新竹市第四十一屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：屏棋，不平做～屏風式四子棋必勝策略之探討

關鍵詞：屏風式四子棋、Connect Four

編　　號：

摘要

我們在數學課中認識了一款叫屏風式四子棋的雙人對戰遊戲（如右圖）。雖然其許多模式的勝負情形已有分析程式，但我們希望可以用數學找出單靠人腦也不會輸的簡單策略。其遊戲規則為在7×6的直立式棋盤中，雙方輪流把一枚己方棋子投入某欄，使棋子因地心引力落下在底部或其他棋子上。若己方4枚棋子以縱、橫、斜方向連成一線即獲勝。若棋盤滿棋時，無任何人連成4子，則平手。我們延伸該遊戲，使連線子數及棋盤大小可自訂。我們從小棋盤，連線子數少的模式開始研究，並發現了三子連線，各種棋盤的勝負情形。甚至還找出了這些棋盤的不敗和必勝策略，並進一步對四子連線做了深入探討。

壹、前言

一、研究動機

在一節專題課中，有位同學介紹了一款兩人對戰的遊戲：屏風式四子棋（Connect Four）。雖然4子連線中許多棋盤的勝負情形已有分析之程式（見文獻回顧（一）），但是我們希望可以用數學的方式歸納並研究出多子連線、無限大棋盤中的勝負情形與必勝策略，並找出一種可以單靠人腦也不會輸的簡單策略或步驟。於是我們從小棋盤開始，逐步擴大研究。

二、研究目的

（一）分析$m\times n$棋盤，1子及2子連線的勝負情形與必勝策略。

（二）分析$m\times n$棋盤，X子連線（$n<X\wedge X\geq 3$及$m<X$）的勝負情形與不敗策略。

（三）分析$m\times n$棋盤，3子連線的勝負情形與不敗策略。

（四）分析$m\times n$棋盤，4子連線的勝負情形與不敗策略。

（五）分析$m\times n$棋盤，X子連線的勝負情形與不敗策略。

三、文獻回顧

（一）https://connect4.gamesolver.org/en/

此網站會用程式分析【4】7×6往後每一步的結果，並建議最佳下法。

（二）http://blog.gamesolver.org/

此網站解釋了文獻回顧（一）的背後演算法與符號表示法。

（三）https://tromp.github.io/c4/c4.html

此網站提供了【4】$m\times n$（$m+n\leq 15$及$m=n=8$）之勝負情形。

本報告中參考了其【4】4×4及【4】5×4（平手）、【4】6×4（後手必勝）的結論。

貳、研究設備及器材

一、點石學園Stone Campus https://stonecampus.net/

二、Scratch https://scratch.mit.edu/

三、紙、筆

參、研究過程或方法

最初之屏風式四子棋遊戲裝置如右圖，其遊戲規則為在7×6的直立式棋盤中，雙方輪流投一枚己方棋子入某欄，使棋子落下在底部或其他棋子上。若己方4枚棋子以縱、橫、斜方向連成一線即獲勝。若棋盤滿棋時，無任何人連成4子，則平手。我們希望可以研究出獲勝的簡單策略，甚至推廣到多子連線、無限大棋盤中的勝負情形與必勝策略，於是定義了以下名詞。

