ格ㄇ格ㄇ格 2.ㄇ格ㄇㄇ格格 3.ㄇㄇ格格ㄇ格 4.ㄇㄇ格ㄇ格格 5.ㄇㄇㄇ格格格	1.後手 2.後手 3.先手 4.先手 5.後手	後手	1.後手 2.後手 3.後手 4.先手 5.後手	後手
	5	先手	5	1.ㄇ格格ㄇ格 2.ㄇ格ㄇ格格 3.ㄇㄇ格格格 4.ㄇㄇㄇ $\boxed{\text{2 格}}$格 5.ㄇㄇㄇ格 $\boxed{\text{2 格}}$ 6.ㄇㄇ $\boxed{\text{2 格}}$ㄇ格 7.ㄇㄇ格ㄇ $\boxed{\text{2 格}}$ 8.ㄇ格ㄇㄇ $\boxed{\text{2 格}}$	1.先手 2.後手 3.後手 4.先手 5.先手 6.後手 7.先手 8.先手	先手	1.後手 2.先手 3.後手 4.先手 5.後手 6.後手 7.後手 8 後手	後手
	6	後手	4	1.ㄇ格格格 2.ㄇㄇ格 $\boxed{\text{2 格}}$ 3.ㄇㄇ $\boxed{\text{2 格}}$格	1.後手 2.先手 3.先手	先手	1.後手 2.後手 3.先手	後手
2×5	5	先手	8	1.ㄇ格ㄇ格ㄇ格ㄇ格 2.ㄇ格ㄇ格ㄇㄇ格格 3.ㄇ格ㄇㄇ格格ㄇ格 4.ㄇ格ㄇㄇ格ㄇ格格 5.ㄇㄇ格ㄇㄇ格格格 6.ㄇㄇ格ㄇ格ㄇ格格 7.ㄇㄇ格ㄇ格格ㄇ格 8.ㄇㄇ格格ㄇ格ㄇ格 9.ㄇㄇ格格ㄇㄇ格格 10.ㄇㄇㄇ格ㄇ格格格 11.ㄇㄇㄇ格格ㄇ格格 12.ㄇㄇㄇ格格格ㄇ格 13.ㄇㄇㄇㄇ格格格格	1.平手 2.後手 3.先手 4.平手 5.後手 6.後手 7.平手 8.後手 9.後手 10.後手 11.平手 12.先手 13.後手	後手	1.先手 2.平手 3.先手 4.平手 5.平手 6.後手 7.平手 8 先手 9 平手 10.先手 11 平手 12 先手 13 平手	先手

(下頁續)

(表 2) 2 × 3～2 × 5所有可能對戰結果分析表(續)

棋局大小	已連線數(條)	走完極限棋局者	剩餘線數(條)	後續可能走法 ($\boxed{\text{2 格}}$表示 1 條線連 2 格)	遊戲規則 可多連 勝方	可多連 優勢方	不可多連 勝方	不可多連 優勢方
2×5	6	後手	7	1.ㄇ格ㄇ格ㄇ格格	1.後手	先手	1.後手	先手
				2.ㄇ格ㄇㄇ格格格	2.後手		2.平手	
				3.ㄇㄇ格ㄇ格格格	3.後手		3.先手	
				4.ㄇㄇ格格ㄇ格格	4.平手		4.平手	
				5.ㄇㄇ格格格ㄇ格	5.先手		5.先手	
				6.ㄇㄇ格ㄇ格ㄇ $\boxed{\text{2 格}}$	6.先手		6 先手.	
				7.ㄇㄇ格ㄇㄇ格 $\boxed{\text{2 格}}$	7.先手		7.先手	
				8.ㄇㄇ格ㄇㄇ $\boxed{\text{2 格}}$格	8.先手		8 平手	
				9.ㄇㄇ $\boxed{\text{2 格}}$ㄇ格ㄇ格	9.先手		9.先手	
				10.ㄇㄇ $\boxed{\text{2 格}}$ㄇㄇ格格	10.先手		10.先手	
				11.ㄇㄇ格ㄇ $\boxed{\text{2 格}}$ㄇ格	11.平手		11.先手	
				12.ㄇㄇ格ㄇ格ㄇ $\boxed{\text{2 格}}$	12.先手		12.先手	
				13.ㄇㄇㄇ $\boxed{\text{2 格}}$ㄇ格格	13.平手		13.後手	
				14.ㄇㄇㄇ $\boxed{\text{2 格}}$格ㄇ格	14.後手		14.平手	
				15.ㄇㄇㄇ格 $\boxed{\text{2 格}}$ㄇ格	15.後手		15.先手	
				16.ㄇㄇㄇ格ㄇ $\boxed{\text{2 格}}$格	16.先手		16.後手	
				17.ㄇㄇㄇ格ㄇ格 $\boxed{\text{2 格}}$	17.先手		17.平手	
				18.ㄇㄇㄇㄇ格格 $\boxed{\text{2 格}}$	18.先手		18.先手	
				19.ㄇㄇㄇㄇ格 $\boxed{\text{2 格}}$格	19.先手		19.平手	
				20.ㄇㄇㄇㄇ $\boxed{\text{2 格}}$格格	20.先手		20.先手	
	7	先手	6	1.ㄇ格ㄇ格ㄇ $\boxed{\text{2 格}}$	1.先手	先手	1.先手	先手
				2.ㄇ格ㄇㄇ $\boxed{\text{2 格}}$格	2.先手		2.平手	
				3.ㄇㄇ格ㄇ $\boxed{\text{2 格}}$格	3.先手		3.後手	
				4.ㄇㄇ $\boxed{\text{2 格}}$ㄇ格格	4.平手		4.後手	
				5.ㄇㄇㄇ $\boxed{\text{2 格}}$格格	5.先手		5.先手	
				6.ㄇㄇㄇ格 $\boxed{\text{2 格}}$格	6.先手		6.平手	
				7.ㄇㄇㄇ格格 $\boxed{\text{2 格}}$	7.先手		7.先手	
				8.ㄇㄇㄇ $\boxed{\text{2 格}}$ㄇ $\boxed{\text{2 格}}$	8.平手		8 先手	
				9.ㄇㄇㄇㄇ $\boxed{\text{2 格 2 格}}$	9.後手		9 平手	
				10.ㄇㄇ $\boxed{\text{2 格}}$ㄇㄇ $\boxed{\text{2 格}}$	10.後手		10.平手	

