新竹市第四十一屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：雙方百計～四點連成正方形的公平性之探討

關 鍵 詞：正方形、連線遊戲、公平棋盤

編　　號：

摘要

本篇文章主要在研究四點連成正方形的 square it 遊戲，在一固定 N 階棋盤上，每個玩家每回合輪流在棋盤上落下一個棋子，先點出四個頂點連出正方形的玩家獲勝。

我們以系統的方式探討遊戲的必勝法則，並找尋是否有簡易不敗法則。我們發現一般的規則下先手必勝，所以我們嘗試增加遊戲複雜度，如國際間常用之五子棋開頭規則、落子數量規則，進一步探討此遊戲調整規則後之遊戲性和公平性。

壹、 前言

一、　研究動機

國二上時，我們在數學課學到了「根號」。老師讓我們用橡皮筋圍出正方形，其中也包含了許多邊長不是正整數的正方形，就要以根號作為邊長來學習。我發現這個遊戲很有趣，回家便找到來自英國劍橋大學教學科學中心的 NRICH 學習網站，裡面有一個叫 square it 的遊戲，是先後手輪流下棋，先點出正方形的四個頂點連出正方形者獲勝，無論正的正方形抑或是傾斜的正方形都可以，與課堂中的遊戲十分相似。我覺得很新奇，於是便繼續研究。

二、　研究目的

(一)研究一般規則的必勝方法

(二)改變 Square it 遊戲不同規則勝負情形之探討

三、　文獻探討

在資料[2] https://mathcommunities.org/square-it/中提到了 T 字型的必勝法則，將以此作為後續研究的基礎。

貳、 研究設備及器材

筆、紙、電腦（square it）

參、 研究過程或方法

一、遊戲規則（原始規則）：

先手為藍色棋子；後手為紅色棋子。

在點上輪流下一個棋子，先連成正方形就獲勝。

如圖 1-1 或圖 1-2。

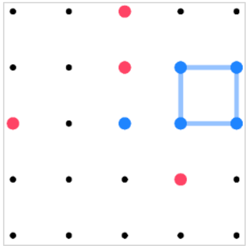


圖 1-1

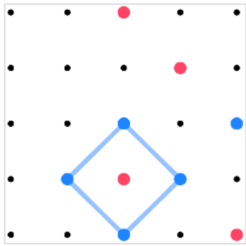


圖 1-2

二、名詞解釋

(一) N 階（N*N）棋盤

一排有 N 個點，就是 N 階（N*N）棋盤。

如圖 2 為 4 階（4*4）棋盤。

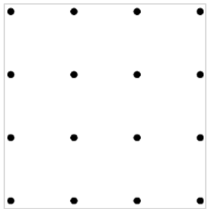


圖 2

(二) 正方形的名稱

設相鄰兩點距離為 1，正方形以邊長命名。棋盤越大，則正方形種類越多。

1. 3 階棋盤

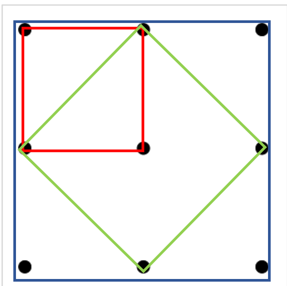


圖 3-1

紅色：邊長 1 正方形
藍色：邊長 2 正方形
綠色：邊長$\sqrt{2}$斜正方形

2. 4 階棋盤

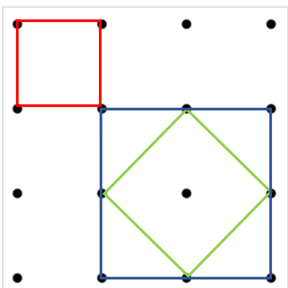


圖 3-3

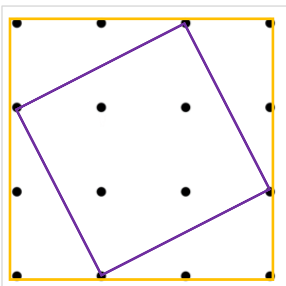


圖 3-4

紅色：邊長 1 正方形
藍色：邊長 2 正方形
橘色：邊長 3 正方形
綠色：邊長$\sqrt{2}$斜正方形
紫色：邊長$\sqrt{5}$斜正方形

(三) T 字型

由 4 個點連成的圖形，三點共線，分別為兩端點及中點，另一點在中垂線上，線上中點到另外三點等距，形成 T 字型。T 字型分為正 T 字型、斜 T 字型，如圖 4-1 為小正 T 型，邊長為 1；4-2 為大正 T 型，邊長為 2；4-3 為斜 T 字型，邊長為$\sqrt{2}$。

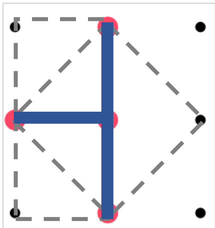
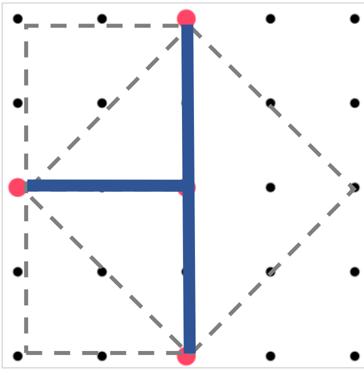
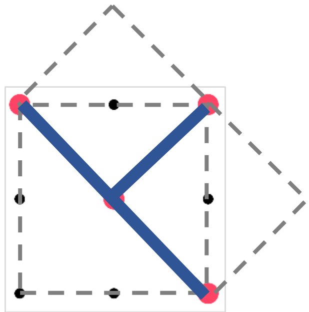
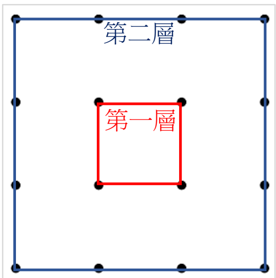




圖 4-1　圖 4-2　圖 4-3

(四) 第 K 層

分成偶數階棋盤及奇數階棋盤兩種情形，如下圖 5-1 及 5-2。



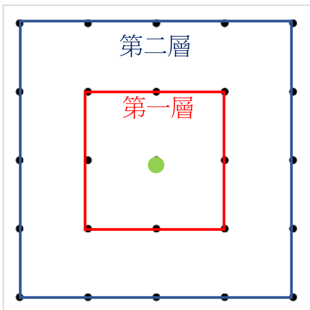
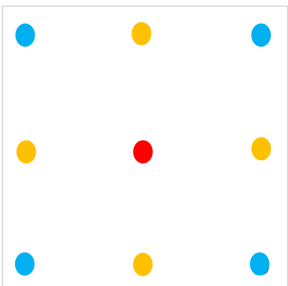