一、名詞釋義

（一）$m\times n$棋盤

指有m欄、n列的棋盤。如下圖1-1為3×3棋盤，而下圖1-2為4×3棋盤。

（二）cn

棋盤中欄的編號，由左至右分別為$c1$、$c2\cdots$.以此類推。如圖2-1所示，每條藍線即為一欄。

（三）rn

棋盤中列的編號，由下至上分別為$r1$、$r2\cdots$.以此類推。如圖2-2所示，每條紅線即為一列。

（四）【X】$m\times n$

指需X個子連成一線才會獲勝，且棋盤為$m\times n$的遊戲模式。例如下圖3為在【3】4×5中，先手連線並獲勝之情形。

（五）$CX(x,y)$

位於cx和ry相交處的格子，例如圖4（4×5棋盤）中黃格子在$CX(1,1)$，紅格子在$CX(3,1)$。

（六）$GP(Game\ Point)$

【X】$m\times n$中，再下一子即可能可使X子連成一線時的狀態，需下位置稱為GP處。例如圖5-1中，藍線處即為一個GP，而圖5-2之綠線皆非GP。

圖1-1

圖1-2

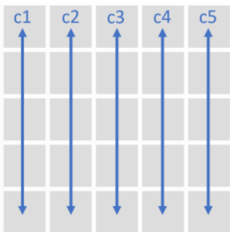


圖2-1

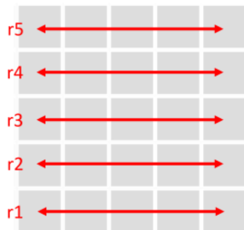


圖2-2

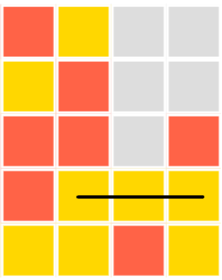


圖3

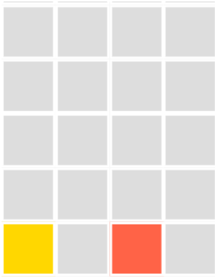


圖4

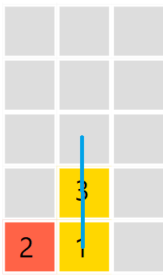


圖5-1

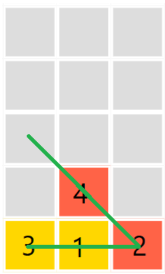


圖5-2

定義完上述名詞後，為了方便研究，我們希望從小棋盤及較少的連線子數推論出大棋盤及較多的連線子數之勝負情形及必勝策略，於是定義其延伸遊戲之遊戲規則如下。

二、延伸遊戲規則

（一）選擇遊戲模式之棋盤大小與連線子數。

1. 棋盤

選擇欄數及列數。

2. 連線子數大小

選擇需由縱、橫或斜向連成一線才可獲勝之格子數量。

（二）兩方輪流將棋子下在每一欄中的從上而下數最後一個空格（即從下而上數第一個未被下過之格子），此格需塗上該玩家的代表色（我們以黃色代表先手，紅色代表後手，灰色代表空格）並標示步數，如圖6。

圖6

（三）當有一方達成獲勝條件（如圖7）或無法再下任何一顆棋子時（如圖8），遊戲結束，由達成獲勝條件者獲勝，若無人達成獲勝條件，則視為平手。

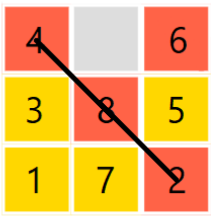


圖7

圖8

首先我們想從較簡單的遊戲模式開始研究，於是我們研究起【*1*】$m \times n$、【*2*】$m \times n$，從中發現到了一些規律，並得出兩結論。

三、【*1*】$m \times n$、【*2*】$m \times n$的勝負情形之探討

（一）【*1*】$m \times n$的勝負情形之探討

因為只要下一顆棋子即可獲勝，因此在【*1*】$m \times n$中，先手無論下在任何一欄皆可獲勝。如圖9。

（二）【推論1】

在【*1*】$m \times n$中，先手必勝。

（在一子連線即獲勝的情形中，先手必勝。）

（三）【*2*】$m \times n$的勝負情形之探討

在【*2*】$m \times n$中，若$m \geq 2 \wedge n \geq 2$或$m \geq 3$，先手第一步靠中間下，即可造出至少兩個GP，如圖10藍線，結果圖形如圖11-1、圖11-2。其餘情形為平手。

圖9

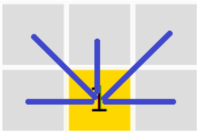


圖10

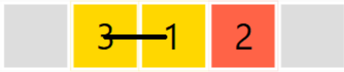


圖11-1

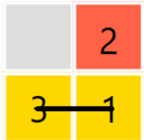


圖11-2

（四）【推論2】

在 *【2】*$m \times n$中，只要$m + n \geq 4$，先手必勝，其餘情形為平手。
（在二子連線即獲勝的情形中，只要列、欄數和為四以上，則先手必勝。
若列、欄數和為三以下，則必平手。）

接著我們想先研究不可能斜向連線之情形，於是我們研究起 *【3】*$m \times 1$、*【3】*$m \times 2$、*【3】*$1 \times n$、*【3】*$2 \times n$，從中發現到了一些規律，並得出兩結論。

四、*【3】*$m \times 1$、*【3】*$m \times 2$的勝負情形之探討

（一）*【3】*$m \times 1$的勝負情形之探討

因為高度只有一層，所以只要後手下在先手棋子的左右（如圖12的前四步），即可阻擋對手橫向連線，造成平手的局面（如圖12）。

9	2	1	3	4	7	6	5	8	10

圖12

（二）*【3】*$m \times 2$的勝負情形之探討

因為高度不足三層，所以只要後手下在先手棋子的左右，即可阻擋對手橫向連線，造成平手的局面（如圖13）。

20	12	19	13	14	6	5	10	11	16
18	9	17	2	1	3	4	8	7	15

圖13

（三）【推論3】

【X】$m \times n$*中*，若$n < X \wedge X \geq 3$，只要後手下在先手棋子的左右，即必平手。
（在要三子以上連線的模式中，只要列數小於連線子數，則必平手。）

五、*【3】*$1 \times n$、*【3】*$2 \times n$的勝負情形之探討

（一）*【3】*$1 \times n$的勝負情形之探討

因為不可能產生橫、斜向的連線，所以只要後手下在先手棋子的上方就會造成平手的局面，如圖14。

（二）*【3】*$2 \times n$的勝負情形之探討

因為不可能產生橫、斜向的連線，所以只要後手下在先手棋子的上方就會造成平手的局面，如圖15。

10
9
8
7
6
5
4
3
2
1

圖14

10	20
9	19
8	18
7	17
6	16
5	15
4	14
3	13
2	12
1	11

圖15

（三）【推論4】

【X】$m \times n$中，若$m < X$，只要後手下在先手棋子的上方，即必平手。

（只要欄數小於連線子數，則必平手。）

接下來我們希望從【3】3×3、【3】3×4、【3】3×5推論出【3】$3\times n$的勝負情形與必勝策略。而因為情形過於複雜，我們先只就雙方都會下之情形作討論。