(下頁續)

(表 2) 2×3～2×5所有可能對戰結果分析表(續)

棋局大小	已連線數(條)	走完極限棋局者	剩餘線數(條)	後續可能走法 ($\boxed{\text{2 格}}$表示 1 條線連 2 格)	遊戲規則			
					可多連		不可多連	
					勝方	優勢方	勝方	優勢方
2×5	8	後手	5	1.ㄇ格格格格 2.ㄇㄇ格格 $\boxed{\text{2 格}}$ 3.ㄇㄇ格 $\boxed{\text{2 格}}$格 4.ㄇㄇ $\boxed{\text{2 格}}$格格 5.ㄇㄇㄇ $\boxed{\text{2 格 2 格}}$ 6.ㄇㄇ $\boxed{\text{2 格}}$ㄇ $\boxed{\text{2 格}}$	1.後手 2.先手 3.平手 4.先手 5.後手 6.平手	先手	1.平手 2.先手 3.平手 4.先手 5.平手 6.先手	先手

【研究發現】

1. 表 2 中，不管極限棋局的圖形，也不管走法是否合理，只考慮極限棋局之後所有可能走法的分析結果，和我們前面找 1 個例子來分析的結果，所得到的優勢方差不多相同。只有在 2×5 大小已連 7 條、剩 6 條、不可多連的狀況下，前面用的 1 個例子是平手，表 2 得出的優勢方是先手，不過平手的機會也很大。
2. 表 2 中，2×3 大小已連 4 條、剩 3 條、可多連的狀況下，雖然看是先後手的優勢機會均等，但實際上卻是由後手控制棋局的結果，因此其實優勢方是後手。
3. 在不可多連的情況下：

   ①2×奇數棋局，總線數是奇數，優勢方為先手。

   ②2×偶數棋局，總線數是偶數，優勢方為後手。

所以，我們後續的研究，決定單純考慮每次連線最多只會連出 1 個格子、不會 1 條線就連出 2 個格子，且不讓先，也就是只要有形成ㄇ字，下一步能連出格子就連出格子，看看對戰結果會如何。

三、探索不同大小棋局的總點數、總線數、總格數

因為極限棋局的已連線數，可以決定後面還剩下多少條線，也能分析後續可能走法、輪流連出ㄇ字或格子時，最後誰會分配到最多的格子數而獲勝。所以我們需要找出棋局的總線數、總格數，以便分析極限棋局的已連線數和後續走法。

(一)分析不同大小棋局的點、線、格數量變化

我們試著改變棋局的大小，找出不同棋局的總點數、總線數以及總格數，觀察隨著棋局大小慢慢增加，這些數量有什麼規律性的變化，分析結果見表 3。

(表 3)不同大小棋局的點線格數量變化比較表

棋局大小	總點數	總線數	總格數
2×2	4	4	1
2×3	6	7	2
2×4	8	10	3
2×5	10	13	4
2×6	12	16	5
2×N 的公差	等差 2(＝棋局大小的前項)	等差 3	等差 1(＝棋局大小前項 2-1)
3×2	6	7	2
3×3	9	12	4
3×4	12	17	6
3×5	15	22	8
3×6	18	27	10
3×N 的公差	等差 3(＝棋局大小的前項)	等差 5	等差 2(＝棋局大小前項 3-1)
4×2	8	10	3
4×3	12	17	6
4×4	16	24	9
4×5	20	31	12
4×6	24	38	15
4×N 的公差	等差 4(＝棋局大小的前項)	等差 7	等差 3(＝棋局大小的前項 4-1)
5×2	10	13	4
5×3	15	22	8
5×4	20	31	12
5×5	25	40	16
5×6	30	49	20
5×N 的公差	等差 5(＝棋局大小的前項)	等差 9	等差 4(＝棋局大小的前項 5-1)
6×2	12	16	5
6×3	18	27	10
6×4	24	38	15
6×5	30	49	20
6×6	36	60	257
6×N 的公差	等差 6(＝棋局大小的前項)	等差 11	等差 5(＝棋局大小的前項 6-1)

從上表的中，可以發現到隨著改變棋局大小，總點數、總線數、總格數的變化值，具有等差的關係。

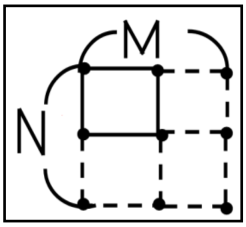
總點數、總格數的公差，和棋局大小的前項數字（直向排列的點數）有關。而總線數的公差，則是和棋局大小的後前項數字（橫向排列的點數）有關。