圖 5-1　圖 5-2

(五) 點的命名

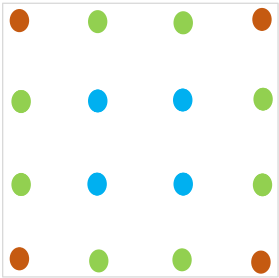
1. 3 階棋盤（圖 6-1）



紅色：中心點
橘色：邊中點
藍色：角點

圖 6-1

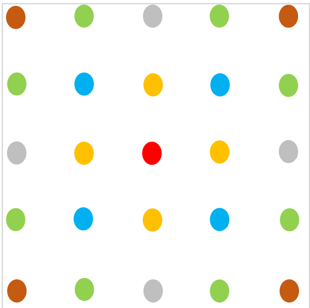
2. 4 階棋盤（圖 6-2）



藍色：第一層角點
綠色：邊上點
棕色：第二層角點

圖 6-2

3. 5 階棋盤（圖 6-3）



紅色：中心點
橘色：第一層邊中點
藍色：第一層角點
灰色：第二層邊中點
綠色：第二層邊上點
棕色：第二層角點

圖 6-3

(六) 雙く字型

1. 三點連成邊長為的兩條線夾角 90˚的圖形。如圖 7-1。
2. 特定延伸：當兩個く字型的相對應兩點各相鄰，其中各有一點在第一層角點上，且く字型將延伸出棋盤範圍外時，則將超出範圍之子平行移動至棋盤的最下方，如圖 7-2。

