新竹市第 41 屆中小學科學展覽會
作品說明書

類　　別：

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：艾雪三角形磁磚對稱密鋪圖研究

關 鍵 詞：Escher、對稱、密鋪

編　　號：

摘要

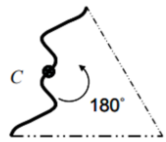
根據研究[1]指出：三角形磁磚邊之作用方式共有 5 種，且共有 11 種設計方法可在平面上密鋪。然而作者在解決問題的方法均是採用窮舉，方法不夠嚴謹。本研究運用不同的方法，透過代數計算證明了三角形磁磚共有 11 種對稱密鋪圖結構；而 M.C.Escher 在手作創作圖中只使用了其中 5 種結構；在與前人的研究比較下，發現前人所歸納的 11 種設計方法恰好對應到本研究中的 8 種密鋪結構，而另外 3 種結構是前人所未探討的磁磚內部變化方式。本研究也進一步推廣至相關立體圖形，如：正四面體、正八面體、正二十面體…等，並歸納出各種立體圖形可密鋪的種類數，透過適當軟體的支援下，可以快速且精確繪製出豐富有創意的圖樣。

壹、 研究動機

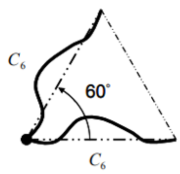
知名的藝術家 M.C. Escher 以手繪的方式，創作了許多豐富且極具創意的對稱密鋪圖。在 Escher 的官方網站[6]也提供了很多其所創作的作品。然而在研究[1]中，作者透過平面上的四種等量變換(平移、旋轉、鏡射、滑動鏡射)作窮舉，推斷三角形磁磚共有五種邊作用方式(如下圖(1)(2)(3)(4)(5)所示)，再透過這五種邊作用方式窮舉組合方式，推斷三角形磁磚共有 11 種設計方法(如下圖(6)所示)可密鋪平面，推論的過程非常不嚴謹！

而研究[2]中，作者運用了自創的換碼法與樹狀圖對應關係，證明了六邊形磁磚的共有 20 種對稱密鋪圖結構。因此，本研究想延續研究[2]的方法，將三角形磁磚的對稱密鋪圖結構種類數問題重新處理，並在相關多面體、週期性立體圖的作延伸探討。

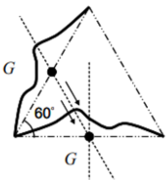
(1)不作變化(I)



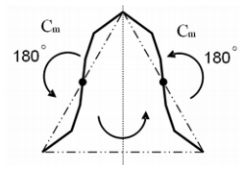
(2)以邊中點作180°旋轉(C)



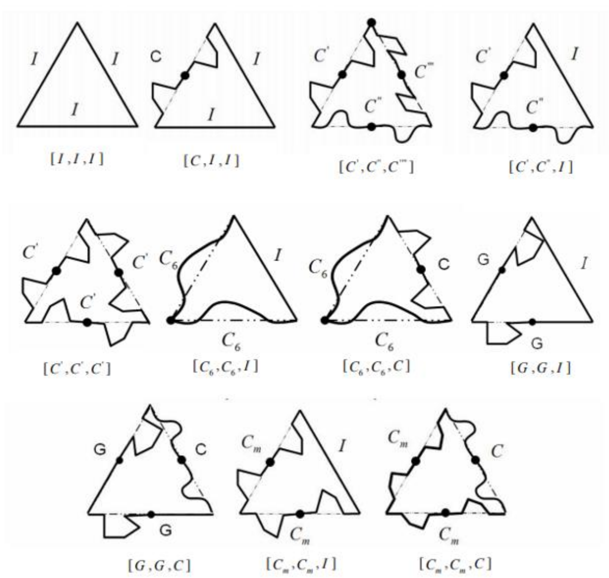
(3)邊對邊作60°角旋轉(C_6)



(4)邊對邊作60°角旋轉後再鏡射(G)



(5)邊中點作180°旋轉再作鏡射(C_m)



(6)　11 種三角形磁磚設計方法

貳、 研究目的

一、運用代數結構編碼與排列組合，計算三角形磁磚密鋪結構的種類數。

二、將 Escher 官網中的三角形密鋪圖進行結構解析，並進行相關實作

三、探討哪些正三角形磁磚設計法可在正四面體、正八面體、正二十面體上密鋪，並進行相關實作。

參、 研究設備與器材

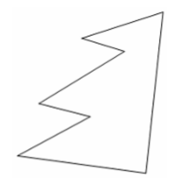
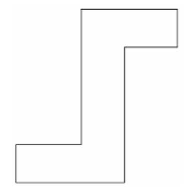
電腦、AMA2.1

肆、 研究過程

一、符號定義：

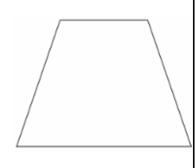
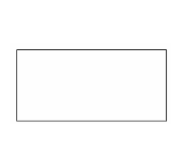
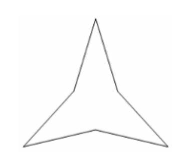
1. n 重旋轉對稱 與 n 重鏡射對稱：

(1) n 重旋轉對稱：以符號 Cn 來表示，其中n為最高旋轉對稱之次數。如圖一所示。

$C1$	$C2$	$C3$
		

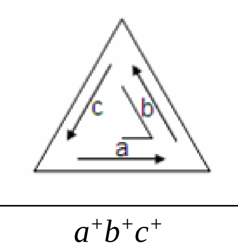
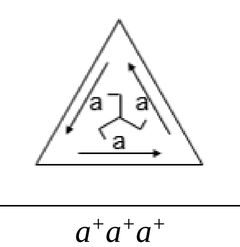
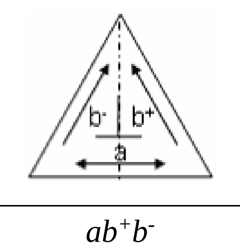
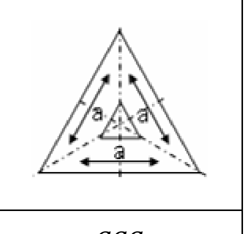
圖一 n重旋轉對稱範例

(2) n 重鏡射對稱：以符號 Dn 來表示，其中n為對稱軸之數量。如圖二所示。

$D1$	$D2$	$D3$
		

圖二 n重鏡射對稱範例

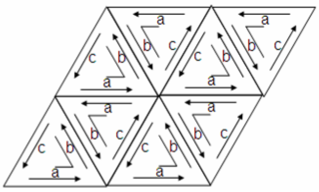
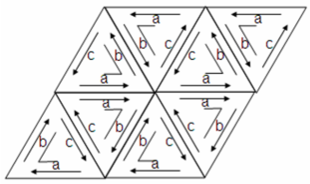
透過討論，可知道三角形磁磚只可能有 $C1$、$C3$、$D1$、$D3$ 四種不同結構。將磁磚的邊以向量符號來表示磁磚結構，因為磁磚本身可翻轉，邊具備方向性(順、逆時針)，以正負符號表示之。如下表一所示：

三角形 磁磚結構	$C1$	$C3$	$D1$	$D3$
磁磚圖樣				
磁磚符號(T)	$a^+b^+c^+$	$a^+a^+a^+$	ab^+b^-	aaa

表一 三角形磁磚的四種結構

2. 銜接符號$[T,T']$：

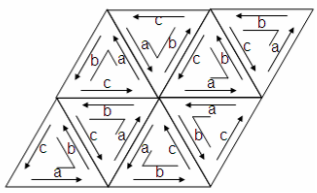
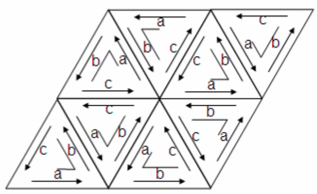
銜接符號是用來判斷磁磚 T 與鄰居的銜接情況，其中T'的每個符號表示磁磚 T 中每個邊依序所對應的鄰居邊，以符號 $[T,T']$表示。符號說明如下表二所示：

銜接符號	$[a^+b^+c^+,a^+b^+c^+]$	$[a^+b^+c^+,a^-b^+c^+]$
拼貼情形	 圖 A	 圖 B
說明	圖 A 是由同一磁磚僅透過旋轉拼貼而成，a 的鄰居為 a，b 的鄰居為 b，c 的鄰居為 c，因並未有鏡射翻轉，故方向均相同(均為逆時針)，故磁磚 $T(a^+b^+c^+)$每個邊與鄰居邊的對應關係T'為 $a^+b^+c^+$	圖 B 是由同一磁磚透過旋轉與鏡射翻轉拼貼而成，a 的鄰居為 a，b 的鄰居為 b，c 的鄰居為 c；但 a 邊的鄰居邊 a 銜接時是經過鏡射翻轉的(b、c 邊則無)，故 a 邊相接的方向會相異(一順一逆)，磁磚 $T(a^+b^+c^+)$每個邊與鄰居邊的對應關係T'為 $a^-b^+c^+$

表二 銜接符號表示法與磁磚拼貼情形說明

3. 同構：

在下面表三中的兩圖銜接符號雖然不同，但密鋪結構是相同的(相同的對稱方式)，圖 A 中 a 的鄰居為 a，b 的鄰居為c；圖 B 則是 a 的鄰居為 b，c 的鄰居為 c。兩圖都是單一種磁磚僅透過旋轉拼貼而成(並未有鏡射翻轉)，我們僅需將圖 B 中的磁磚符號T編碼順序做改變[1]，兩圖的銜接符號就會相同。