1. （x, N）總點數的公差是 x。
2. （x, N）總格數的公差是 x-1。

3. （x, N）總線數的公差：當 x＝2 時，總線數的公差就是 2+1=3，當 x＝3 時，總線數的公差就是 3+2=5，當 x＝4 時，總線數的公差就是 4+3=7，以此類推。所以（x.N）總線數的公差是 N+N-1＝2N-1。

(二)探索 N×M 棋局總點數、總線數、與總格數的計算公式

從上面的分析，我們只能看出不同大小棋局的總點數、總線數、總格數，和棋局直向或橫向排列的點數之間，具有一定的關係，會隨著棋局的排列點數而有等差的變化。所以我們決定用 N 和 M 來代表棋局的前項（直向點數）與後項（橫向點數），觀察這兩項會如何決定出總點數、總線數，以及總格數。



（圖 3）N×M 棋局示意圖

- N×M 的總點數：N×M 的棋局，一排有 N 個點、共有 M 排，所以總共有 N×M 個點。
- N×M 的總線數：每 2 個相鄰的點之間才能畫一條線，每一排的一端就會有一個點沒有相鄰的點可以再與之連線。以直排來說，N 個點就只能連 N-1 條橫線，再乘上 M 排就是所有直向線數。同理，橫向共有 M 個點，能連出所有橫向的線是 M-1 條、再乘上 N 排就是所有橫向線數。兩者相加，就可以得出總線數，共有：(N-1)×M+(M-1)×N 條線。
- N×M 的總格數：橫向、直向各 2 個相鄰的點，上下左右各連一條線，就可以圍出 1 個面積為 1 的格就像計算正方形或長方形的面積公式，總格數＝邊長×邊長或長×寬。而正方形的邊長，或長方形的長、寬，分別等於直向一排可連 N-1 條線，和橫向一排可能連 M-1 條線。兩者相乘就是總格數： (N-1)×(M-1)。

【結論 1】

N×M 棋局的點線格數量計算公式：

①總點數＝N×M

②總線數＝(N-1) ×M+(M-1) ×N

③總格數＝(N-1)×(M-1)

當我們要分析不同棋局大小的走法時，就不用耗費許多時間去實際畫出圖形來計算總點數、總線數和能連出來的總格子數，只要應用這個公式就能快速計算出來了。

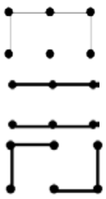
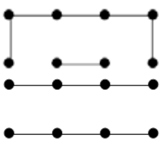
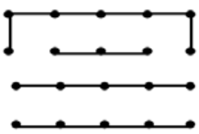
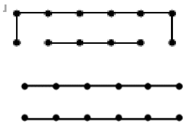
四、探索最大已連線數極限棋局的優勢方

從表 2 可以發現，已連線數最多、剩下最少可連線數的棋局，後續走法的可能性變化較少，而且除了剛開始的連線不能連出格子得分之外，後面幾乎都是可以連出格子得分的情形。所以如果我們可以找出不同棋局的最大已連線數（也就是剩下最少線數），或許可以更容易分析後續走法有沒有什麼共通的結果。

(一)分析 2×N 已連線數最大值的極限棋局優勢方

所以我們先試著找出 2×3～2×6 最大連線數的可能極限圖形，並分析後續連線走法，結果見表 4。

(表 4) 2×3～2×6 最大連線數的可能極限圖形與對戰結果分析表

棋局大小	連線圖	最大已連線數(條)	走完者	剩餘線數	後續連線走法 ＊註：①× n：重複同樣走法 n 次 ②$\boxed{2格}$：1 次連 2 格	遊戲規則與勝方	
						可多連	不可多連
2×3 總線數：7 總格數：2	1. 2. 3. 	4	後手	3	1.ㄇ格格 2、3.同 1	後手	平手
2×4 總線數：10 總格數：3	1. 2. 	6	後手	4	1、2 ㄇ(格×3)	1、2 後手	1、2 後手
2×5 總線數：13 總格數：4	1. 2. 	8	後手	5	1、2 ㄇ(格×4)	1、2 後手	1、2 平手
2×6 總線數：16 總格數：5	1. 2. 	10	後手	6	1.、2.ㄇ(格×5)	1、2 後手	1、2 後手

【研究發現】

1. 2×N 的最多連線數的極限圖形，可為 1 直線、L 形或ㄇ字形。主要是將上下兩排的點連成斷開的兩條線，或是可以在側面連接上下兩排的點，但是還是斷開成兩條線。而最大已連線數都是偶數、由後手走完。
2. 最多連線數＝2N－2，都是偶數，由後手連出極限圖。剩餘線數＝N。
3. 因為後手連完最多連線數之後，後續走法都是連出 1 個ㄇ之後，後面的每一條線都是連

出 1 個格子。所以如果是可多連的遊戲規則，後手必勝。因為最多連線數都是由後手完成極限圖，後續由先者連出ㄇ之後，都由後手得到格子。

4. 我們前面分析 2×3～2×5 的極限棋局所有可能走法，當 N 是奇數時，優勢方是先手，和我們這裡的分析結果（平手）不同。因為前面只是列出可能性，並沒有考慮實際上是不是有這那樣的連線圖形。

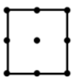
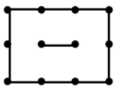
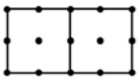
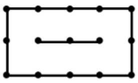
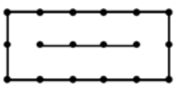
5. 若遊戲規則是不可多連、且極限棋局是已連最多條線數：