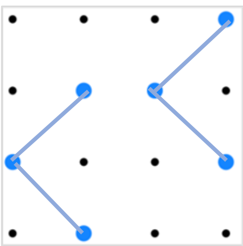


圖 7-1

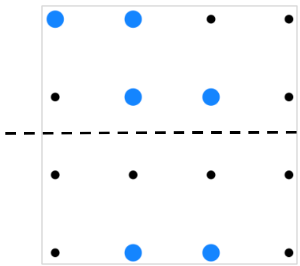


圖 7-2-1

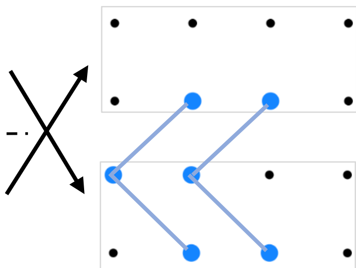


圖 7-2-2

(七) 座標位置

我們運用直角坐標表示法來設置每點座標位置為（m,n），m 為 x 軸座標；n 為 y 軸座標，向右、向上為正向。

以 4 階棋盤為例，我們定義左下角之點座標位置為（1,1），最右上的點座標位置為（4,4），如圖 8。

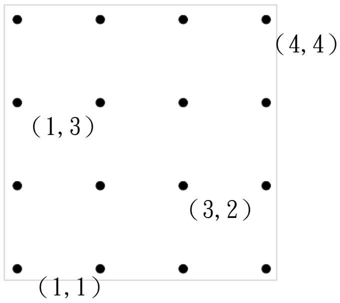


圖 8

(八) 方活二

差兩子構成正方形的圖形，可旋轉、等比例放大或縮小，如圖 9-1~9-5 之圖形均可稱為方活二。

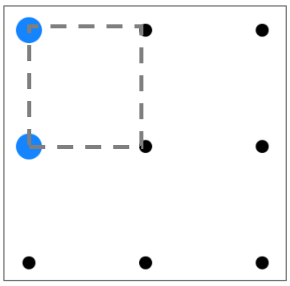


圖 9-1

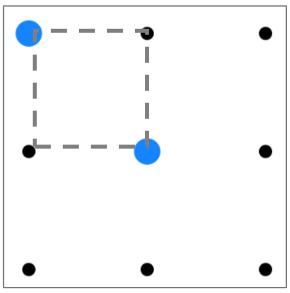


圖 9-2

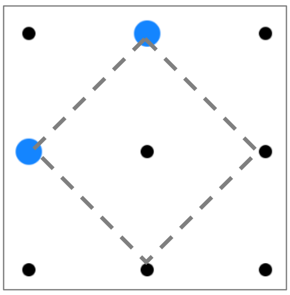


圖 9-3

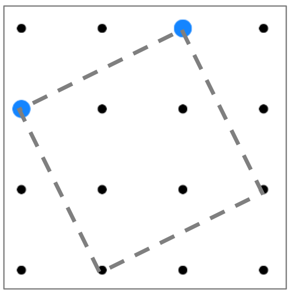


圖 9-4

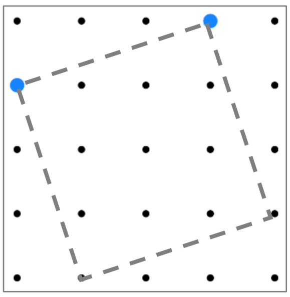


圖 9-5

(九) 方活三

差一子構成正方形的圖形，可旋轉、等比例放大或縮小，如圖 10-1~10-5 之圖形均可稱為方活三。

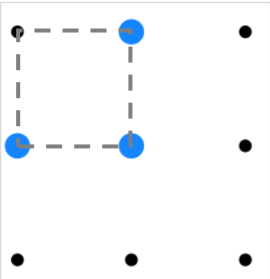


圖 10-1

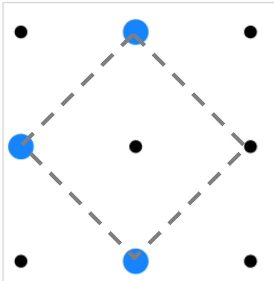


圖 10-2

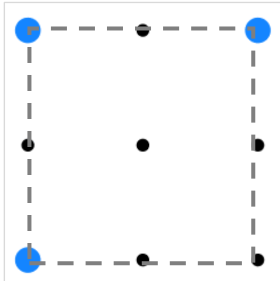


圖 10-3

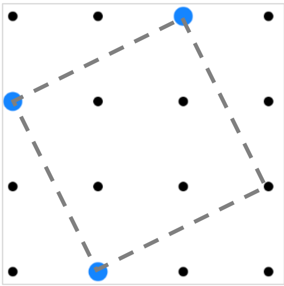


圖 10-4

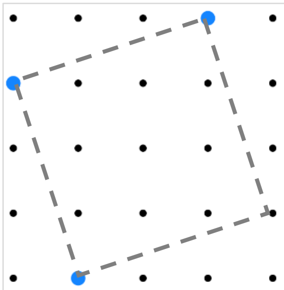


圖 10-5

三、Square it 遊戲勝負情況之探討

(一) 3 階棋盤之探討：

3 階棋盤中各點所能組成的正方形數如圖 11-1，可推得中點可組成的正方形數較多，故先手先下在中點。

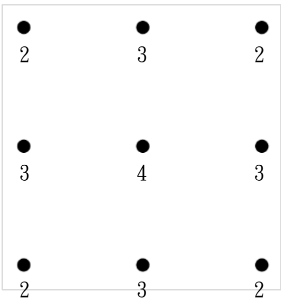


圖 11-1

紅色：邊長 1 正方形 ×4
藍色：邊長 2 正方形 ×1
綠色：邊長$\sqrt{2}$斜正方形 ×1

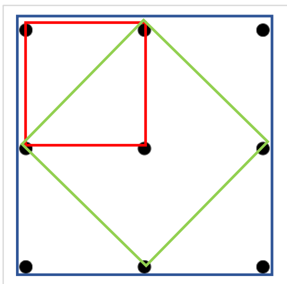


圖 11-2

1. 分析步驟（先手視角）：3 階棋盤因棋盤過小，在製造方活三的途中便會被阻擋，所以我們將以不敗為前提做討論。

    (1) 第一子下在中心點，可阻擋四個邊長 1 正方形。
    (2) 第二子下在邊中點，可阻擋一個邊長$\sqrt{2}$正方形；或著下在角點，可阻擋一個邊長 2 正方形。
    (3) 第三子則依照第二子下在另一種點上。
    在過程中，因為邊中點及角點各有 4 個，後手便無法擋住先手的第二、三子。當以上三點均有先手的棋子，同時代表每個正方形中都有先手的棋子，使後手無法連成任何正方形，先手達成不敗。

中心點：四個正方形

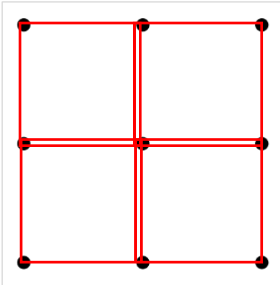


圖 11-3-1

邊中點：一個正方形

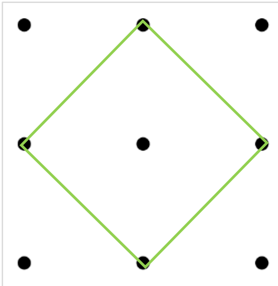


圖 11-3-2

角點：一個正方形

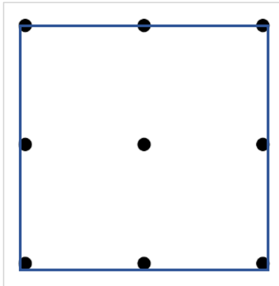


圖 11-3-3

2. 策略：中心點→邊中點→角點 / 中心點→角點→邊中點

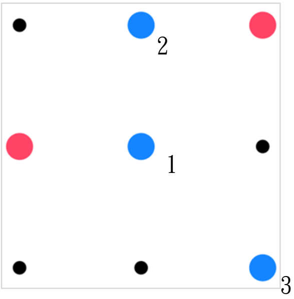


圖 11-3-5

3. 3 階棋盤複雜度：3 階棋盤的總複雜度(未刪除不合理之棋盤)為 3^9，約為 10^4
4. 結論：三階棋盤無必勝策略，但我們可確保不敗策略只需三子。

(二) 4 階棋盤之探討：

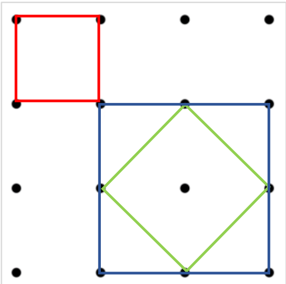


圖 12-1-1

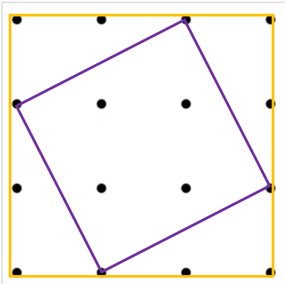


圖 12-1-2

紅色：邊長 1 正方形 ×9
藍色：邊長 2 正方形 ×4
橘色：邊長 3 正方形 ×1
綠色：邊長$\sqrt{2}$斜正方形 ×4
紫色：邊長$\sqrt{5}$斜正方形 ×2

4 階棋盤中各點所能組成的正方形數如圖 12-2，

可推得第一層角點可組成的正方形數較多，

故先手先下在第一層角點。

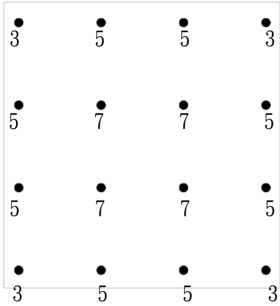
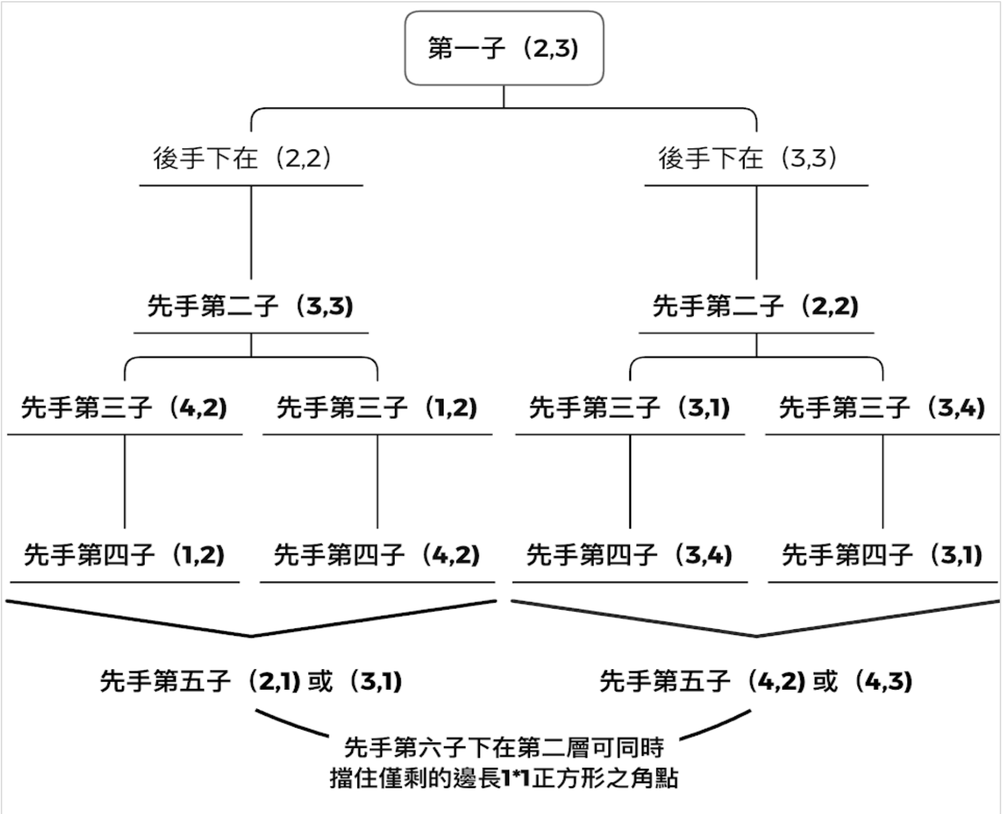