$[a^+b^+c^+,a^+c^+b^+]$	$[a^+b^+c^+,b^+a^+c^+]$
 圖 A	 圖 B

表三 同構說明

透過上述換碼的的方式，我們可以很容易知道：$[a^+b^+c^+,a^+c^+b^+]$、$[a^+b^+c^+,b^+a^+c^+]$、$[a^+b^+c^+,c^+b^+a^+]$這三種銜接符號是同構的(均為其中兩邊互連、一邊自我對應，沒有鏡射翻轉)。

接下來，本研究將根據三角形磁磚四種不同結構($C1$、$C3$、$D1$、$D3$)，分點討論所有可能的密鋪結構。

[1] 將圖 B 中的c邊改為”起始邊 a”去做編碼後，圖片中的磁磚將一樣都是：a 的鄰居為 a，b 的鄰居為c，並且方向均相同，圖形結構、銜接符號均與圖 A 完全相同

研究一、三角形磁磚密鋪結構種類數

三角形磁磚根據對稱性共可分為四種不同結構($C1$、$C3$、$D1$、$D3$)。

Case 1：磁磚結構為 $C1$ $(a^+b^+c^+)$：

此種結構下，三角形的三邊與鄰居的銜接情況可能有：

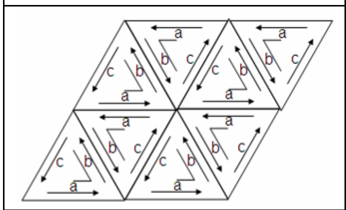
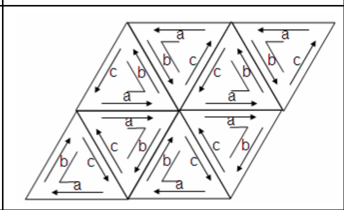
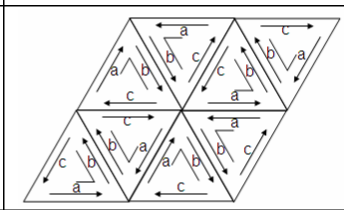
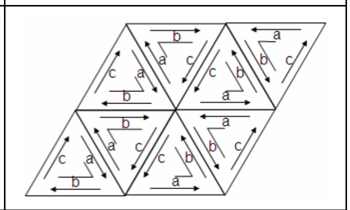
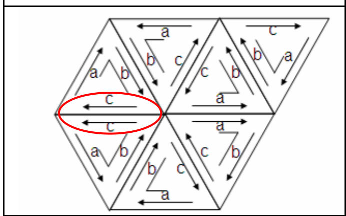
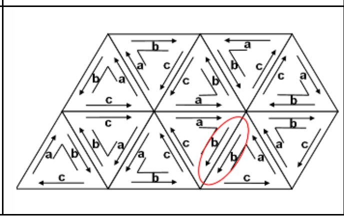
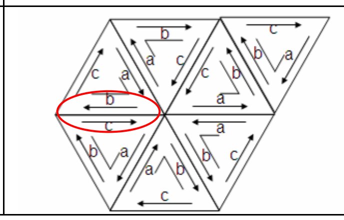
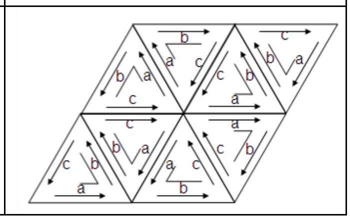
(a) 三邊均自我對應　(b) 其中兩邊互連、一邊自我對應

情況(a)：三邊自我對應

由於三邊均自我對應(即：a 的鄰居為 a、b 的鄰居為 b、c 的鄰居為 c)，但銜接時可以翻轉、不翻轉兩種選擇(即 a^+可能對應 a^+、a^-兩種情況)，b、c 亦同，故共有 $2\times2\times2=8$ 種情況，8 種銜接符號如下：

銜接符號	是否存在	銜接符號	是否存在
$[a^+b^+c^+,a^+b^+c^+]$	○	$[a^+b^+c^+,a^-b^+c^+]$	○
$[a^+b^+c^+,a^+b^-c^+]$	○	$[a^+b^+c^+,a^+b^+c^-]$	○
$[a^+b^+c^+,a^-b^-c^+]$	×	$[a^+b^+c^+,a^-b^+c^-]$	×
$[a^+b^+c^+,a^+b^-c^-]$	×	$[a^+b^+c^+,a^-b^-c^-]$	○

其繪圖檢驗如下，其中矛盾處將以紅色圈標示。

$[a^+b^+c^+,a^+b^+c^+]$	$[a^+b^+c^+,a^-b^+c^+]$	$[a^+b^+c^+,a^+b^-c^+]$	$[a^+b^+c^+,a^+b^+c^-]$
			
$[a^+b^+c^+,a^-b^-c^+]$	$[a^+b^+c^+,a^-b^+c^-]$	$[a^+b^+c^+,a^+b^-c^-]$	$[a^+b^+c^+,a^-b^-c^-]$
			

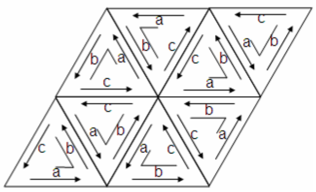
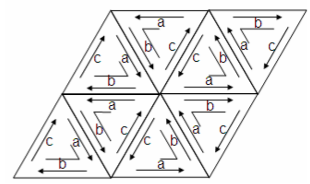
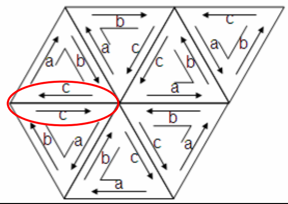
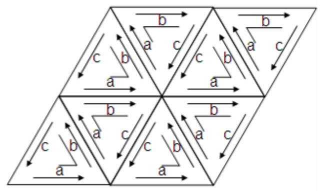
這邊特別注意的是：$[a^+b^+c^+,a^-b^+c^+]$、$[a^+b^+c^+,a^+b^-c^+]$、$[a^+b^+c^+,a^+b^+c^-]$這三種銜接方式是同構的(三邊自我對應，且其中一邊是翻轉後銜接)，因此磁磚結構為 C1、三邊自我對應的情況可推論出三種對稱密鋪圖結構，分別為$[a^+b^+c^+,a^+b^+c^+]$、$[a^+b^+c^+,a^+b^+c^-]$、$[a^+b^+c^+,a^-b^-c^-]$

情況(b)：其中兩邊互連、一邊自我對應

不失一般性，我們可令 a、b 兩邊互連，c 邊自我對應；而 a 的鄰居 b 銜接時有可翻轉、不翻轉兩種選擇(即 a^+可能對應 b^+、b^-兩種情況)，c 的鄰居也可翻轉(即 c^+可能對應 c^+、c^-兩種情況)，故共有 2×2=4 種情況，4 種銜接符號如下：

銜接符號	是否存在	銜接符號	是否存在
$[a^+b^+c^+, b^+a^+c^+]$	○	$[a^+b^+c^+, b^-a^-c^+]$	○
$[a^+b^+c^+, b^+a^+c^-]$	×	$[a^+b^+c^+, b^-a^-c^-]$	○

其繪圖檢驗如下，其中矛盾處將以紅色圈標示。

$[a^+b^+c^+, b^+a^+c^+]$	$[a^+b^+c^+, b^-a^-c^+]$	$[a^+b^+c^+, b^+a^+c^-]$	$[a^+b^+c^+, b^-a^-c^-]$
			

因此磁磚結構為 $C1$、兩邊互連一邊自我對應的情況可推論出三種對稱密鋪圖結構，分別為$[a^+b^+c^+, b^+a^+c^+]$、$[a^+b^+c^+, b^-a^-c^+]$、$[a^+b^+c^+, b^-a^-c^-]$。

由上述(a)(b)兩點討論歸納可知：$C1$ 結構共有 6 種對稱密鋪圖結構。我們將其分別編號 T1~T6，如下表所示：

編號	銜接符號	編號	銜接符號
T1	$[a^+b^+c^+, a^+b^+c^+]$	T2	$[a^+b^+c^+, a^+b^+c^-]$
T3	$[a^+b^+c^+, a^-b^-c^-]$	T4	$[a^+b^+c^+, b^+a^+c^+]$
T5	$[a^+b^+c^+, b^-a^-c^+]$	T6	$[a^+b^+c^+, b^-a^-c^-]$

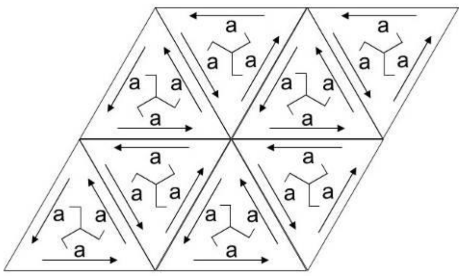
Case 2：磁磚結構為 $C3\ (a^+a^+a^+)$

由於三邊皆為 a ，所以只須考慮銜接時是否有翻轉即可，故共有 2 種情況，2 種銜接符號如下：

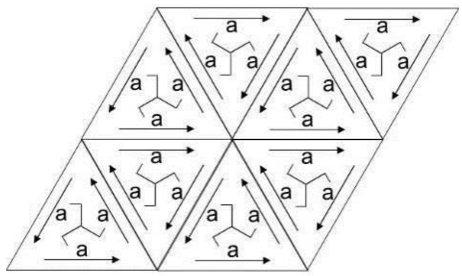
編號	銜接符號	編號	銜接符號
T7	$[a^+a^+a^+, a^+a^+a^+]$	T8	$[a^+a^+a^+, a^-a^-a^-]$