六、【3】$3\times n$的勝負情形及策略之探討

（一）【3】3×3的勝負情形之探討

在【3】3×3中，因為棋盤互相對稱，故先手第一步可下位置可視為$CX(1, 1)$、$CX(2, 1)$兩種，其結果如圖16。

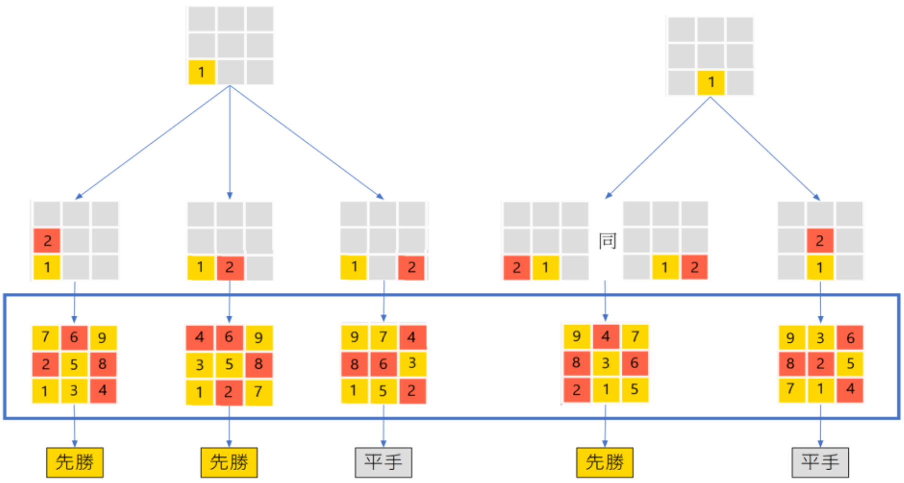


圖16

※為閱讀方便，圖16中藍框處在之後的圖中會省略

圖16藍框處，因為後手只能被動式的防守，所以我們可以得到下面先勝或平手的結論。但是因為雙方都會選擇下在對自己最有利的地方，所以後手不會讓先手勝的情形發生；先手不會讓後手勝的情形發生，故【3】3×3必平手。