圖 12-2

1. 分析步驟（先手視角）：4 階棋盤因棋盤過小，無法同時製造出 T 字型，在製造出 T 字型的途中便會被阻擋，無法取勝，所以我們將以不敗為前提做討論。
   (1) 第一層角點要下 2 子（必須相鄰）。
   (2) 第二層角點要下 1 子。
   (3) 第二層邊上點要下 2 子（必須為不同邊長$\sqrt{5}$的斜正方形）。
   (4) 另 1 子可下第二層角點或邊上點（擋住剩下的邊長 1 正方形即可）。
   因為在每個正方形中必有一子為先手的棋子，使後手無法連成任何正方形，先手達成不敗。
2. 實際落子情形：後手無擋住任何下棋位子且過程中後手無達成方活三
   (1) 第一步下在第一層角點（2,3）
   (2) 若後手下在（2,2）則第二子下在（3,3）
   若後手下在（3,3）則第二子下在（2,2）
   } 達成 2 子相鄰的第一層角點
   (3) 第二子下在（3,3）則第三子下在（4,2）或（1,2）
   第二子下在（2,2）則第三子下在（3,1）或（3,4）
   (4) 第三子下在（3,1）則第四子下在（3,4）
   第三子下在（3,4）則第四子下在（3,1）
   } ①
   第三子下在（4,2）則第四子下在（1,2）
   第三子下在（1,2）則第四子下在（4,2）
   } ②
   (5) ①當先手有下（3,1）及（3,4）時，第五子下在（4,2）或（4,3）
   ②當先手有下（1,2）及（4,2）時，第五子下在（2,1）或（3,1）
   (6) 第六子下在（1,4）、（1,1）、（4,1）或（4,4），需可同時擋住僅剩的邊長 1*1 正方形

我們將以上步驟簡化為流程圖 1



流程圖 1

上述流程圖的左分支結果為圖 12-3-1，右分支結果為圖 12-3-2：

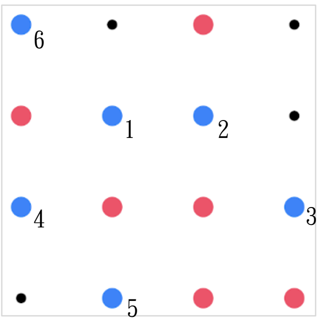


圖 12-3-1

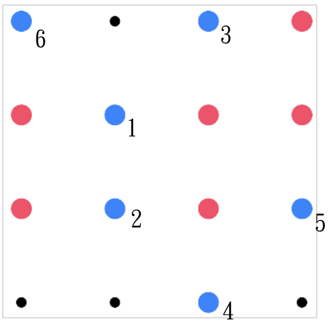


圖 12-3-2

3. 歸納：在以上情況中，我們發現其完成後的圖型像是兩個く字型，就算後手擋住任何下棋位子或過程中後手達成方活三，也就是不符合以上情況時，都可以依照以下的雙く字法則保證不敗。

(1) 雙く字法則：第一、二子下在第一層相鄰的兩個角點，無論後手擋在哪，先手只要做出兩個方向相同的く，而因為每一子下的地方都可以阻止後手連成正方形，因此即可保證不敗。如圖 12-4。

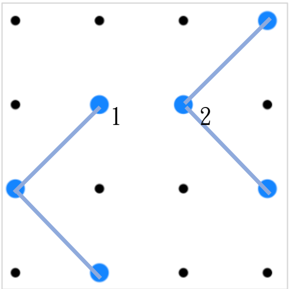


圖 12-4

(2) く字延伸法則：先手第一、二子下在第一層相鄰的兩個角點後，一樣是製造出兩個く字型，但方向可不用相同，且延伸出棋盤範圍外的く字型可為一個或兩個。其中超出棋盤範圍的棋子將平移至另一側的第二層點上，如此即可破壞所有正方形的形成。如圖 12-5-1 及圖 12-5-2。

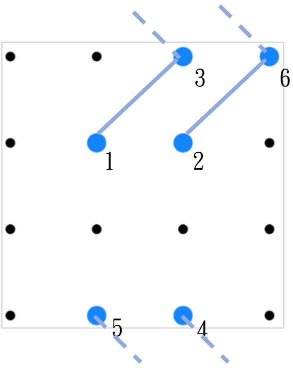


圖 12-5-1

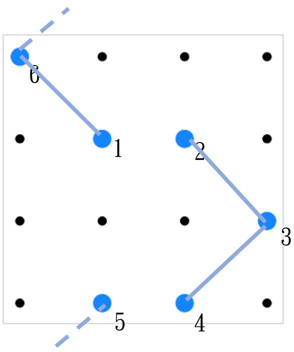


圖 12-5-2

4. 策略：第一層角點→第一層角點→雙く字法則
5. 4 階棋盤複雜度：4 階棋盤的總複雜度(未刪除不合理之棋盤)為 3^{16}，約為 10^{7}
6. 結論：四階棋盤無必勝策略，但我們可確保不敗策略只需六子。

(三) 5 階棋盤之探討：先手下中心點，接著輪到後手。

5 階棋盤中各點所能組成的正方形數如右圖，

可推得中心點可組成的正方形數較多，

故先手先下在中心點。

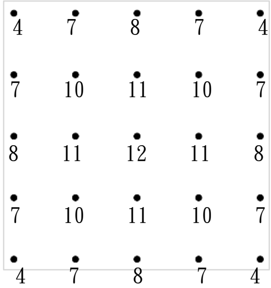


圖 13-1

1. T 字型

文獻中提到 T 字型是一種必勝策略，只要依照步驟下出 T 字型，後手便會因為同時有 2 個方活三而無法擋住，先手則獲勝。圖形在建立時無須理會對手的位置，但一開始下棋範圍內都不可有對方的棋子。

(1) 小正 T 型

以圖 13-2-1、13-2-2 為基礎，下成如圖 13-2-3 的圖型，而後手被迫擋住方活三。之後下在圖 13-2-4 任一標記處。後手擋住任一個方活三，最後均能下在另一個空位來完成正方形如圖 13-2-5。

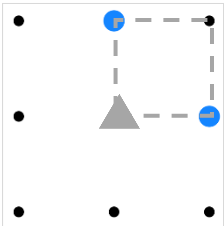


圖 13-2-1

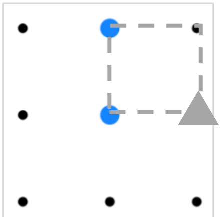
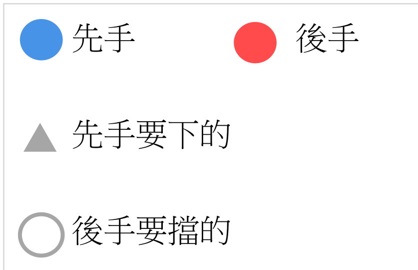