其繪圖檢驗如下：

$[a^+a^+a^+, a^+a^+a^+]$



$[a^+a^+a^+, a^-a^-a^-]$



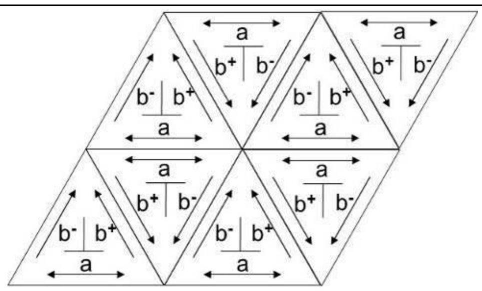
Case 3：磁磚結構為 $D1(ab^+b^-)$

由於 a 邊為對稱軸通過的一邊，不具方向性(翻轉後磁磚結構不變)，在這情況下 a 的鄰居只能是 a， b 的鄰居亦只能為 b，而 b 銜接時須考慮是否翻轉(即 b^+可能對應 b^+、 b^-兩種情況)故共有 2 種情況，2 種銜接符號如下：

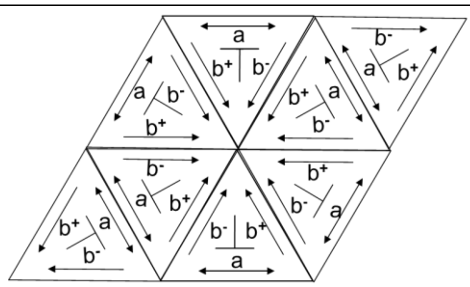
編號	銜接符號	編號	銜接符號
T9	$[ab^+b^-, ab^+b^-]$	T10	$[ab^+b^-, ab^-b^+]$

其繪圖檢驗如下：

$[ab^+b^-, ab^+b^-]$



$[ab^+b^-, ab^-b^+]$



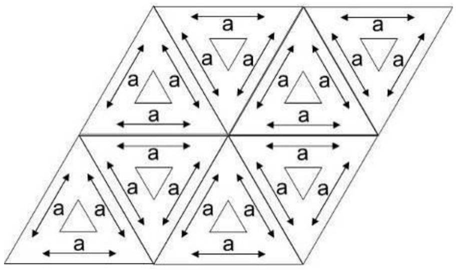
Case 4：磁磚結構為 *D*3(*aaa*)

由於 *D*3 的磁磚結構在經過翻轉、旋轉後對稱性均是相同的(不具備方向性)，故只有一種，銜接符號如下：

編號	銜接符號
T11	[*aaa*,*aaa*]

其繪圖檢驗如下：

[*aaa*,*aaa*]



綜合上述結果我們可知：三角形磁磚共有 11 種對稱密鋪圖結構，如下表所示：

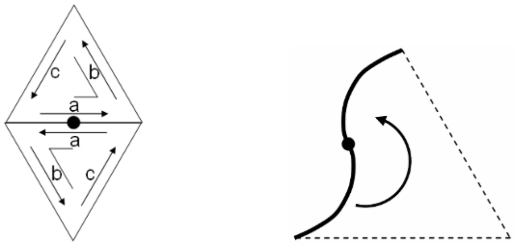
編號	銜接符號	磁磚結構
T1	$[a^+b^+c^+, a^+b^+c^+]$	$C1$
T2	$[a^+b^+c^+, a^+b^+c^-]$	$C1$
T3	$[a^+b^+c^+, a^-b^-c^-]$	$C1$
T4	$[a^+b^+c^+, b^+a^+c^+]$	$C1$
T5	$[a^+b^+c^+, b^-a^-c^+]$	$C1$
T6	$[a^+b^+c^+, b^-a^-c^-]$	$C1$
T7	$[a^+a^+a^+, a^+a^+a^+]$	$C3$
T8	$[a^+a^+a^+, a^-a^-a^-]$	$C3$
T9	$[ab^+b^-, ab^+b^-]$	$D1$
T10	$[ab^+b^-, ab^-b^+]$	$D1$
T11	$[aaa,aaa]$	$D3$

結論一：三角形磁磚共有 11 種對稱密鋪圖結構

透過前面的繪圖檢驗，我們也可以發現：特定的銜接方式關係到著三角形磁磚邊的作用方式，共可歸納五種作用法 C、I、C_6、G、C_m，詳細說明分別如下：

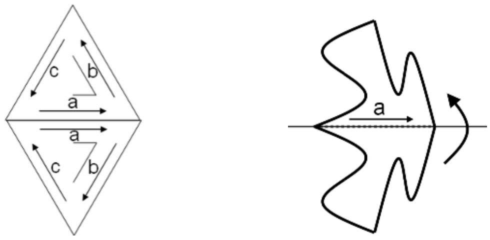
(1) *C* (Center point rotation)：以邊中點為旋轉中心旋轉 180°

當同一邊自我對應且未經過鏡射翻轉進行拼貼⇒磁磚該邊以中點為旋轉中心做 180°旋轉



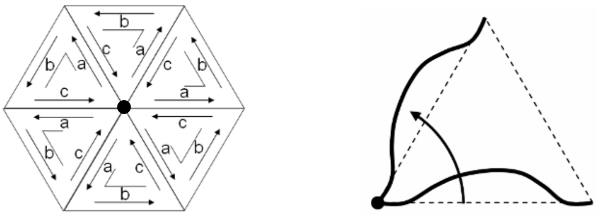
(2)　*I*　(Identity)：不做任何變化

當同一邊自我對應且經過鏡射翻轉進行拼貼⇒ 磁磚該邊為鏡射軸(直線)



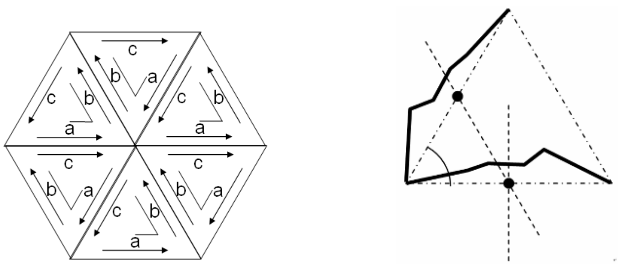
(3) C_6 (Corner rotation 60°)：以一頂點為中心旋轉 60°

當兩相異邊對應且未經過鏡射翻轉進行拼貼⇒ 兩相異邊交點為旋轉中心作 60°旋轉



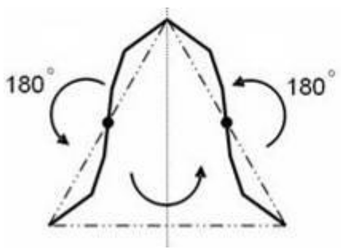
(4) *G* (Glide reflection, adjacent sides)：以一端為旋轉中心旋轉後再鏡射

當兩相異邊對應且經過鏡射翻轉進行拼貼⇒ 兩相異邊交點為旋轉中心，旋轉後再作鏡射



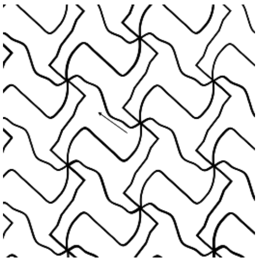
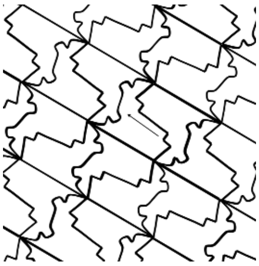
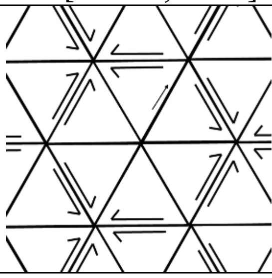
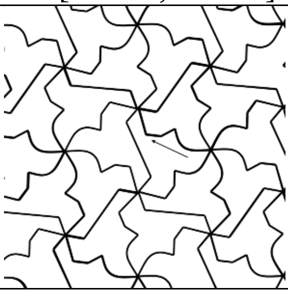
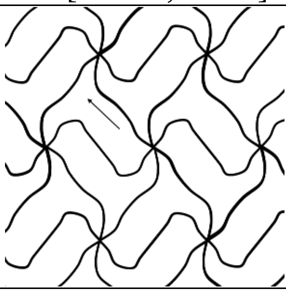
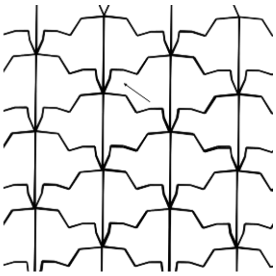
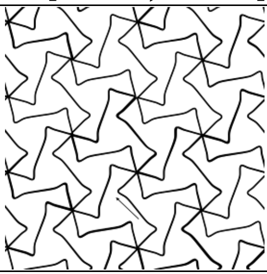
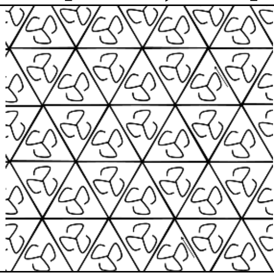
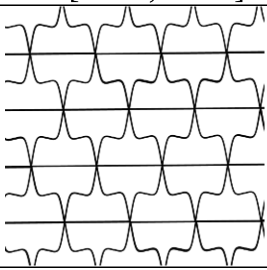
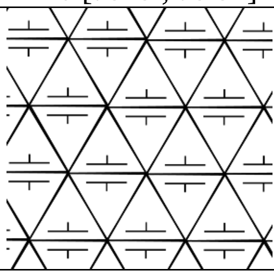
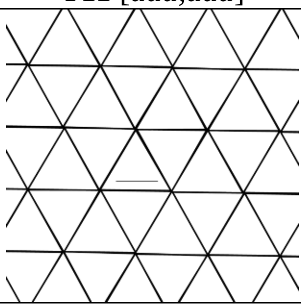
(5)　C_m　(Center point rotation, mirror)：以一腰中點為旋轉中心做 180°旋轉後再做鏡射