由圖16可知，在雙方都會下的前提之下，只要先後手照圖17-1或圖17-2的步驟下，即可造成平手的局面，因此我們可以得到【不敗策略1】。

圖17-1

圖17-2

【不敗策略1】

在【3】3×3中，只要先後手照圖17-1或圖17-2的步驟下，即可造成平手的局面。

（二）【3】3×4的勝負情形之探討

在【3】3×4中，因為棋盤互相對稱，故先手第一步可下位置同樣可視為$CX(1,1)$（圖18）、$CX(2,1)$（圖19）兩種。

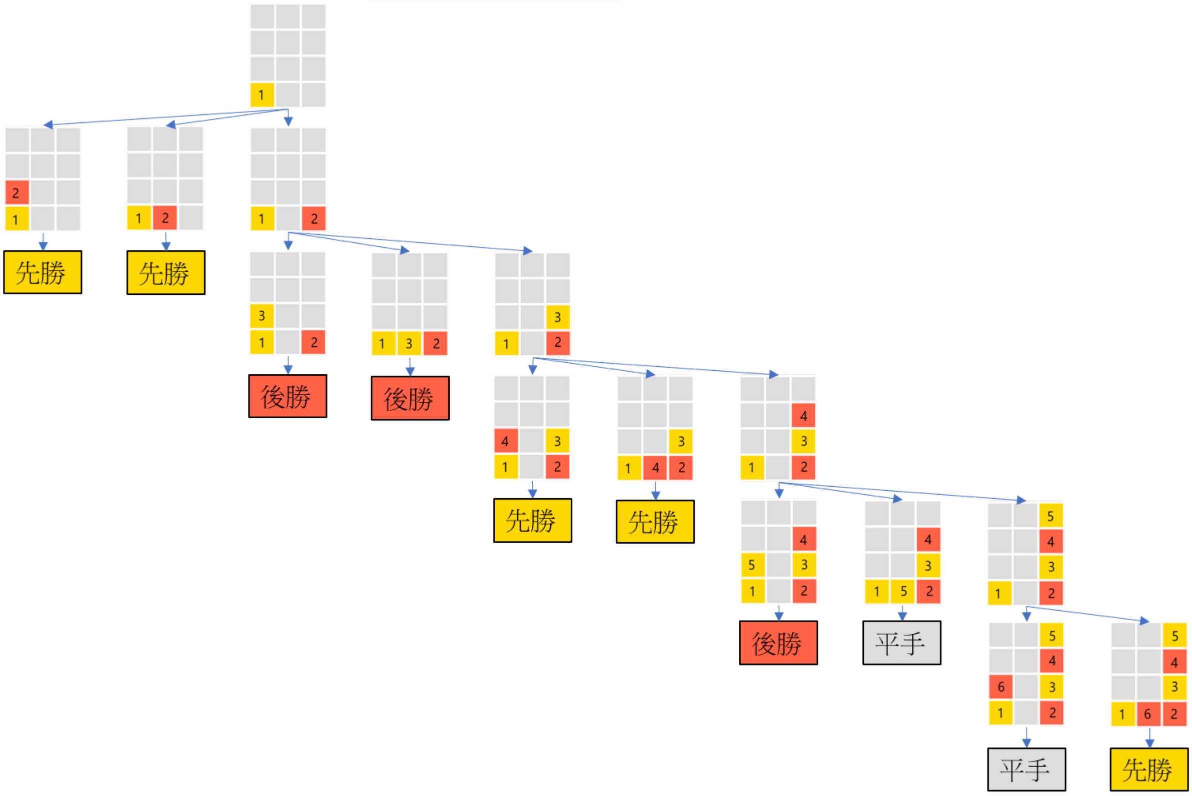


圖18

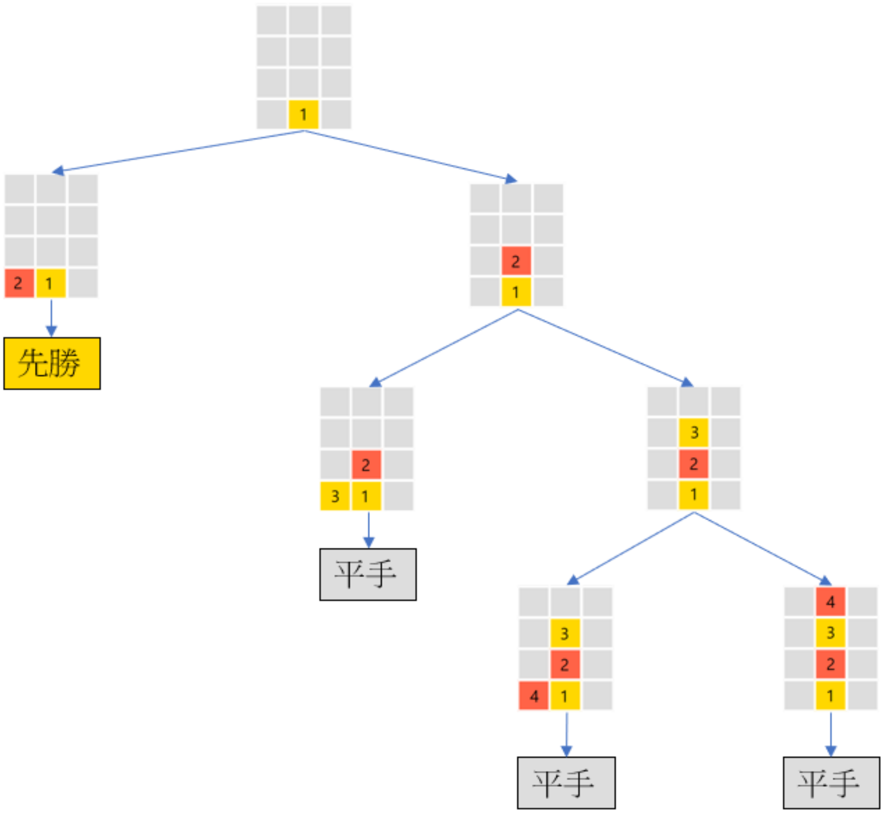


圖19

由圖18及圖19可知，因為雙方都會選擇下在對自己最有利的地方，所以後手不會讓先手勝的情形發生；先手不會讓後手勝的情形發生，故*【3】3× 4*必平手。分析圖18及圖19後可知，在雙方都會下的前提之下，只要先後手照圖20-1、圖20-2等圖的步驟下，即可造成平手的局面。而若先手照這兩張圖的其中任一張下，後手皆只能照圖的步驟下。因此我們可以得到【不敗策略2】。