圖 13-2-2



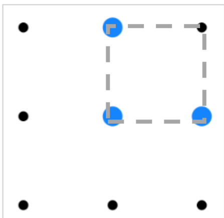


圖 13-2-3

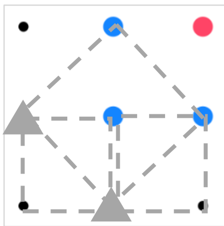


圖 13-2-4

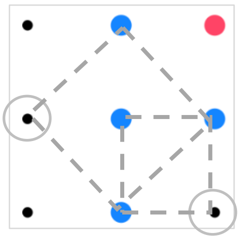


圖 13-2-5

(2) 大正 T 型

以圖 13-3-1、13-3-2 為基礎，下在兩子的交接處如圖 13-3-3，而後手被迫擋住方活三。之後下在圖 13-3-4 任一標記處。後手擋住任一個方活三，最後均能下在另一個空位來完成正方形如圖 12-3-5。

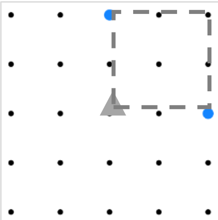


圖 13-3-1

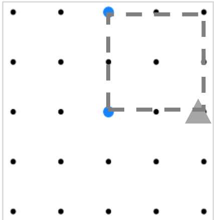
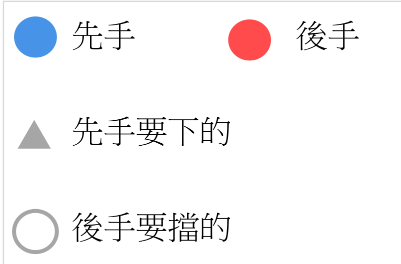


圖 13-3-2



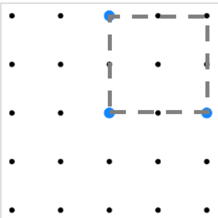


圖 13-3-3

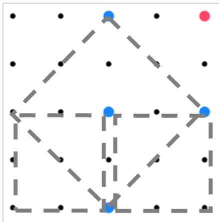


圖 13-3-4

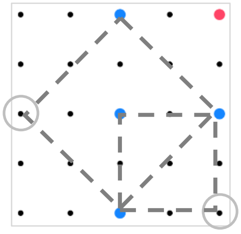


圖 13-3-5

(3) 斜 T 字型

以圖 13-4-1、13-4-2 為基礎，下在兩子的交接處如圖 13-4-3，而後手被迫擋住方活三。之後下在圖 13-4-4 標記處。後手擋住任一個方活三，最後均能下在另一個空位來完成正方形如圖 13-4-5。

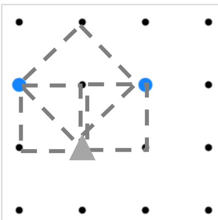


圖 13-4-1

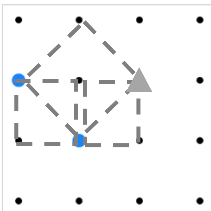
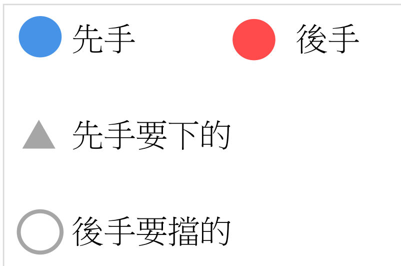


圖 13-4-2



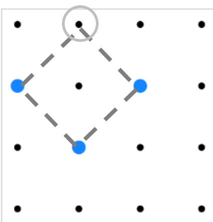


圖 13-4-3

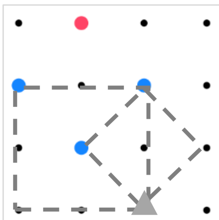


圖 13-4-4

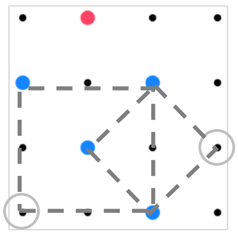


圖 13-4-5

由以上方式可知，先手若下出 T 字型即可獲勝，然而文獻中並未提及若對手以對 T 字型有防備前提下，應如何以最少落子數達到必勝。我們將用 T 字型法則發展出完整的必勝策略，並加以詳細整理如下。此時先手必須下出可以同時製造 2 種 T 字型的子，才能因應後手的棋子去應變，以下將分類討論。

2. 後手下在第一層

先手第二步下離對手遠的第二層邊中點時，有兩種組成 T 字型的方法可以選擇—大正 T 型及小正 T 型，而後手只能擋住其中一種。當後手擋住任一種 T 字型方法時，則可選擇另一種方法完成 T 字型。

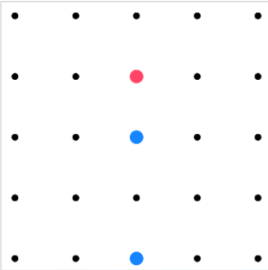


圖 13-5-1

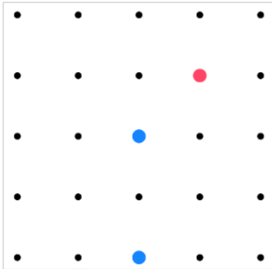


圖 13-5-2

（1）○▲ 沒有棋子時—可用大正 T 型攻略

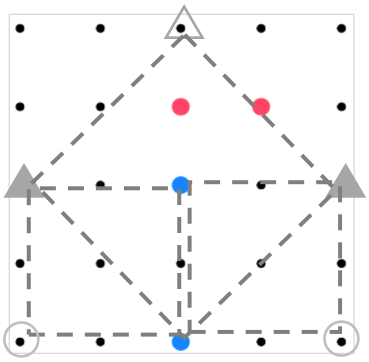
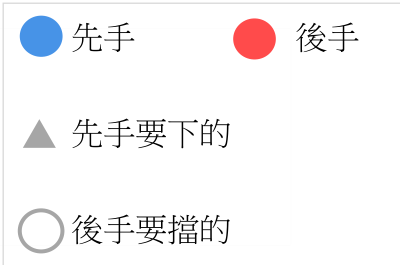


圖 13-6

①下在任一▲

②下在另一個▲

③完成最後的正方形



例如：

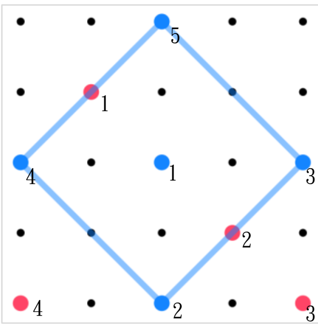
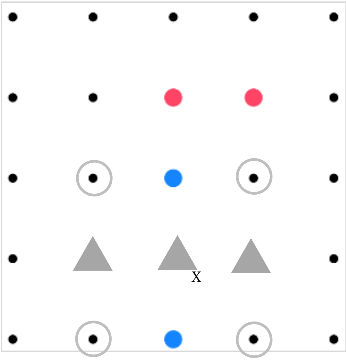