若三角形磁磚結構為 *D*1 時，其圖形必是以一腰中點為旋轉中心做 180°旋轉後再做鏡射(鏡射軸為底邊中垂線)



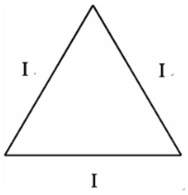
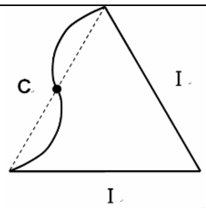
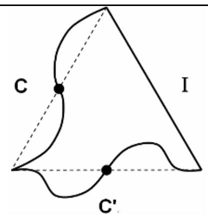
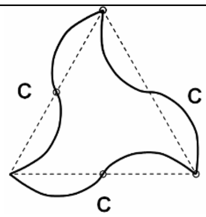
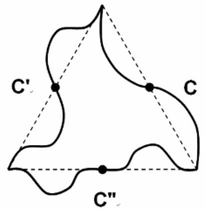
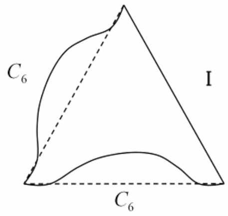
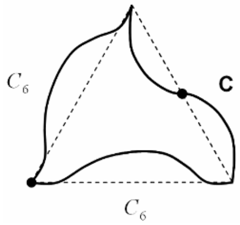
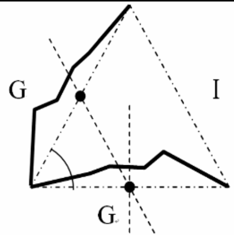
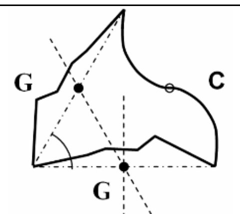
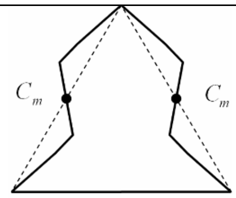
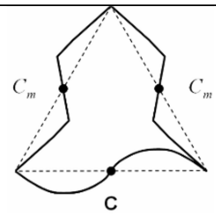
透過邊與鄰居邊的對應關係歸納出的五種邊作用方式，恰好與前人的研究相符!

透過上述的五個繪圖方法歸納，我們可以將三角形磁磚的 11 種對稱密鋪圖結構圖樣繪製出來，如下表所示：

<table>
<tr><td colspan="6">$C1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">T1 [$a^+b^+c^+$, $a^+b^+c^+$]</td><td colspan="2">T2[$a^+b^+c^+$, $a^+b^+c^-$]</td><td colspan="2">T3 [$a^+b^+c^+$, $a^-b^-c^-$]</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">T4 [$a^+b^+c^+$, $b^+a^+c^+$]</td><td colspan="2">T5 [$a^+b^+c^+$, $b^-a^-c^+$]</td><td colspan="2">T6 [$a^+b^+c^+$, $b^-a^-c^-$]</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="6">$C3$</td></tr>
<tr><td colspan="3">T7 [$a^+a^+a^+$, $a^+a^+a^+$]</td><td colspan="3">T8 [$a^+a^+a^+$, $a^-a^-a^-$]</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="6">$D1$</td></tr>
<tr><td colspan="3">T9 [ab^+b^-, ab^+b^-]</td><td colspan="3">T10 [ab^+b^-, ab^-b^+]</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="6">$D3$</td></tr>
<tr><td colspan="6">T11 [aaa,aaa]</td></tr>
<tr><td colspan="6"></td></tr>
</table>

11 種三角形磁磚對稱密鋪圖結構(圖中箭頭方向表示起始邊 a)

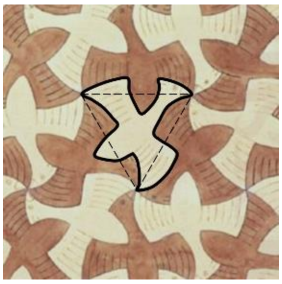
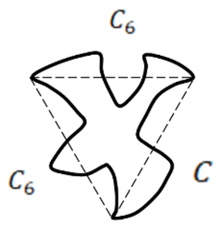
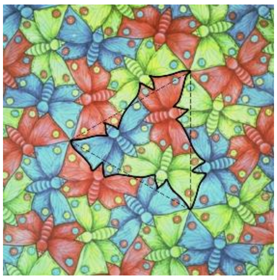
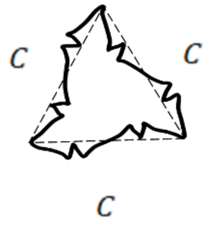
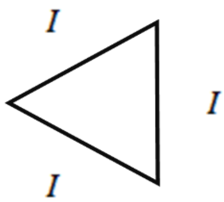
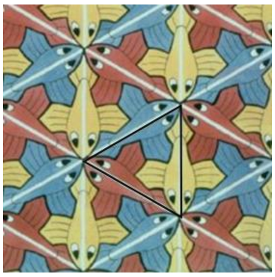
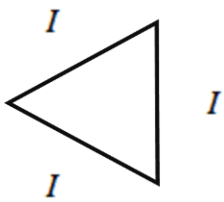
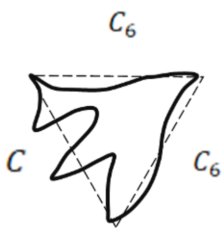
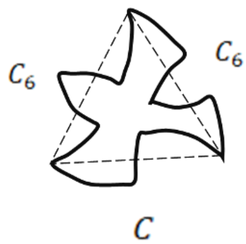
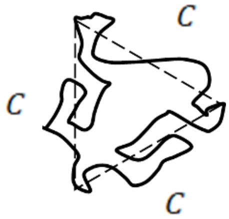
這邊值得一提的是：編號 T3、T8、T10、T11 這四種對稱密鋪圖結構雖然邊的形狀都是同為直線(不作變化)，但圖形的結構卻不同(其磁磚結構分別為 $C1$、$C3$、$D1$、$D3$)，因為磁磚內部亦可做變化(例如：內部構圖、著色…等)，本研究將所得到的結果與前人的研究結果作比較對應，我們發現前人的研究[1]所得到的 11 種正三角形磁磚設計方法，其密鋪後的結果恰好對應到本研究的其中 8 種對稱密鋪圖結構(如下表所示)，而其中三種一般化結構(T3、T8、T10)在研究[1]中未被詳細探討。

 設計方法：[I ,I ,I] 對應到本研究：T11	 設計方法：[C ,I ,I] 對應到的編號：T1	 設計方法：[C ,C',I] 對應到的編號：T1	 設計方法：[C ,C ,C] 對應到的編號：T7
 設計方法：[C',C'',C] 對應到的編號：T1	 設計方法：[C_6 , C_6 ,I] 對應到的編號：T2	 設計方法：[C_6 ,C_6 ,C] 對應到的編號：T4	 設計方法：[G ,G ,I] 對應到的編號：T6
 設計方法：[G ,G ,C] 對應到的編號：T5	 設計方法：[C_m ,I, C_m] 對應到的編號：T9	 設計方法：[C_m ,C, C_m] 對應到的編號：T1	

研究[1]中 11 種設計法密鋪後圖形結構與本研究的對稱密鋪圖結構對應表

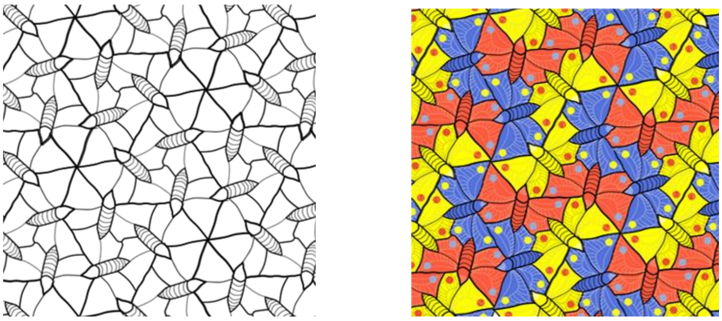
研究二、M.C-Escher 三角形密鋪結構圖解析與相關實作

在 Escher 官網[6]中，所有三角形磁磚密鋪圖及其相關結構如下表所示，若不考慮顏色差異所造成的結構不同，M.C.Escher 在三角形結構的創作圖中共有 5 種不同密鋪結構圖。