12	4	9
11	3	8
10	2	7
5	1	6

圖20-1

8	12	5
7	11	4
6	10	3
1	9	2

圖20-2

【不敗策略2】

在*【3】3× 4*中，只要先後手照圖20-1、圖20-2等圖的步驟下，即可造成平手的局面。

（三）*【3】3× 5*的勝負情形之探討

在*【3】3× 5*中，因為棋盤互相對稱，故先手第一步可下位置同樣可視為$CX(1,1)$（圖21）、$CX(2,1)$（圖22）兩種。

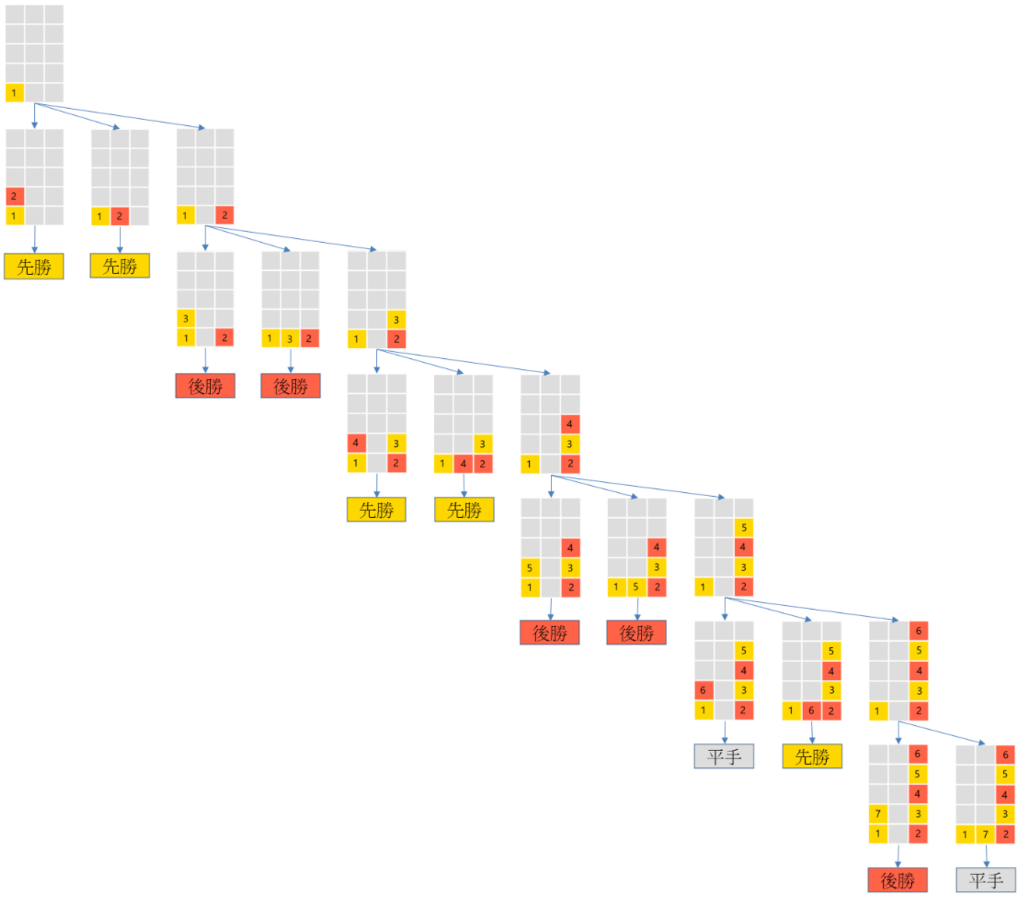


圖21

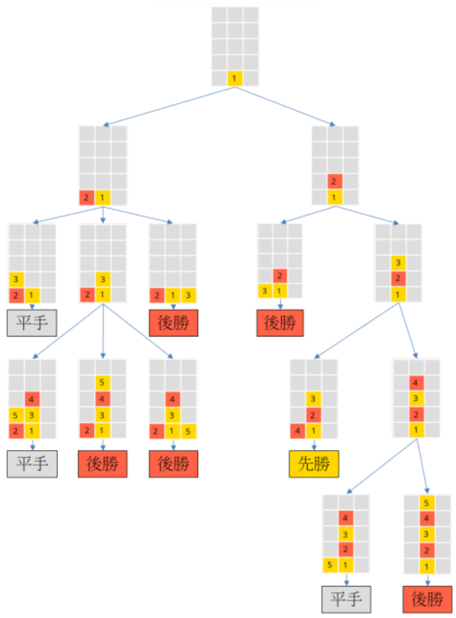


圖22

※圖22中左側因為後手第四步遇到GP一定要擋，故不考慮其他情形。

由圖21及圖22可知，因為雙方都會選擇下在對自己最有利的地方，所以後手不會讓先手勝的情形發生；先手不會讓後手勝的情形發生，故 *【3】3× 5*必平手。

分析圖21及圖22後可知，在雙方都會下的前提之下，只要先後手照圖23-1、圖23-2、圖23-3等圖的步驟下，即可造成平手的局面。而若後手照這三張圖的其中任一張下，先手皆只能照圖的步驟下，較簡單。因此我們可以得到【不敗策略3】。

15	13	6
14	12	5
11	9	4
10	8	3
1	7	2

圖23-1

13	14	15
12	4	9
11	3	8
10	2	7
5	1	6

圖23-2

13	15	14
12	4	9
11	3	8
10	2	7
5	1	6

圖23-3

【不敗策略3】

在 *【3】3× 5*中，只要先後手照圖23-1、圖23-2或圖23-3的步驟下，即可造成平手的局面。

研究 *【3】3× 6*時，我們發現情況會愈趨複雜，故我們需要定義新名詞來輔助說明。

（四）名詞釋義

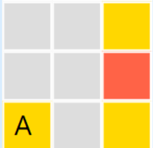
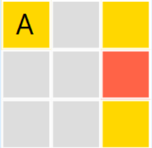
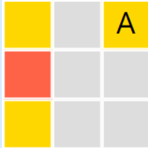
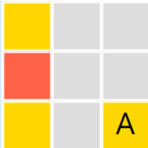
1. $VSP(Very\ Special\ Picture)$