圖 13-7

（2）○▲ 沒有棋子時—可用小正 T 型攻略



①下在任一▲

②下在▲x

③完成最後的正方形

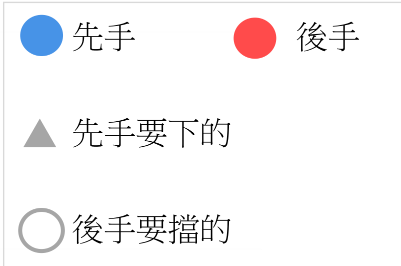


圖 13-8

例如：

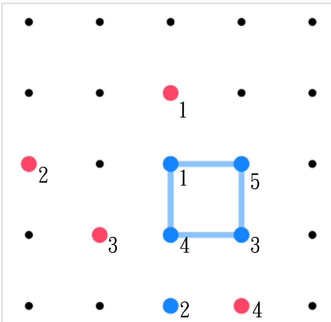


圖 13-9

當 T 型最終完成時，有 2 個方活三，而後手只能擋住其中一個，故先手必勝。

3. 後手下在第二層

先手第二步下離對手遠的第一層角點時，有兩種組成 T 字型的方法可以選擇—小正 T 型及斜 T 型，而後手只能擋住其中一種。當後手擋住任一種 T 字型方法時，則可選擇另一種方法完成 T 字型。

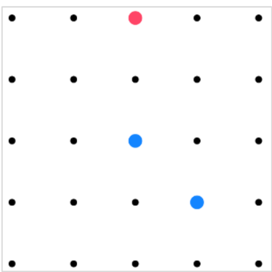


圖 13-10-1

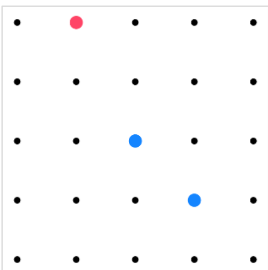


圖 13-10-2

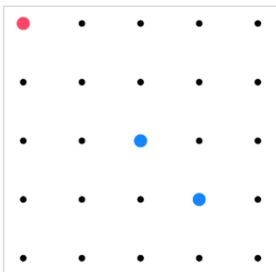


圖 13-10-3

(1) 組裡○▲ 沒有棋子時—可用小正 T 型攻略 （以下 4 種圖形選一組）

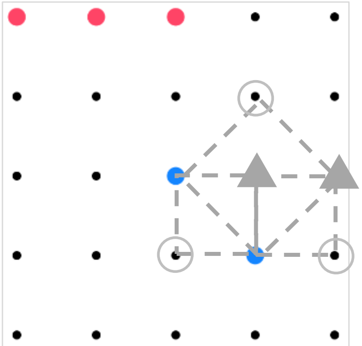


圖 13-11-1

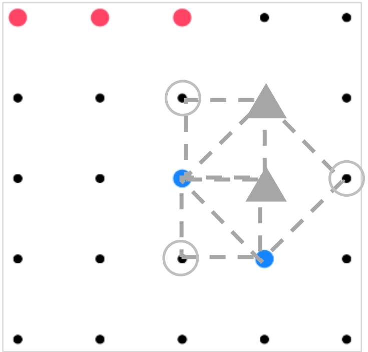
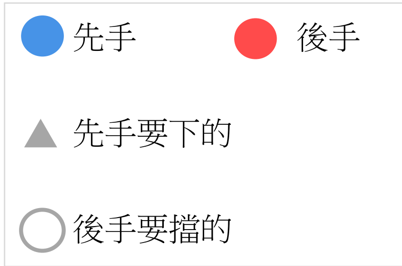


圖 13-11-2



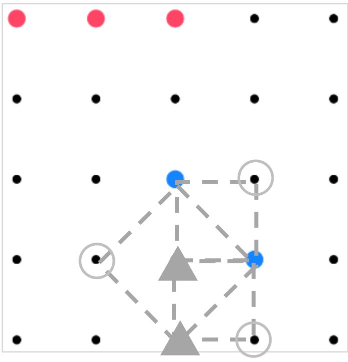


圖 13-11-3

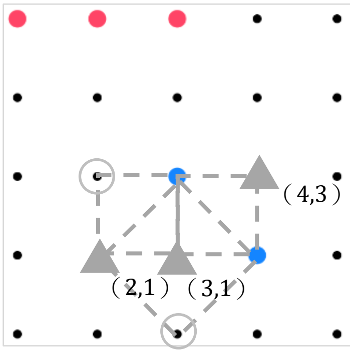


圖 13-11-4

①下在任一▲

②下在另一個▲ 或第一步棋子座標對應之第二步棋子座標▲

⇒ ①下（4,3）對應②下（2,1）

⇒ ①下（2,1）對應②下（3,1）

⇒ ①下（3,1）對應②下（2,1）

③完成最後的正方形

例如：

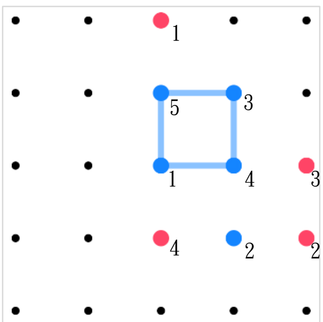
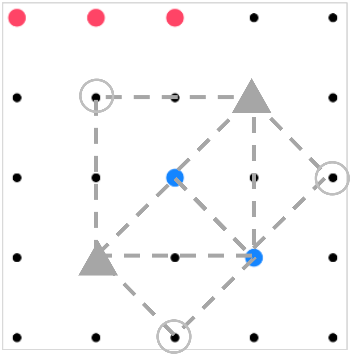


圖 13-12

(2) 組裡 ◯▲ 沒有棋子時—可用斜 T 型攻略（以下 2 種圖形選一組）之一



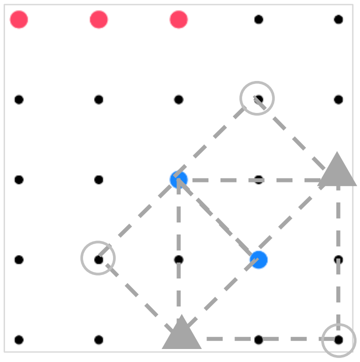


圖 13-13-1　　圖 13-13-2

①下在任一 ▲

②下在另一個 ▲

③完成最後的正方形

例如：

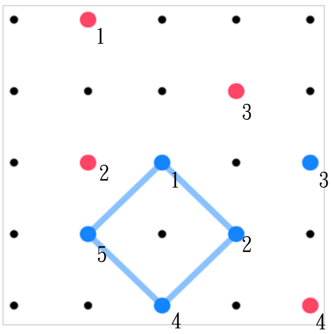
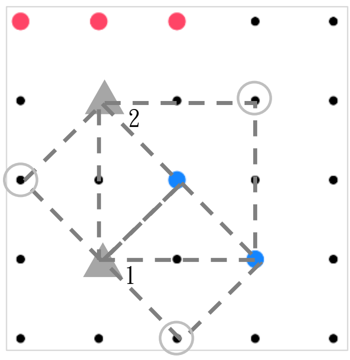