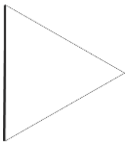
			
$[a^+b^+c^+, b^+a^+c^+]$		$[a^+a^+a^+, a^+a^+a^+]$	
			
$[a^+a^+a^+, a^-a^-a^-]$		$[a^+a^+a^+, a^-a^-a^-]$	
			
$[a^+b^+c^+, b^+a^+c^+]$		$[a^+b^+c^+, b^+a^+c^+]$	
			
$[a^+b^+c^+, a^+b^+c^+]$			

結論二：M.C.Escher 在三角形結構的手作創作圖中只使用了 5 種不同密鋪結構。

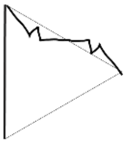
二、M.C-Escher 作品結構解析與實作：



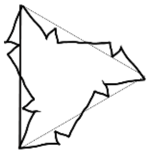
範例一： (密鋪圖結構 T7，磁磚結構 *C*3)



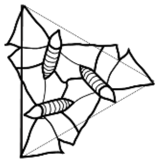
步驟一



步驟二



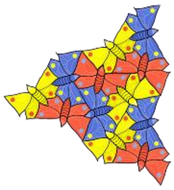
步驟三



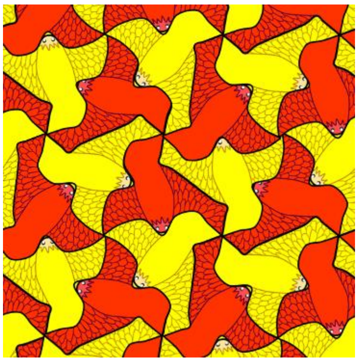
步驟四

步驟五

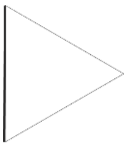
步驟六



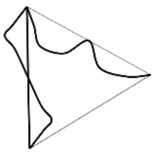
步驟七



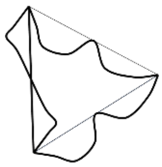
範例二： (密鋪圖結構 T4 ，磁磚結構 *C*1)



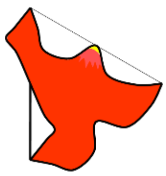
步驟一



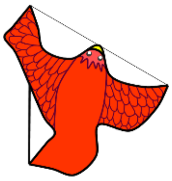
步驟二



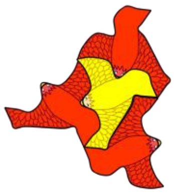
步驟三



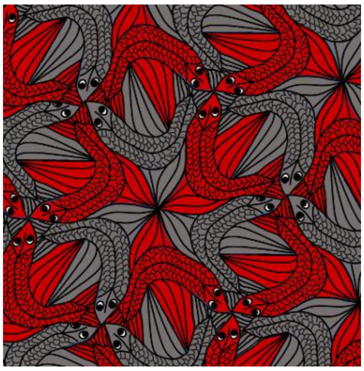
步驟四



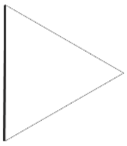
步驟五



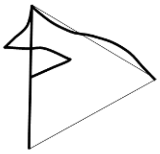
步驟六



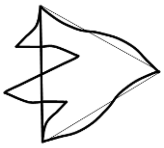
範例三：　　(密鋪圖結構 T4，磁磚結構 *C*1)



步驟一



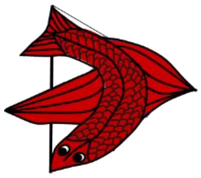
步驟二



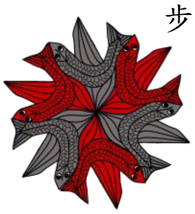
步驟三

步驟四

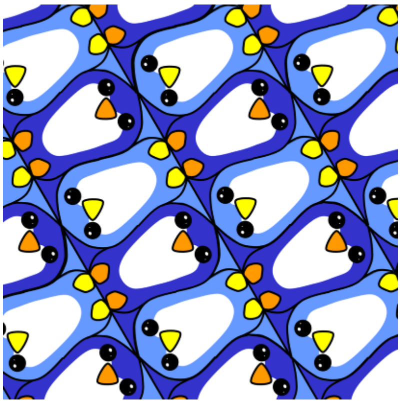
步驟五



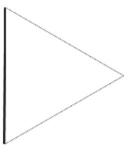
步驟六



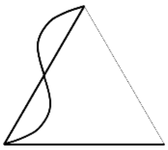
步驟七



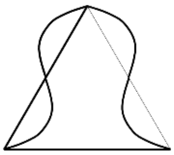
範例四：　　(密鋪圖結構 T9，磁磚結構 *D*1)



步驟一



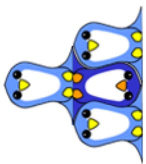
步驟二



步驟三

步驟四

步驟五



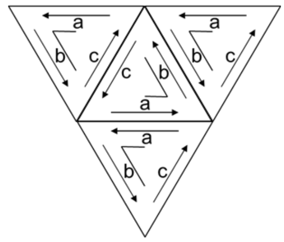
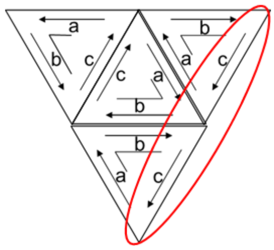
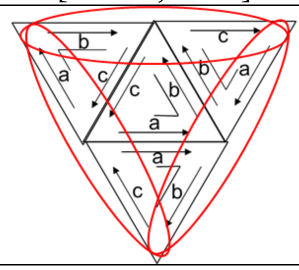
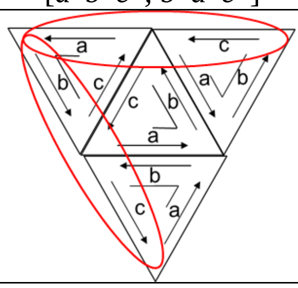
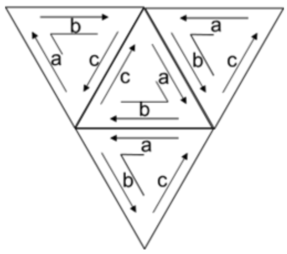
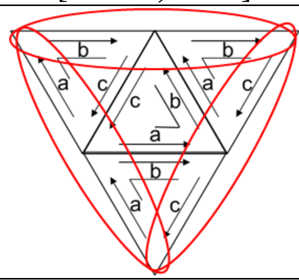
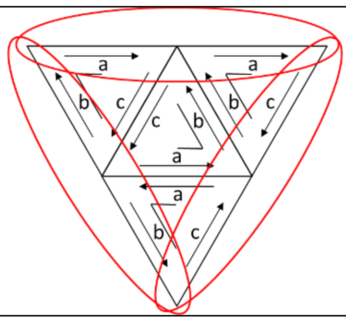
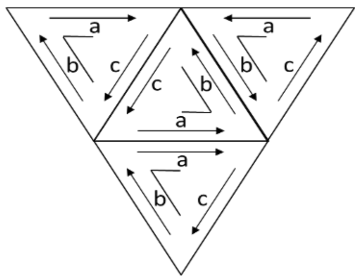
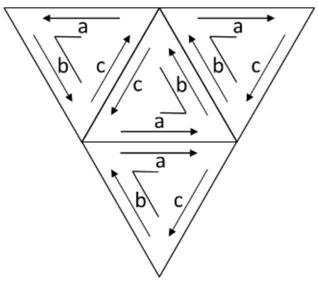
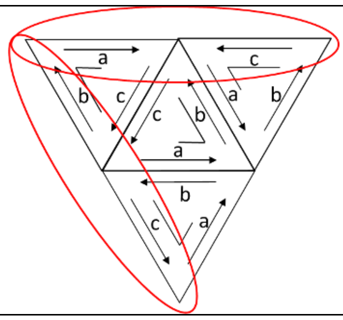
步驟六

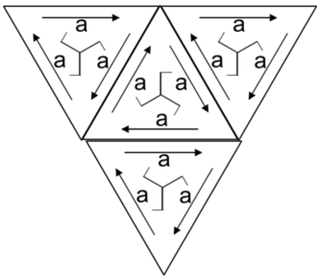
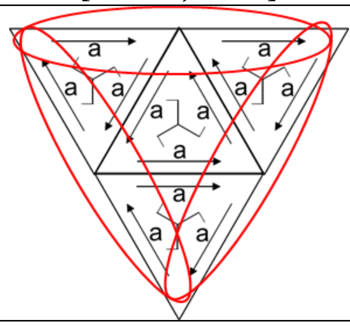
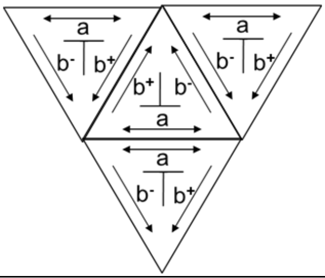
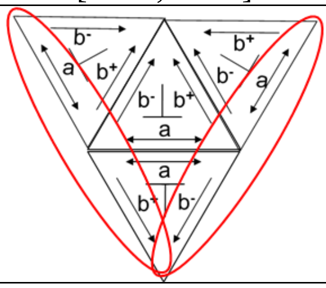
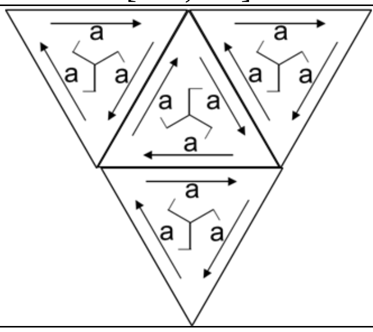
研究三、正多面體上的密鋪與相關實作