   【3】3× n中產生表1中任意一張圖，即為產生VSP。而其特性為先下出者即必勝。

   （以先手為例）

   （圖形一中先手A格需位於奇數列，後手A格需位於偶數列）

   （可以出現在棋盤上下任何位置）

表1　【3】$3\times n$之VSP圖形整理				
圖形一				
圖形二				

2. *$L(p)$*

   樹狀圖中同一橫排的圖片的總稱，由上而下分別為$L(1)$、$L(2)$、$L(3)$……以此類推，如圖24。

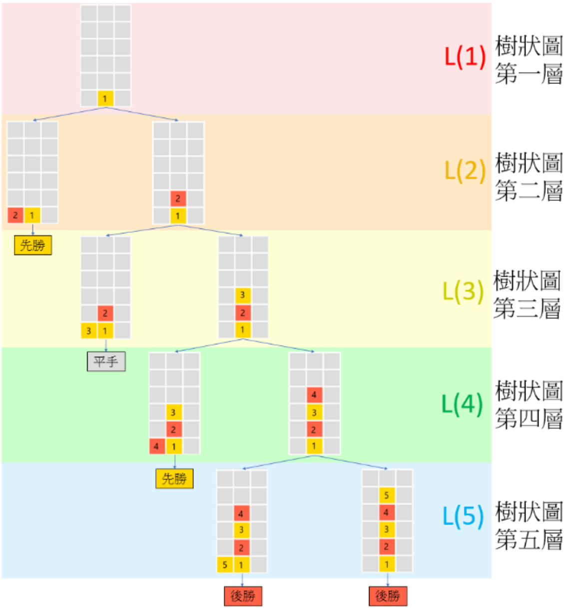


圖24

3. *$STACK$策略*

   下棋子的優先順序（若有多個或無任何一欄滿足該情形時，則用下一點判斷，最後若有多個或無任何一欄滿足，則下在任意欄）：

   （1）下在任一方GP處或可製造出VSP、多個GP之處（除非己方已造出）

   （2）照參考不敗圖形的步驟下

   （3）與對方上一步下同一欄

   （4）先手下在$CX(2,1)$、後手下在第一步之上方一格處

   （5）下在rn（例如圖25的第15步）

圖25

例：圖26-1及圖26-2為【3】3×3的參考不敗圖形之二，先後手即可用$STACK$策略下出平手的局面，如圖27-1及圖27-2。

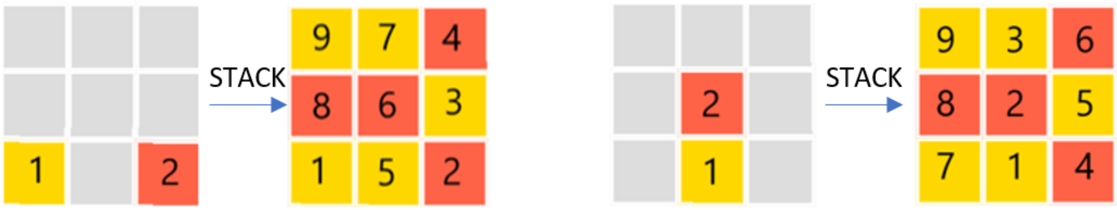
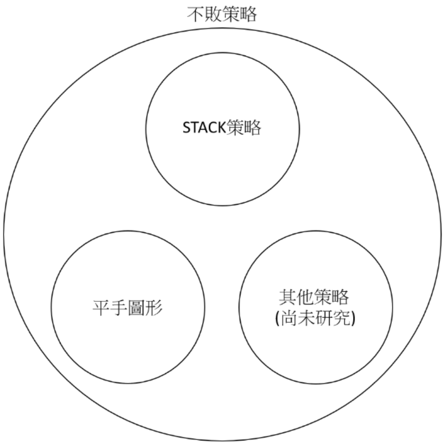