①當 N 是奇數時，總格數 N-1 會是偶數，雙方輪流得分，就會平手。

②當 N 是偶數時，總格數 N-1 會是奇數，後手會獲勝。

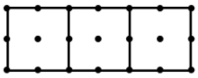
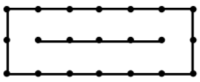
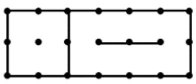
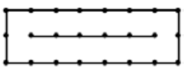
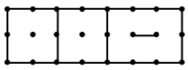
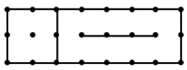
(二)分析 3×N 已連線數最大值的極限棋局優勢方（結果見表 5）

(表 5) 3×3～3×6 最大連線數的可能極限圖形與對戰結果分析表

棋局大小	連線圖	最大已連線數(條)	走完者	剩餘線數	後續連線走法 ＊註：①× n：重複同樣走法 n 次 ②2 格：1 次連 2 格	遊戲規則與勝方：可多連	遊戲規則與勝方：不可多連
3×3 總線數：12 總格數：4		8	後手	4	ㄇ格格 2 格	後手	後手
3×4 總線數：17 總格數：6		11	先手	6	ㄇ格×4 2 格	先手	先手
3×5 總線數：22 總格數：8	1.  2. 	14	後手	8	1.(ㄇ格格 2 格) × 2 2.ㄇ格× 6 2 格	1.平手 2.後手	1.後手 2.後手
3×6 總線數：27 總格數：10	1.  2. 	17	先手	10	1.ㄇ格× 8 2 格 2-1 ㄇ格×4 2 格ㄇ格格 2 格 2-2 ㄇ格格 2 格 ㄇ格×4 2 格	1.先手 2-1 先手 2-2 後手	1.先手 2-1 先手 2-2 先手

（下頁續）

(表 5) 3×3～3×6 最大連線數的可能極限圖形與對戰結果分析表（續）

棋局大小	連線圖	最大已連線數(條)	走完者	剩餘線數	後續連線走法 ＊註：①× n：重複同樣走法 n 次 ② $\boxed{\text{2 格}}$：1 次連 2 格	遊戲規則與勝方	
						可多連	不可多連
3×7 總線數：32 總格數：12	1.  2.  3. 	20	後手	12	1.(ㄇ格格 $\boxed{\text{2 格}}$) × 3 2.ㄇ格×10 $\boxed{\text{2 格}}$ 3-1 ㄇ格格 $\boxed{\text{2 格}}$ ㄇ格×6 $\boxed{\text{2 格}}$ 3-2 ㄇ格×6 $\boxed{\text{2 格}}$ ㄇ格格 $\boxed{\text{2 格}}$	1.後手 2.後手 3-1 先手 3-2 後手	1.後手 2.後手 3-1 後手 3-2 後手
3×8 總線數：37 總格數：14	1.  2.  3. 	23	先手	14	1.ㄇ格×12 $\boxed{\text{2 格}}$ 2-1(ㄇ格格 $\boxed{\text{2 格}}$)×2 ㄇ格×4 $\boxed{\text{2 格}}$ 2-2 ㄇ格格 $\boxed{\text{2 格}}$ ㄇ格×4 $\boxed{\text{2 格}}$ ㄇ格格 $\boxed{\text{2 格}}$ 2-3 ㄇ格×4 $\boxed{\text{2 格}}$(ㄇ格格 $\boxed{\text{2 格}}$)×2 3-1 ㄇ格格 $\boxed{\text{2 格}}$ ㄇ格×6 $\boxed{\text{2 格}}$ 3-2 ㄇ格×6 $\boxed{\text{2 格}}$ ㄇ格格 $\boxed{\text{2 格}}$	1.先手 2-1 先手 2-2 先手 2-3 先手 3-1 後手 3-2 先手	1.先手 2-1 先手 2-2 先手 2-3 先手 3-1 先手 3-2 先手

【研究發現】

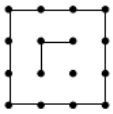
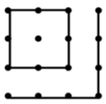
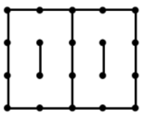
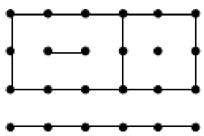
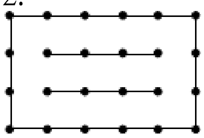
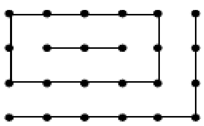
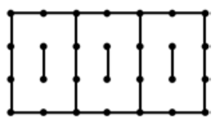
1. 3×N 的最大已連線數極限圖形，都是由兩種封閉成偶數格的基本單位所組成，每個基本單位後續各只有 1 種走法：
   ①2×2 的方框：ㄇ格格 $\boxed{\text{2 格}}$
   ②1 個大外框加內部 1 條直線：ㄇ格×(總格數-2) $\boxed{\text{2 格}}$
   ③每個基本單位的內部，剩餘線數都是偶數。
2. 最大已連線數＝3N－1，和 N 異奇偶。所以 N 為奇數時，由後手走完極限圖形；N 為偶數時，由先手走完極限圖形。
3. 可多連的遊戲規則優勢方：
   ① N 奇數：後手佔優勢，只有當(N－1)/2 是奇數、且極限圖形全由偶數個 2×2 的方框所組成時會平手，否則均由後手獲勝。