我們進一步探討哪些結構可以在正四面體、正八面體以及正二十面體上密鋪。在這邊要特別強調的是：而由於平面圖形與立體圖形上三角形的頂點秩數不同，平面上可以密鋪者未必可以在立體上密鋪，而平面上不可密鋪者也並不代表不能在立體上密鋪。因此，我們需將前面 4 種 C1 結構無法於平面密鋪者一併納入探討。在下面繪圖檢驗中，**以紅色圈圈標示處為對應的接合邊無法接合。**

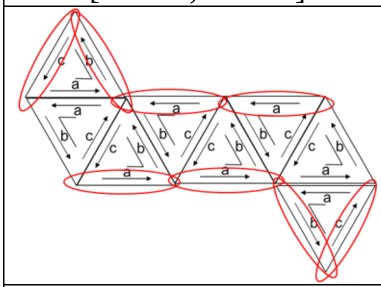
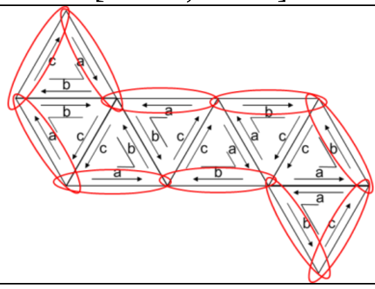
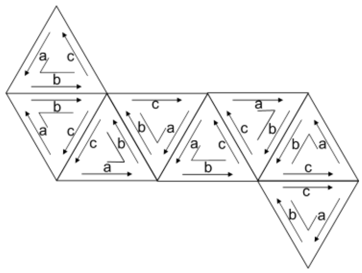
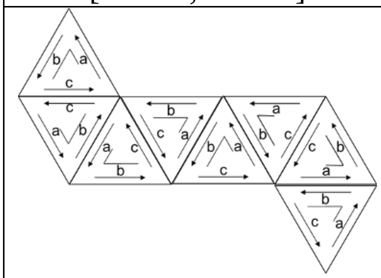
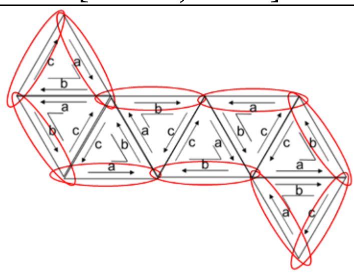
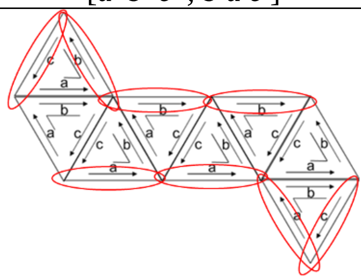
(一)正四面體

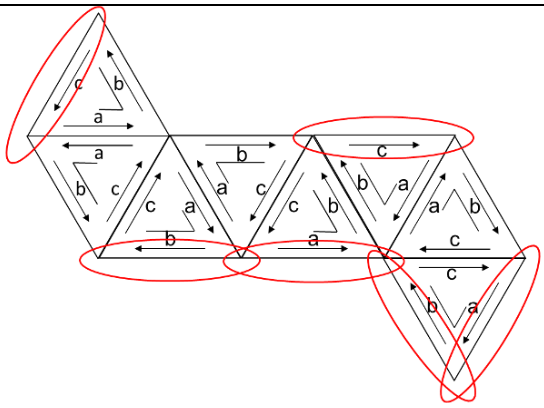
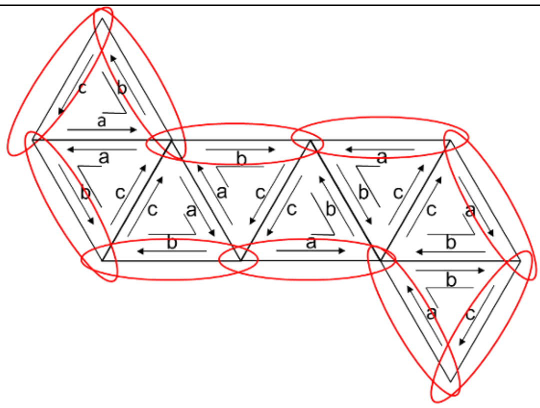
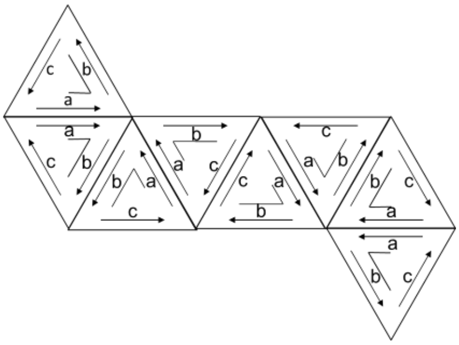
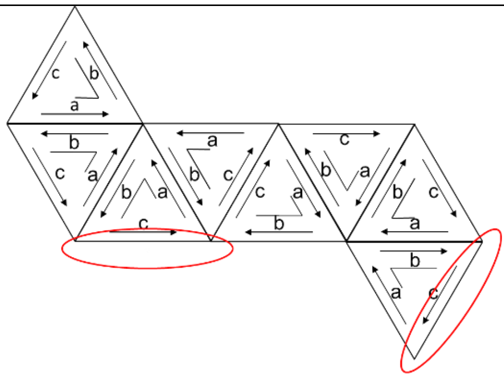
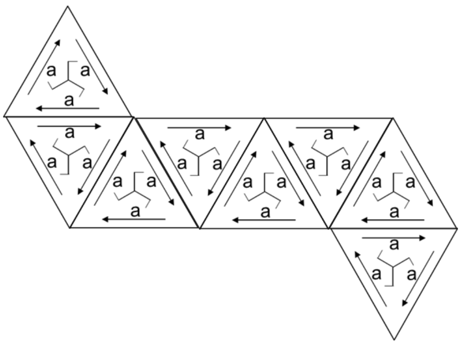
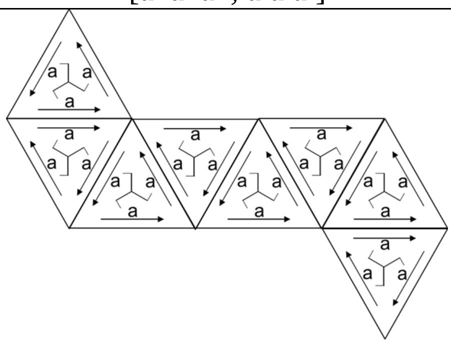
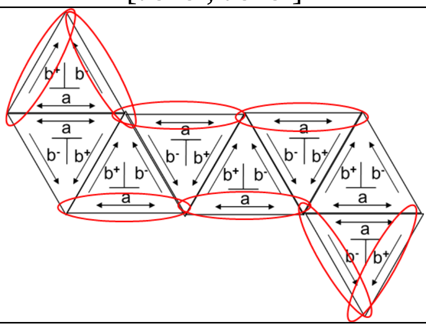
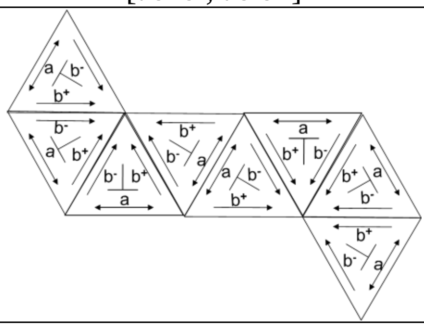
其繪圖檢驗如下，其中矛盾處將以紅色圈標示。

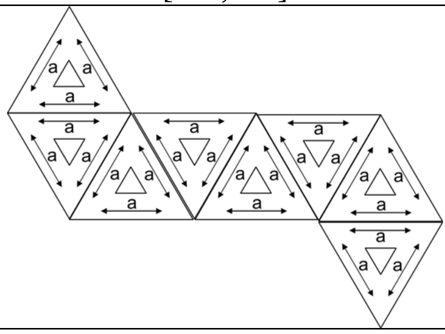
<table>
<tr><th colspan="6">$C1$</th></tr>
<tr><td colspan="2">$[a^+b^+c^+, a^+b^+c^+]$</td><td colspan="2">$[a^+b^+c^+, a^+b^+c^-]$</td><td colspan="2">$[a^+b^+c^+, a^-b^-c^-]$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">$[a^+b^+c^+, b^+a^+c^+]$</td><td colspan="2">$[a^+b^+c^+, b^-a^-c^+]$</td><td colspan="2">$[a^+b^+c^+, b^-a^-c^-]$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">$[a^+b^+c^+, a^+b^-c^-]$</td><td colspan="3">$[a^+b^+c^+, b^-a^+c^-]$</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="3">$[a^+b^+c^+, b^-a^-c^+]$</td><td colspan="3">$[a^+b^+c^+, b^+a^+c^-]$</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