圖 13-14

(3) 組裡 ◯▲ 沒有棋子時—可用斜 T 型攻略（以下 2 種圖形選一組）之二



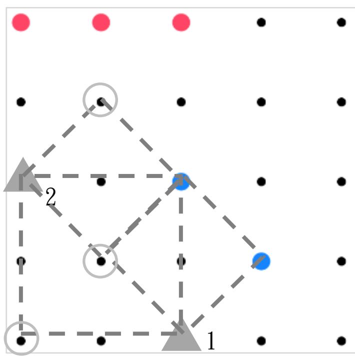


圖 13-15-1　　圖 13-15-2

①下在 $▲_1$

②下在 $▲_2$

③完成最後的正方形

例如：

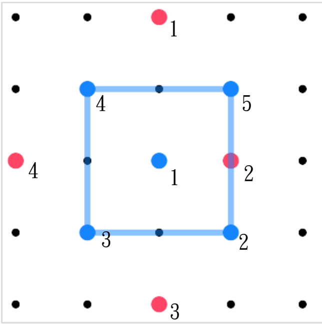


圖 13-16

當 T 型最終完成時，有 2 個方活三，而後手只能擋住其中一個，故先手必勝。

4. 5 階棋盤複雜度：5 階棋盤的總複雜度(未刪除不合理之棋盤)為 3^{25}，約為 10^{11}
5. 結論：先手必勝，為五子必勝法。

(四) 6 階以上棋盤探討

6 階以上之棋盤不會影響 5 階棋盤範圍中的必勝策略，只要遵守相同的方法，一樣是先手必勝。如果後手下在擴充的棋盤中，則兩種方式擇一即可。

例如：

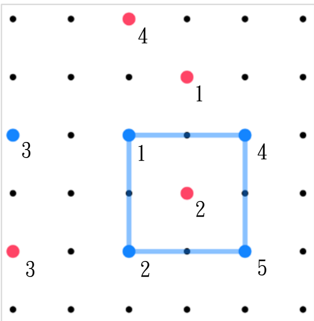


圖 14

肆、 研究結果

一、一般規則的 3 階及 4 階棋盤因盤面過小，無法同時因應後手的棋子製造 T 字型，故無必勝策略，但我們可確保不敗策略。

二、一般規則的 5 階棋盤中，先手可依據後手第一子製造 T 字型，故先手必勝。當後手下在第一層時，先手第二子下在離對手遠的第二層邊上點；當後手下在第二層時，先手第二子下在離對手遠的第一層角點。

三、在一般棋盤中，先手有絕對的優勢，使棋盤不具有公平性。

我們參照一些國際知名的對弈棋類遊戲，例如五子棋（15*15 無禁手）、圍棋（9*9）、中國跳棋（2 人），這些遊戲亦存在著先手優勢的問題，對於專業玩家來說，正式比賽故有先手禁手、讓子等不同之規則以求公平性，從這些遊戲的空間複雜度來思考公平性，這些遊戲的複雜度均高於 10 的 20 多次方，空間複雜度如下表 1，對非專業玩家來說，因其複雜度夠高而使得先手優勢削弱了。

而 square it 遊戲在三階棋盤中的空間複雜度約為 10 的 4 次方，四階棋盤中的空間複雜度約為 10 的 7 次方，五階棋盤中的空間複雜度約為 10 的 11 次方，這些還都是未刪除不合理棋盤的空間複雜度，便遠遠低於常見的對弈棋類遊戲，以棋盤變化性來說一般規則的 square it 遊戲要成為國際型棋類賽事顯然複雜度不夠。另外，先手永遠比後手多一子，造成後手時常處於迫著情形。在 Wu、Huang、Chang 於 2005 論文中定義，square it 五階棋盤以上是屬於明確不公平性（已經證明出一方必勝，則此遊戲可稱為明確不公平）的遊戲，而複雜度是公平性及遊戲性的一項重要依據。

遊戲名稱	複雜度 (已刪除不合理棋盤)	遊戲名稱	複雜度 (未刪除不合理棋盤)
五子棋 (15*15 無禁手)	10^{105}	3 階 square it	10^{4}
圍棋 (9*9)	10^{38}	4 階 square it	10^{7}
中國跳棋 (2 人)	10^{23}	5 階 square it	10^{11}

表 1

伍、 討論

在一般規則的棋盤中，我們發現 5 階以上之棋盤都是先手必勝，於是我們想研究其他規則的棋盤，找出是否有後手獲勝或平手的棋盤，如加入禁手或可下棋子數量調整等，進而讓遊戲更公平、更有遊戲性。

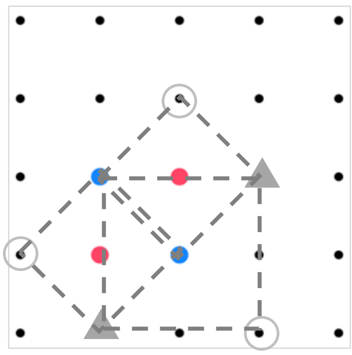
一、Square it 遊戲—五子棋法之探討

若中央位置為最有利之先手選擇位置，探討之五子棋法的開頭方式可避免先手下在中點。

(一) 遊戲規則

開局時先將雙方棋子交錯下在中心點、第一層的 2 個邊中點及第一層角點，同顏色的棋子須在斜對角。

(二) 五子棋法之勝負探討



①下在▲ 擇一

②下在另一個▲

③完成最後的正方形

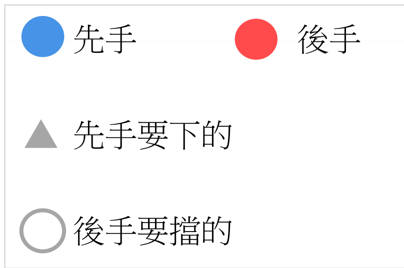


圖 15

從後手的第一步開始，都必須去擋住先手的方活三，最後的方活三將無法阻擋，故先手必勝。

二、Square it 遊戲—1222 法之探討

若先手有著比後手多一子的優勢，則探討 1222 法使後手有機會多先手一子（先手多一子→後手多一子→先手多一子→後手多一子⋯⋯）。

(一) 遊戲規則

第一局先手下 1 子棋，後手下 2 子棋；從第二局開始無論先手或後手都輪流下兩子（先手 1 子→後手 2 子→先手 2 子→後手 2 子⋯⋯都是 2 子）

(二) 1222 法之勝負探討（後手視角）

先手無論第一輪的一子下在何處，後手第一輪只需以兩子共同製造出 3 個方活二。先手第二輪的兩子擋住 3 個方活二中的≦2 個，剩≧1 個方活二。後手第二輪的兩子即可直接完成最後的正方形，簡而言之，因每次可下兩子，只要達成方活二幾乎就篤定下一回直接勝利，雖然解決了先手多一子的問題，提高的公平性但因遊戲的複雜度不夠而讓此一玩法更加喪失了遊戲性。如圖 16-1 及 16-2。