② N 偶數：3×4 先手獲勝，3×6 以上則雙方都有機會獲勝。

4. 不可多連的遊戲規則優勢方：N 奇數時後手獲勝；N 偶數時先手獲勝。

(三)分析 4×N 已連線數最大值的極限棋局優勢方（結果見表 6）

(表 6)4×4～4×7 最大連線數的可能極限圖形與對戰結果分析表

棋局大小	連線圖	最大已連線數(條)	走完者	剩餘線數	後續連線走法 ＊註：①× n：重複同樣走法 n 次 ② $\boxed{\text{2格}}$：1 次連 2 格	遊戲規則與勝方	
						可多連	不可多連
4×4 總線數：24 總格數：9	1.  2. 	14	後手	10	1-1 ㄇ格ㄇ(格×6) $\boxed{\text{2格}}$ 1-2 ㄇ(格×5)ㄇ格格 $\boxed{\text{2格}}$ 2-1 ㄇ格格 $\boxed{\text{2格}}$ㄇ(格×5) 2-2 ㄇ(格×5)ㄇ格格 $\boxed{\text{2格}}$	1-1 先手 1-2 後手 2-1 先手 2-2 後手	1-1 後手 1-2 後手 2-1 後手 2-2 後手
4×5 總線數：31 總格數：12		19	先手	12	[ㄇ(格×4) $\boxed{\text{2格}}$] ×2	平手	先手
4×6 總線數：38 總格數：15	1.  2.  3. 	22	後手	16	1-1 ㄇ(格×5)ㄇ(格×4) $\boxed{\text{2格}}$ㄇ格格 $\boxed{\text{2格}}$ 1-2 ㄇ格格 $\boxed{\text{2格}}$ㄇ(格×4) $\boxed{\text{2格}}$ㄇ(格×5) 1-3 ㄇ格格 $\boxed{\text{2格}}$ㄇ(格×5) $\boxed{\text{2格}}$ㄇ(格×4) 2-1 ㄇ(格×3)ㄇ(格×10) $\boxed{\text{2格}}$ 2-2 ㄇ(格×5)ㄇ(格×8) $\boxed{\text{2格}}$ 3-1 ㄇ(格×7)ㄇ(格×6) $\boxed{\text{2格}}$ 3-2 ㄇ(格×6) $\boxed{\text{2格}}$ㄇ(格×7)	1-1 後手 1-2 後手 1-3 後手 2-1 先手 2-2 先手 3-1 先手 3-2 後手	1-1 後手 1-2 後手 1-3 後手 2-1 後手 2-2 後手 3-1 後手 3-2 後手
4×7 總線數：45 總格數：18		29	先手	18	[ㄇ(格×4) $\boxed{\text{2格}}$] ×3	先手	先手

【研究發現】

1. 最大已連線數的圖形，可以分成 3 種基本圖形：

①2×2 的封閉區域：後續走法一定是ㄇ格格 2 格。

②大方框，裡面 1 或 2 條直線：2 條直線的大方框，後續走法可以有不同的變化。

③和上面兩種基本單位斷開的直線（1 直線或 L 形）。

2. 最大已連線數：N 奇數時＝4N-1，先手走完；N 偶數時＝4N-2，後手走完。

3. 可多連的遊戲規則：

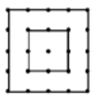
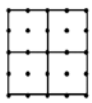
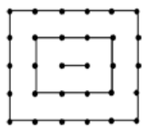
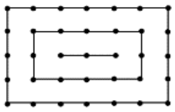
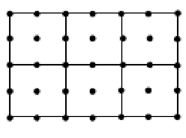
①當 N 為奇數時，若 N+1 是 4 的倍數，圖形可分為奇數個大方框，則為先手獲勝。若 N+3 是 4 的倍數，圖形可分為偶數個大方框，則平手。

②當 N 是偶數時，雙方都有機會獲勝。

4. 不可多連的遊戲規則：當 N 是奇數時，先手獲勝；當 N 是偶數時，後手獲勝。

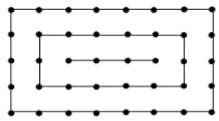
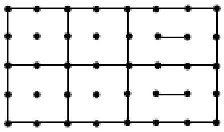
(四)分析 5×N 已連線數最大值的極限棋局優勢方（結果見表 7）

(表 7)5×5～5×8 最大連線數的可能極限圖形與對戰結果分析表

棋局大小	連線圖	最大已連線數(條)	走完者	剩餘線數	後續連線走法 ＊註：①× n：重複同樣走法 n 次 ②2 格：1 次連 2 格	遊戲規則與勝方	
						可多連	不可多連
5×5 總線數：40 總格數：16	1.  2. 	24	後手	16	1-1 ㄇ格格 2 格ㄇ (格×10) 2 格) 1-2 ㄇ(格×12) ㄇ格格 2 格 2.(ㄇ格格 2 格)×4	1-1 先手 1-2 後手 2.平手	1-1 後手 1-2 後手 2.後手
5×6 總線數：49 總格數：20	. 	29	先手	20	1-1 ㄇ(格×4)2 格ㄇ (格×12) 2 格 1-2 ㄇ(格×12)2 格 ㄇ(格×4) 2 格	1-1 先手 1-2 後手	1-1 先手 1-2 先手
5×7 總線數：58 總格數：24	1.  2. 	34	後手	24	1-1 ㄇ(格×6)2 格ㄇ (格×14) 2 格 1-2 ㄇ(格×14)2 格 ㄇ(格×6) 2 格 2.(ㄇ格格 2 格)×6	1-1 先手 1-2 後手 2.平手	1-1 後手 1-2 後手 2.後手