*C*3	
$[a^+a^+a^+, a^+a^+a^+]$	$[a^+a^+a^+, a^-a^-a^-]$
	
*D*1	
$[ab^+b^-, ab^+b^-]$	$[ab^+b^-, ab^-b^+]$
	
*D*3	
$[aaa,aaa]$	
	

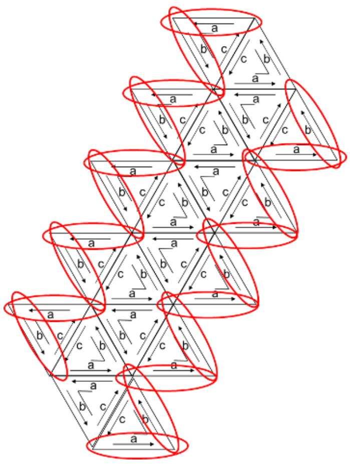
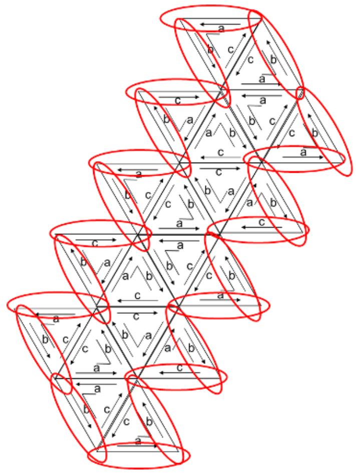
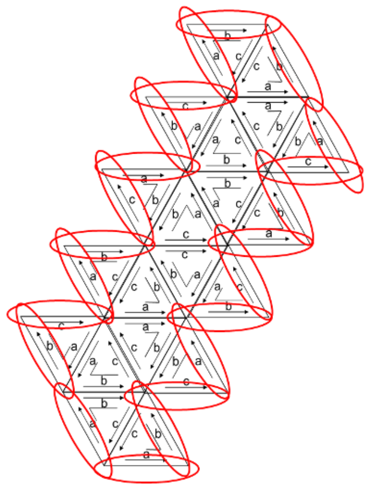
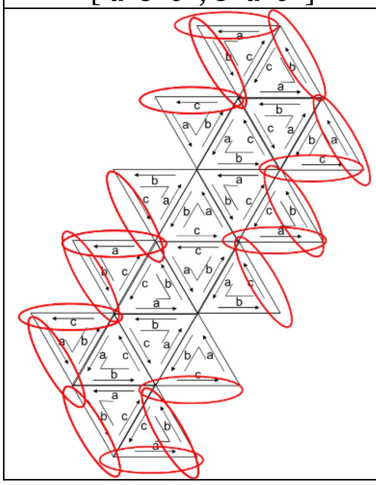
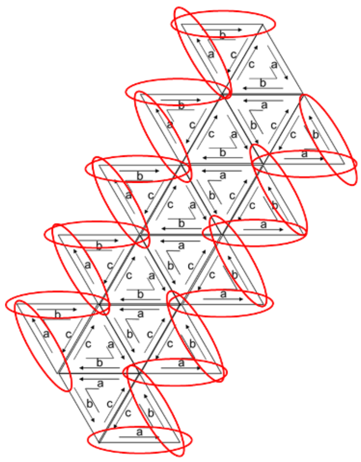
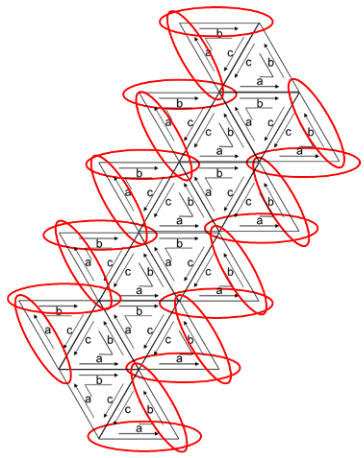
(二)正八面體

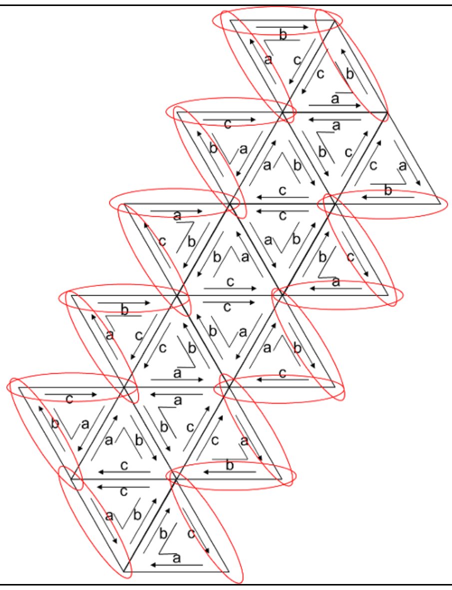
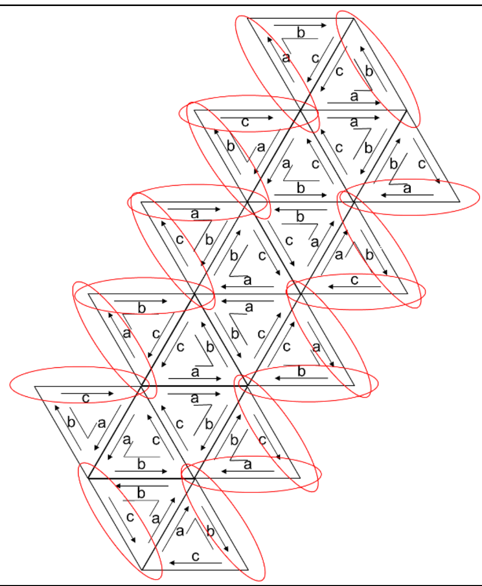
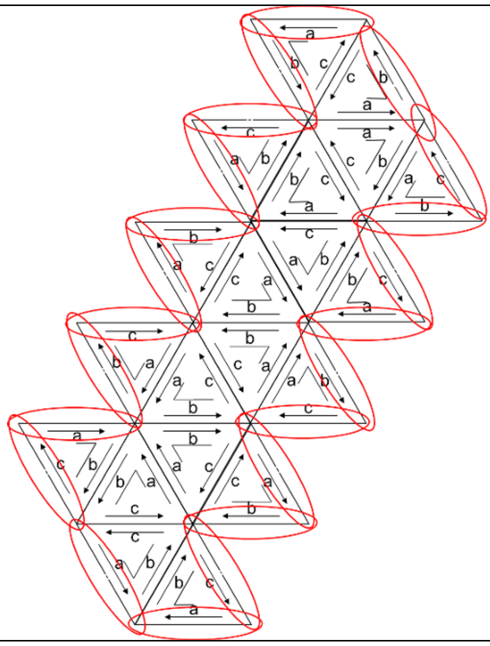
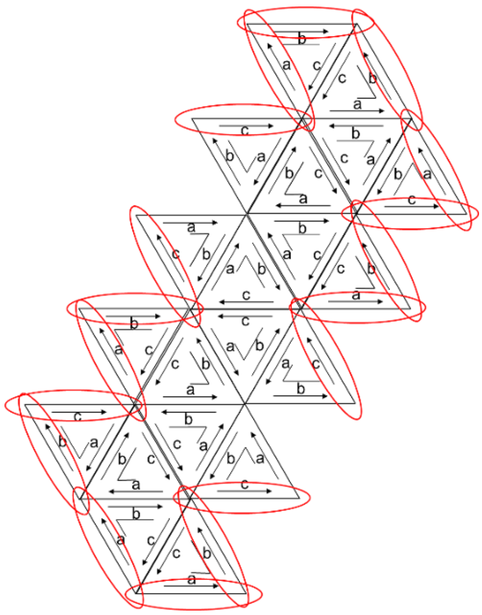
*C*1		
$[a^+b^+c^+, a^+b^+c^+]$	$[\mathrm{a}^+\mathrm{b}^+\mathrm{c}^+, \mathrm{a}^+\mathrm{b}^+\mathrm{c}^-]$	$[a^+b^+c^+, a^-b^-c^-]$
		