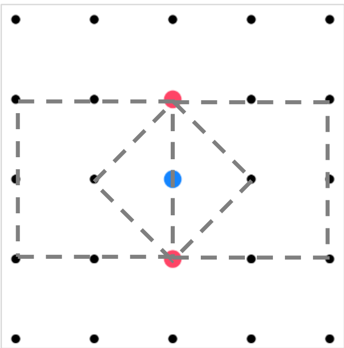


圖 16-1

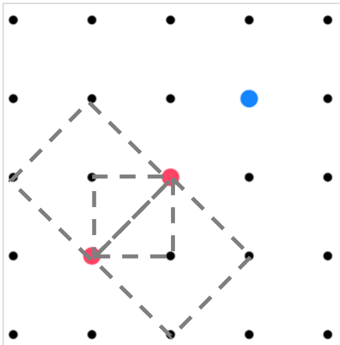


圖 16-2

三、Square it 遊戲—1221 法之探討

在 1222 法的遊戲中，後手在第二輪便會結束遊戲，遊戲性降低，所以我們創造 1221 法使後手依然有機會多先手一子，但又不會像 1222 法一樣，使後手多子的機會減少（先手多一子→後手多一子→先手多一子→一樣多⋯⋯）。

(一) 遊戲規則

第一局先手下一子棋，後手下兩子；第二局先手下兩子，後手下一子，第三局先手下一子，後手下兩子；第四局先手下兩子，後手下一子，以此類推。

(二) 1221 法之勝負探討（後手視角）

在 1222 的基礎上，先手第二輪的兩子擋住 3 個方活二中的≦2 個，剩≧1 個方活二。後手第二輪的一子製造新的 1 個方活二，變成≧2 個方活二。先手第三輪的一子擋完≦1 個方活二後，還剩≧1 個方活二。後手第三輪的兩子完成最後的 1 個方活二即可。後手必勝。

例如：

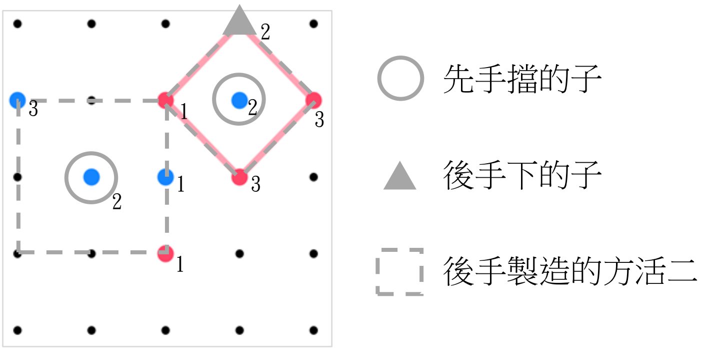


圖 17-1-1

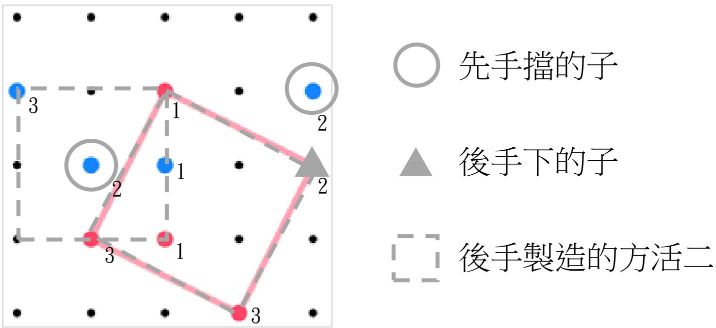


圖 17-1-2

四、Square it 遊戲—先手不正法之探討

先手不正法是限制先手只能以斜正方形構成方能得勝，此一玩法限制的先手獲勝方法，使先手可構成之正方形數大幅降低。

(一) 遊戲規則

在每局中都輪流下一子棋，但先手只能連斜的正方形，而後手可以連直立和斜的正方形（先手只有下出斜的正方形才能獲勝）

(二) 先手不正法之勝負探討

在 5 階棋盤中，正的正方形有 30 個，而斜的正方形有 20 個，如果限制先手只有下出斜的正方形才能獲勝，將使先手過於不利。後手在遊戲中較易取得勝利，其中進一步的研究將繼續探討。

陸、 結論

一、研究一般規則的必勝法則：透過本分析探討，一般規則下的任意棋盤大小已完成所有不敗或必勝之策略制定，如下表 2

<table>
<tr><th>棋盤</th><th>研究結果</th><th>情況分類</th><th>不敗策略或必勝方式</th></tr>
<tr><td>3 階</td><td>平手</td><td>3 階棋盤</td><td>中心點→邊中點→角點
中心點→角點→邊中點</td></tr>
<tr><td>4 階</td><td>平手</td><td>4 階棋盤</td><td>第一層角點→第一層角點→雙く字法則</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5 階以上</td><td rowspan="2">先手必勝</td><td>後手下在第一層</td><td>下離對手遠的第二層邊上點</td></tr>
<tr><td>後手下在第二層</td><td>下離對手遠的第一層角點</td></tr>
</table>

表 2

二、不同 Square it 遊戲規則勝負：而以下之特殊遊戲性規則亦完成三種特殊規則之勝負探討

(一) 五子棋：先手必勝
(二) 1222 之法則：後手必勝
(三) 1221 之法則：後手必勝
(四) 先手不正之法則：後手優勢較大

柒、 未來展望

一、在先手不正中，我們尚未完成研究，故希望未來可以探討出任一方具有必勝策略，抑或是証明出此規則下的 square it 為潛在公平性遊戲。

二、這次的探究中我們只針對了一般棋盤以及一些變化的棋盤，得出的結論是無論是何種以上的棋盤，都必有一方不敗。故我們希望未來可以發掘更多不同的棋盤規則，找出具有公平性的棋盤。

捌、 參考資料及其他

[1] 數學遊戲程式網址：https://nrich.maths.org/square-it/

[2] Square it 遊戲介紹：https://mathcommunities.org/square-it/

[3] 遊戲複雜度：https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%B8%B8%E6%88%8F%E5%A4%8D%E6%9D%82%E5%BA%A6

[4] I-Chen Wu,Dei-Yen Huang,Hsiu-Chen Chang(2005).*Connect6*.ICGA Journal, Vol. 28, No. 4,

[5] k 子棋的複雜度和公平性之探討 On the complexity and fairness of the generalized k-in-a-row games /余謝銘