（下頁續）

(表 7)5×5～5×8 最大連線數的可能極限圖形與對戰結果分析表

棋局大小	連線圖	最大已連線數(條)	走完者	剩餘線數	後續連線走法 ＊註：①× n：重複同樣走法 n 次 ②2 格：1 次連 2 格	遊戲規則與勝方	
						可多連	不可多連
5×8 總線數：67 總格數：28	1.  2. 	39	先手	28	1-1 ㄇ(格×8)2 格ㄇ(格×16) 2 格 1-2 ㄇ(格×16)2 格ㄇ(格×8) 2 格 2-1[ㄇ(格×4)2 格]×2(ㄇ格格 2 格)×4 2-2 ㄇ(格×4) 2 格(ㄇ格格 2 格)×4 ㄇ(格×4) 2 格 2-3 ㄇ(格×4)2 格(ㄇ格格 2 格)×3 ㄇ(格×4) 2 格ㄇ格格 2 格 2-4（變化較多，後面省略）	1-1 先手 1-2 後手 2-1 平手 2-2 先手 2-3 平手	1-1 先手 1-2 先手 2-1 先手 2-2 先手 2-3 先手

【研究發現】

1.5×N 最大已連線數極限圖形，可以分成全部由下面兩種基本單位之 1 所組成，或是兩種混合出現：

①2X2 的方格封閉區域

②包圍成矩形封閉區域、最中心有 1 條和外框斷開的直線。

2. 5×N 最大已連線數＝5N-1，和 N 異奇偶性。當 N 是奇數時後手走完，當 N 為偶數時先手走完。

3. 5×N 每個封閉區域的基本單位都是偶數格子、偶數線，且第 1 條線連ㄇ、最後一條線連出 2 格。

4. 在可多連的遊戲規則下，因為雙方會輪流得到一個封閉區域的全部格子，所以隨著組成的基本單位所切分的區域格子數不同，以及輪到的玩家要選擇連哪一個封閉區域的線，會決定將該區域送給對方得分，而自己可以得到下一個區域的分數。所以雙方都有機會獲勝或平手。

5. 在不可多連的規則下，連出極限圖形者，可以在每個封閉區域得到第 1 個格子、且連最後 1 條線得到 2 個格子，因而可多得格子而獲勝。當 N 是奇數時由後手獲勝，若 N 為偶數時則由先手獲勝。

6. 極限圖的最大已連線數的計算公式和走完者的判定：

我們參考了 2×N～5×N 的分析結果，整合出下列計算公式，和走完者的判定：

(1) 當 N＝2、且 M＞2 時，最大已連線數：2N-2，均為偶數、後手走完。

(2) 當 N 為＞1 的奇數、且 M＞2 時，N×M 的最大已連線數＝N×M－1，最大已連線數和 M 異奇偶性。

①當 M 為奇數時，後手走完。

②當 M 為偶數時，先手走完。

(3) 當 N 為＞2 的偶數、且 M＞2 時，

①當 M 為奇數時，N×M 的最大已連線數＝N×M－1，先手走完。

②當 M 為偶數時，N×M 的最大已連線數＝N×M－2，後手走完。

(4) 從上面可以歸納 N、M 的奇偶性和走完者的關係：

【結論 2】

1. N×M（N≥2、M≥3）極限棋局最大已連線數：

(1) N＝2 時：2N-2

(2) N＞2 時：

① N、M 均為偶數時＝N×M－2

② N、M 至少有 1 個為奇數時＝N×M－1

2. N×M（N≥2、M≥3）最大已連線數極限棋局走完者：

(1)當 N、M 同奇偶性時，後手走完。

(2)當 N、M 異奇偶性時，先手走完。

7. 統整表 4～表 7 的研究發現，我們可以得出不可多連的遊戲獲勝方：

【結論 3】

N×M 棋局（N≥2、M≥3）最大已連線數極限棋局的優勢方：

1. 當 N、M 同奇偶性時，後手獲勝。

2. 當 N、M 異奇偶性：

①當 N＝2 時，雙方平手。

②當 N＞2 時，先手獲勝。

五、總格數、總線數與對戰結果的關係

(一)總格數和對戰結果的關係

1.總格數為奇數時不會平手；總格數為偶數時才有可能會平手。

2.N×M 總格數的計算公式為(N-1)×(M-1)，以此推測總格數的奇偶性與對戰結果能否和局（見表 8）：

(表 8)總格數的奇偶性與對戰結果分析表

N 的奇偶性	M 的奇偶性	總格數的奇偶性	是否和局的可能性
奇數	奇數	偶數	可能平手
奇數	偶數	偶數	可能平手
偶數	奇數	偶數	可能平手
偶數	偶數	奇數	必有輸贏

從表 8 中可以發現：

①只有在 N 和 M 都是偶數的情形下，總格數會是奇數，會必有輸贏。

②其他情形下，總格數均會是偶數，則有可能平手。

綜合結論 3，我們可以得出結論 4：

【結論 4】N×M 棋局（N≥2、M≥3）

1.當 N 和 M 都是偶數、且極限圖形是最大已連線數時，由後手獲勝。

2.其他情形下，總格數均會是偶數，則有可能平手。

(二)總線數和對戰結果的關係

1.最後一分獲得者

(1)連最後一條線一定是連出至少 1 個可以得分的格子，或是連出 2 個格子。

(2)當遊戲規則是不可多連時，我們可以從總線數的奇偶性，判斷連最後一條線的玩家（至少能得 1 分）是誰：總線數是奇數時，連最後一條線的是先手、總線數是偶數時，連最後一條線的是後手。