$[a^+b^+c^+, b^+a^+c^+]$	$[a^+b^+c^+, b^-a^-c^+]$	$[a^+b^+c^+, b^-a^-c^-]$
		

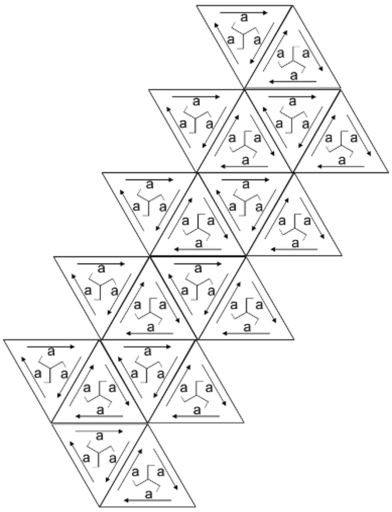
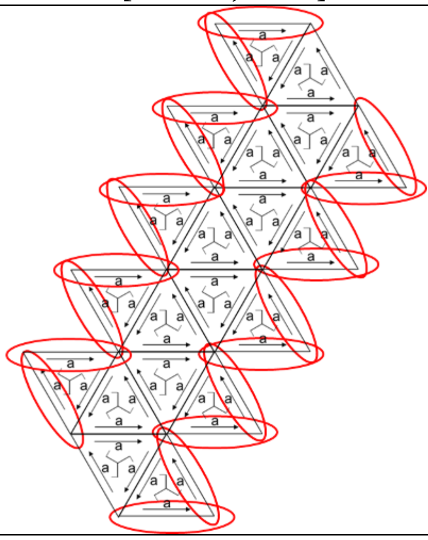
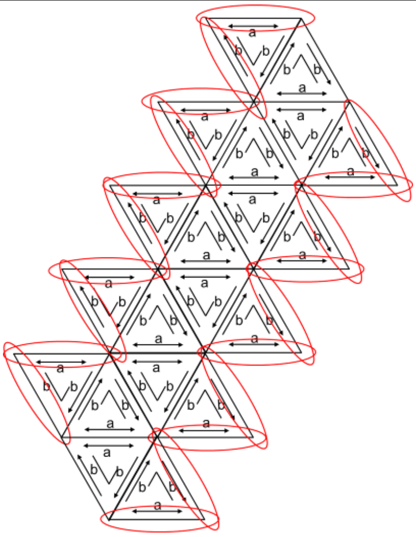
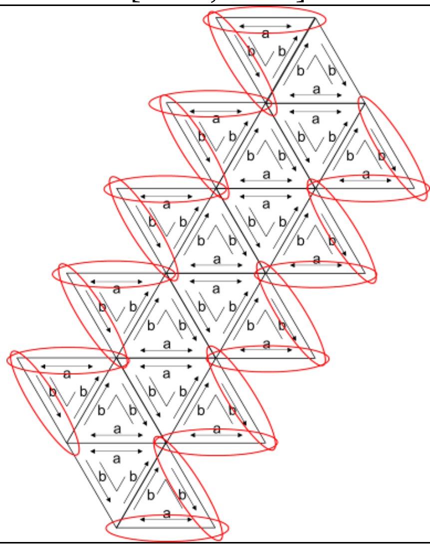
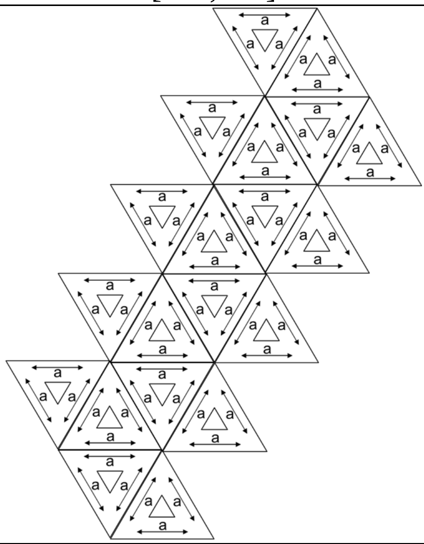
$[a^+b^+c^+, a^+b^-c^-]$	$[a^+b^+c^+, a^+b^+c^-]$
	
$[a^+b^+c^+, a^-b^-c^+]$	$[a^+b^+c^+, b^+a^+c^-]$
	
*C*3	
$[a^+a^+a^+, a^+a^+a^+]$	$[a^+a^+a^+, a^-a^-a^-]$
	
*D*1	
$[ab^+b^-, ab^+b^-]$	$[ab^+b^-, ab^-b^+]$
	

$D3$
$[aaa,aaa]$


(三)正二十面體

$C1$		
$[a^+b^+c^+, a^+b^+c^+]$	$[a^+b^+c^+, a^+b^+c^-]$	$[a^+b^+c^+, a^-b^-c^-]$
		
$[a^+b^+c^+, b^+a^+c^+]$	$[a^+b^+c^+, b^-a^-c^+]$	$[a^+b^+c^+, b^-a^-c^-]$
		

[$a^+b^+c^+, a^+b^-c^-$]	[$a^+b^+c^+, a^-b^+c^-$]
	
[$a^+b^+c^+, b^-a^-c^+$]	[$a^+b^+c^+, b^+a^+c^-$]
	

<table>
<tr><td colspan="2">$C3$</td></tr>
<tr><td>$[\, a^{+}a^{+}a^{+},\, a^{+}a^{+}a^{+}]$</td><td>$[\, a^{+}a^{+}a^{+},\, a^{-}a^{-}a^{-}]$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$D1$</td></tr>
<tr><td>$[ab^{+}b^{-},\, ab^{+}b^{-}]$</td><td>$[ab^{+}b^{-},\, ab^{-}b^{+}]$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$D3$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$[aaa,aaa]$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

結論三：

(1) 三角形磁磚可密鋪於正四面體的結構有 5 種，分別為：$[a^+b^+c^+, a^+b^+c^+]$、$[a^+b^+c^+, b^-a^-c^+]$、$[a^+a^+a^+, a^+a^+a^+]$、$[ab^+b^-, ab^+b^-]$、$[aaa,aaa]$

(2) 三角形磁磚可密鋪於正八面體的結構有 10 種，分別為：$[a^+b^+c^+, a^-b^-c^-]$、$[a^+b^+c^+, b^+a^+c^+]$、$[a^+b^+c^+, a^+b^-c^-]$、$[a^+b^+c^+, a^-b^+c^-]$、$[a^+b^+c^+, a^-b^-c^+]$、$[a^+b^+c^+, b^+a^+c^-]$、$[a^+a^+a^+, a^+a^+a^+]$、$[a^+a^+a^+, a^-a^-a^-]$、$[ab^+b^-, ab^-b^+]$、$[aaa,aaa]$

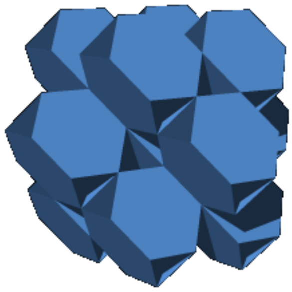
(3) 三角形磁磚可密鋪於正二十面體的結構有 2 種，分別為：$[a^+a^+a^+, a^+a^+a^+]$、$[aaa,aaa]$

我們進一步利用研究結果，製作各種不同的正多面體，其成品圖與結構如下表所示：

正多面體(磁磚結構)	正四面體($D1$)	正八面體($C1$)	正二十面體($C3$)
銜接符號	$[ab^+b^-, ab^+b^-]$	$[a^+b^+c^+, b^+a^+c^+]$	$[a^+a^+a^+, a^+a^+a^+]$
成品圖			

伍、 討論與未來展望

除了正四面體、正八面體、正二十面體這些立體結構外，本研究也嘗試在一些週期性立體圖形做應用，如：阿基米德立體圖中的截角四面體(3,6,6)、Mutetrahedron 等，相信未來將可以更廣泛的運用在相關立體圖形、建築設計。

週期性立體圖形名稱	**實作成品圖**
 Mutetrahedron 圖片來源：維基百科[8]	

週期性立體圖形名稱	實作成品圖
 截角四面體(3,6,6) 圖片來源：維基百科[9]	

陸、 結論

1. 三角形磁磚共有 11 種對稱密鋪圖結構。
2. M.C.Escher 在三角形結構的手作創作圖中只使用了 5 種不同密鋪結構。
3. (1)三角形磁磚可密鋪於正四面體的結構有 5 種，分別為：$[a^+b^+c^+, a^+b^+c^+]$、$[a^+b^+c^+, b^-a^-c^+]$、$[a^+a^+a^+, a^+a^+a^+]$、$[ab^+b^-, ab^+b^-]$、$[aaa,aaa]$

   (2)三角形磁磚可密鋪於正八面體的結構有 10 種，分別為：$[a^+b^+c^+, a^-b^-c^-]$、$[a^+b^+c^+, b^+a^+c^+]$、$[a^+b^+c^+, a^+b^-c^-]$、$[a^+b^+c^+, a^-b^+c^-]$、$[a^+b^+c^+, a^-b^-c^+]$、$[a^+b^+c^+, b^+a^+c^-]$、$[a^+a^+a^+, a^+a^+a^+]$、$[a^+a^+a^+, a^-a^-a^-]$、$[ab^+b^-, ab^-b^+]$、$[aaa,aaa]$

   (3)三角形磁磚可密鋪於正二十面體的結構有 2 種，分別為：$[a^+a^+a^+, a^+a^+a^+]$、$[aaa,aaa]$
3. 本研究成果除了可應用於相關平面鑲嵌圖形設計，也可在相關多面體上應用(如：正四面體、正八面體、正二十面體…等)，未來應可應用於相關建築設計。

柒、參考資料

[1] 張佐安、史謹誌、胡晉傑著,“繪身繪影─正三角形磁磚設計方法與碎形密鋪之研究”, 第47屆全國中小學科展佳作作品, 2007。

[2] 吳祥叡,凌胤濤,馮震昇著,”Escher狂想曲”,2013年台灣國際科展電腦科學科二等獎。

[3] 胡晉華著,”從平面到空間-廣義四邊形磁磚的設計法與應用”, 第 50 屆全國中小學科展佳作作品, 2010。

[4] 史謹誌著,”站在Escher的肩膀上-平面及空間中的密鋪圖形設計”, 第50屆全國中小學科展高中組佳作作品, 2010。

[5] 蕭鼎霖,陳裕達著,” M.C-Escher 極限圖的結構解析與實務研究”, 第60屆全國中小學科展第三名,2020。

[6] The Official M.C.Escher Website, by The M.C. Escher Company B.V., from http://www.mcescher.com

[7] AMA2.0 使用手冊。http://ama.nctu.edu.tw/

[8] Mutetrahedron：https://zh.wikipedia.org/wiki/六角六片三角孔扭歪無限面體

[9]截角四面體：https://zh.wikipedia.org/wiki/截角四面體