圖26-1　圖27-1　圖26-2　圖27-2

$STACK$策略與必勝策略的關係如下圖：



（五）【3】3×6的勝負情形之探討

在【3】3×6中，因為棋盤互相對稱，故先手第一步可下位置同樣可視為$CX(1,1)$（圖28）、$CX(2,1)$（圖29）兩種。

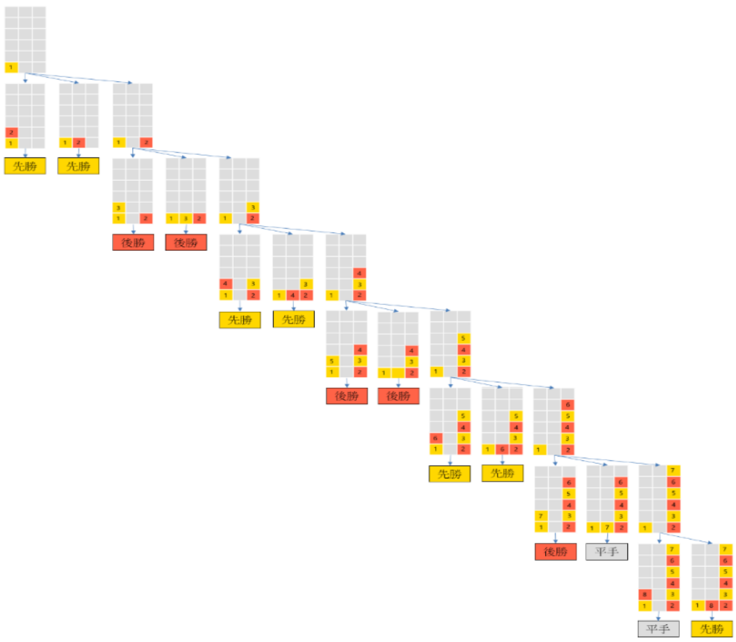


圖28

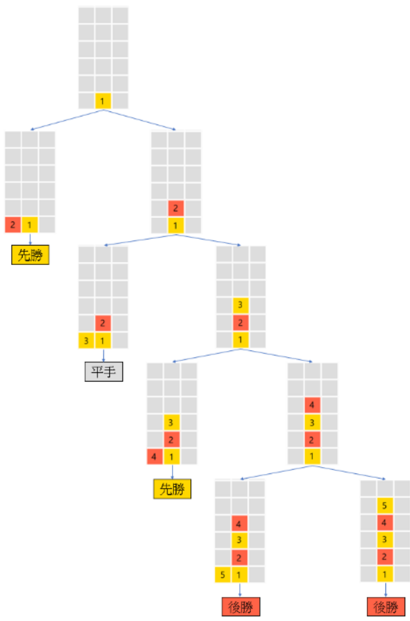


圖29

由圖28及圖29可知，因為雙方都會選擇下在對自己最有利的地方，所以後手不會讓先勝的情形發生，先手不會讓後勝的情形發生，故【3】3×6必平手。

分析圖28及圖29後可知，在雙方都會下的前提之下，圖30-1、圖30-2為【3】3

$\times$ *6*的參考不敗圖形之二，且只要先手用*STACK*策略下，即可造成平手的局面如圖31-1、圖31-2，因此我們可得到【不敗策略4】。

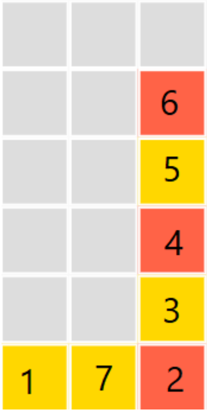


圖30-1

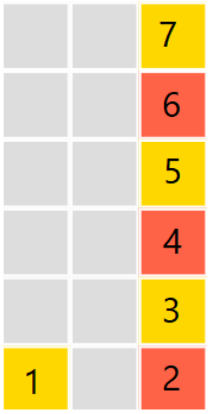


圖30-2

圖31-1

圖31-2

【不敗策略4】

在【*3*】*3*$\times$ *6*中，只要先手用*STACK*策略下，即可造成平手的局面。

（六）【*3*】*3*$\times n$的勝負情形之探討

分析【*3*】*3*$\times$ *3*到【*3*】*3*$\times$ *6*，因為結果圖大部分因為*STACK*策略，而有堆疊的情形，但因為堆疊多為偶數格，故在列數增加後大多不會影響勝負情形。於是我們可得【*3*】*3*$\times n$，$n \geq 3$之結果如圖32、圖33。又因為棋盤互相對稱，故先手第一步可下位置同樣可視為$CX(1, 1)$（圖32）、$CX(2, 1)$（圖33）兩種。