(3)總線數＝(M-1)×N+(N-1)×M

綜合上面，分析不可多連規則下 N、M 的奇偶性與得最後 1 分者的關係（見表 9）：

(表 9)總線數的奇偶性與不可多連規則下得最後 1 分者分析表

N 的奇偶性	M 的奇偶性	總線數的奇偶性	遊戲規則不可多連時，連最後一格至少可得 1 分者
奇數	奇數	偶數	後手
奇數	偶數	奇數	先手
偶數	奇數	奇數	先手
偶數	偶數	偶數	後手

從表 9 可以發現：

(1)當 N 和 M 是異奇偶性的情形下，總線數會是偶數，不可多連規則下，後手至少可得最後 1 分。

(2)當 N 和 M 是同奇偶性的情形下，總線數會是奇數，不可多連規則下，先手至少可得最後 1 分。

2.連出第一個格子、獲得第一分者

(1)不管是哪一種遊戲規則，連出極限圖者，下一輪一定至少可以連出 1 個格子而得到 1 分。

(2)極限棋局已連線數為奇數時，由先手走完極限棋局，先者會獲得第 1 分；極限棋局已連線數為偶數時，由後手走完極限棋局，則由後手獲得第 1 分。

3.不可多連規則下最大已連線數棋局的優勢方

我們在表 9 已經找出極限棋局的最大已連線數的奇偶性，以及和可得分者之間的關係，繼續分析得第 1 分和最後 1 分者（見表 10）：

(表 10)不可多連規則下得第 1 分和最後 1 分者分析表

N	M	總線數	極限圖最大已連線數的奇偶性	連第 1 格得 1 分者	遊戲規則不可多連時，連最後一格至少可得 1 分者
奇數	奇數	偶數	偶數	後手	後手
奇數	偶數	奇數	奇數	先手	先手
偶數	奇數	奇數	奇數	先手	先手
偶數	偶數	偶數	偶數	後手	後手

從表 10 可以發現：

【結論 5】N×M 棋局（N≥2、M≥3），遊戲規則不可多連時：

(1)當 N 和 M 同奇偶時後手較佔優勢：連出最大已連線數極限圖形為後手，後手至少可以得到 2 分：第 1 分和最後 1 分。

(2)當 N 和 M 異奇偶時先手較佔優勢：連出最大已連線數極限圖形為先手，先手至少可以得到 2 分：第 1 分和最後 1 分。

將上面的發現，和我們前面（表 5）～（表 7）已經做的 3×N～5×N 的棋局分析所得到的結論 3 做比較，發現均符合我們結論 5 的優勢方分析。

而（表 4）2×M 的棋局，因為只有 1 層格子，當 M 是奇數時，最大已連線數都是偶數，便和表 10 不相符，但是和表 8 相符合：M 是奇數時平手、M 是偶數時後手獲勝。

所以 N 和 M 都要大於 2，才會適用於表 9 和表 10 的分析（同結論 3、結論 5）：當 N 和 M 均＞2 時，若 N、M 同奇偶，後手佔優勢；若 N、M 異奇偶，則先手佔優勢。

六、如何應用以創造對己方優勢的對戰策略

我們發現最大已連線數圖形，主有可分為兩種基本單位，各有不同的優勢方、且可多連或不可多連這兩種遊戲規則都通用：

①2×2 田字格：後手優勢。

②曰字大方框（見表 6 的 3×4 連線圖  ）：先手優勢。

所以先手要想辦法阻擋後手連出田字格，在連出 3 條線組成的大ㄇ字形時，就在ㄇ字中心連出 1 條斷開的線。而後手則是要把握機會，盡量圍出 2×2 的田字正方形外框。

肆、結論

一、不形成ㄇ字的極限棋局，後續走法有下列幾個共通性：

1. 走完極限棋局時，因為還沒有任何一方連出格子而得分，雙方每輪都只能連 1 條線。所以從已連線數，便可以判斷後續該輪到哪一方。
2. 不管剩下幾條線、也不管已經連出怎樣的圖形，極限棋局後續所連出的每一條線，其作用共有「形成ㄇ」、「連成格子」或「連成格子同時又形成ㄇ」這三種情形。
3. 只要有形成ㄇ，下一步至少可以連成 1 個格子而得分。
4. 如果有出現 1 步就連成 2 個格子的情況，前面一定至少要完成極限圖形、且有出現 2 次形成ㄇ的下一步並沒有連成格子的情形。
5. 最後一條線，一定會是連成 1 個或 2 個格子。所以輪到連最後一條線的玩家，至少可以得到 1 個格子。

二、分析 2×3～2×5 可能對戰結果找出優勢方：

1. 2×4、2×5 不同已連線數的極限圖，各找出一個例子，來分析不可多連遊戲下，後續所有可能走法。歸納出：2 × 4 後手較佔優勢、2 × 5 先手較佔優勢。

2.分析 2×3～2×5 不同已連線數極限棋局的所有可能對戰結果（不考慮是否真的有此對戰情形），發現：

(1) 2×奇數棋局，總線數是奇數，優勢方為先手。

(2) 2×偶數棋局，總線數是偶數，優勢方為後手。

三、不同大小棋局的總點數、總線數、總格數的規律性：

1.（N，M）棋局，當 N 固定時，M 每增加 1，總點數的公差是 N，總線數的公差是 2M-1，總格數的公差是 N－1。

2. N×M 棋局的總點數＝N×M，總線數＝(N-1) ×M+(M-1) ×N，總格數＝(N-1)×(M-1)。

四、2xN～5xN 最大已連線數極限棋局的優勢方：

(一)最大已連線數的極限棋局圖形，可分成 3 種基本單位：

1. 2x2 田字格的正方形外框：當 N 和 M 都＞2 時，可以出現此單位。內部有 4 格、4 條線，走法都是：ㄇ格格 $\boxed{2\text{ 格}}$。不管是可多連或不可多連的遊戲規則，此單位先連線者都是劣勢方，會讓對手在此單位得全部分數（可多連時），或己方得 1 格、對手得 3 格（不可多連）。

2. 大方框內部有斷開直線：當 N 和 M 都＞2 時、且 N 或 M 有＞3 時，可以出現此單位。後續走法及優勢方，會因為方框內的直線數、格子數而有所不同，雙方都有機會得分。

3. 和其他單位斷開的線：可為 1 直線、L 形或ㄇ字形。2xN 都是由此單位組成，3xN 以上則不會單純由此單位組成，而會搭配上面兩種單位。出現在①田字框的外部，或是出現在②大方框的內部或外部。

(二) NxM（N≥2、M≥3）的最大已連線數極限圖形：

1. 最大已連線數計算公式：

(1) N＝2 時：2N-2

(2) N＞2 時：

① 當 N、M 均為偶數時＝NxM-2

② 當 N、M 至少有 1 個為奇數時＝NxM-1

2. 走完最大已連線數極限棋局、可得第 1 分者：

(1)當 N、M 同奇偶性時：後手。

(2)當 N、M 異奇偶性時：先手。

(三) N×M（N≥2、M≥3）最大已連線數極限棋局的優勢方：

1. 2×M

(1)可多連：後手必勝。

(2)不可多連：當 M 是奇數時會平手；當 M 是偶數時後手獲勝。

2. 3×M

(1)可多連：

①M 奇數時：後手較佔優勢。

②M 偶數時：只有 3X4 由先手獲勝，其餘雙方均有機會獲勝。

(2)不可多連：M 奇數時後手獲勝；M 偶數時先手獲勝。

3. 4×M

(1)可多連：

①M 奇數：當 M 為奇數時，若 M+1 是 4 的倍數，圖形可分為奇數個大方框，則為先手獲勝。若 M+3 是 4 的倍數，圖形可分為偶數個大方框，則平手。

②當 M 是偶數時，雙方都有機會獲勝。

(2)不可多連：M 奇數時先手獲勝；M 偶數時後手獲勝。

4. 5×M

(1)可多連：雙方都有機會獲勝。

(2)不可多連：當 M 是奇數時由後手獲勝，M 為偶數時則由先手獲勝。

五、N×M 棋局（N≥2、M≥3）總格數、總線數與對戰結果的關係

(一)總格數的奇偶性和對戰結果的關係

1. 只有在 N 和 M 都是偶數的情形下，總格數會是奇數，會必有輸贏。若極限圖形是最大已連線數時，由後手獲勝。

2. 其他情形下，總格數均會是偶數，則有可能平手。

(二)總線數和對戰結果的關係

1. 不可多連規則下，得最後 1 分者：

(1)當 N 和 M 是異奇偶時，後手可得最後 1 分。

(2)當 N 和 M 是同奇偶時，先手可得最後 1 分。

2. 最大已連線數極限棋局，得第 1 分者：

(1)當 N 和 M 同奇偶時，後手可得第 1 分。

(2)當 N 和 M 異奇偶時，先手可得第 1 分。

(3)不可多連規則下，得第 1 分者同時也可得最後 1 分，因而較佔優勢。

六、創造對己方優勢的對戰策略

1. 連出對自己有利的最大已連線數圖形基本單位（兩種遊戲規則都通用）：

(1)2×2 田字格：後手優勢。

(2)曰字大方框（中間 1 斷線）：先手優勢。

2. 先手要想辦法阻擋後手連出田字格，在連出 3 條線組成的大ㄇ字形時，就在ㄇ字中心連出 1 條斷開的線。

3. 後手則是要把握機會，盡量圍出 2×2 的田字正方形外框。

伍、參考資料

1. 廖慧娟、馬秋慧、李則逸、林韋丞（民 87 年）「捨得！捨得！有捨才有得！！」中國民俗遊戲「造房子」之最佳策略探討。第 38 屆全國中小學科展作品。網址：https://www.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=&a=0&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=648&sid=4732

2. 劉佩雯、韓杰霖、陳怡君、陳奕達（民 99 年）圍地盤遊戲的必勝策略。第 50 屆全國中小學科展作品。網址：file:///C:/Users/LENOVO/Downloads/pta_11189_2800949_55902.pdf

3. 妙點連框，框成金。新竹市第 39 屆科展作品。網址：chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://science.hc.edu.tw/fileUpload/winningEntries/110%e5%b9%b4%e5%ba%a6%e5%9c%8b%e5%b0%8f%e7%b5%84%e6%95%b8%e5%ad%b8%e7%ac%ac%e4%ba%8c%e5%90%8d0811-01583274.pdf

4. Dots & Boxes（點格棋遊戲網站）。網址：http://dotsandboxes.org/