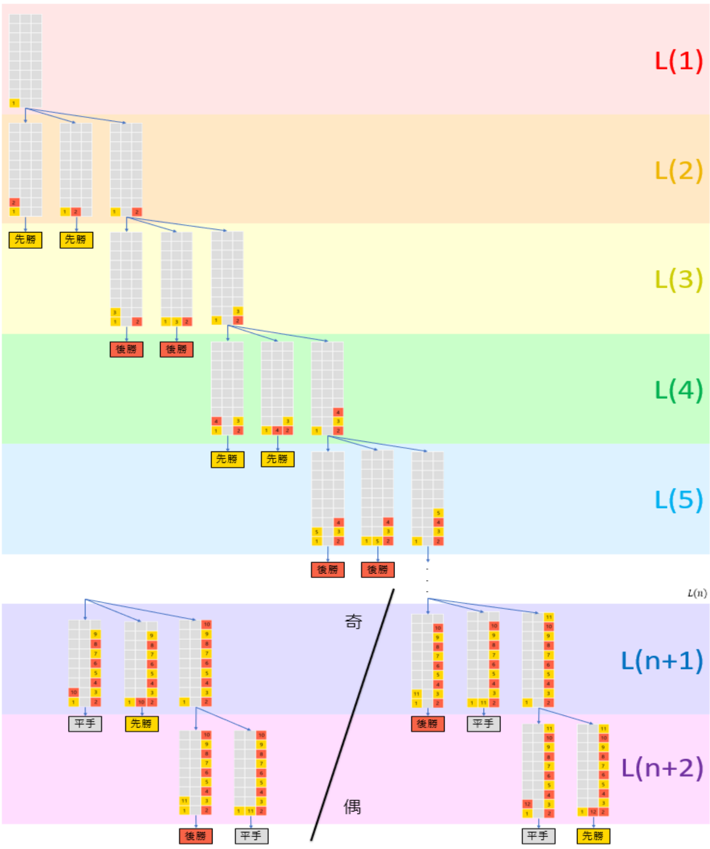


圖32

圖32及圖33中，可能有多種勝負情形，此乃因為n的差異而造成，若想知道造成此情形的n之條件，請見附近標示。

圖32中的規律為：【3】$3\times n$中，$L(2N)$上下在$CX(1,2)$、$CX(2,1)$兩欄之結果為先手勝；$L(2N+1)$上下在$CX(1,2)$、$CX(2,1)$之結果為後手勝（$N\in$正整數$\wedge N<\frac{n-1}{2}$）。$L(n+1)$、$L(n+2)$中，若n為奇數，則勝負情形由左至右依序為平手、先手勝；後手勝、平手；若n為偶數，則勝負情形由左至右依序為後手勝、平手；平手、先手勝。此為因為有先後手下至$c1$、$c2$之分的緣故。

由圖32、圖33可知，因為雙方都會選擇下在對自己最有利的地方，故後手不會讓先勝的情形發生；先手不會讓後勝的情形發生，故【3】$3\times n$可分成兩類。

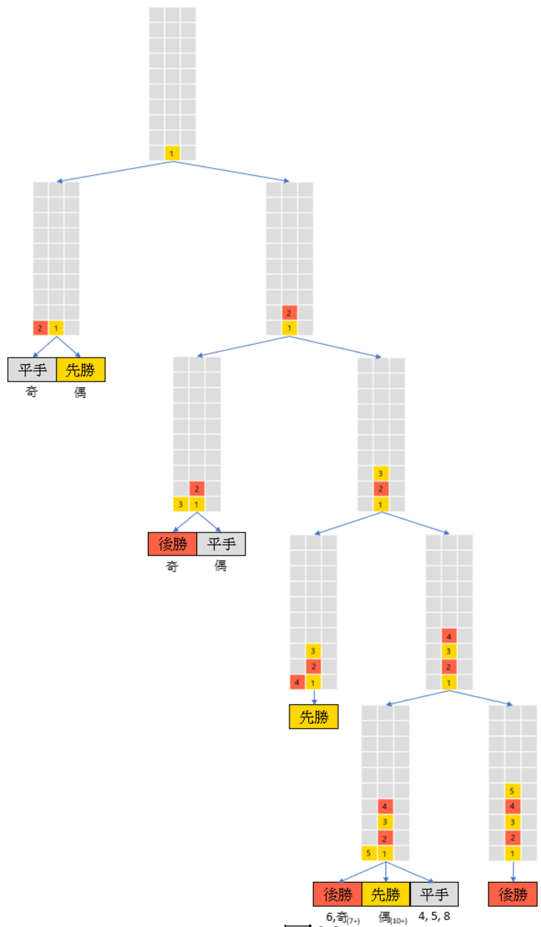


圖33

1. 若$n=2N+8$（$N\in$正整數），則先手必勝。
2. 其餘情形中，必平手。

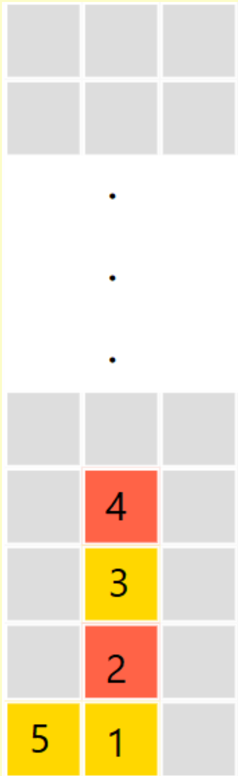
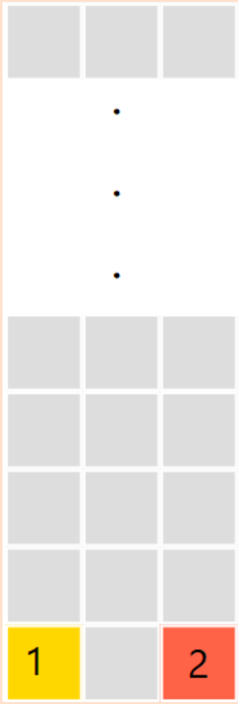
分析圖32及圖33後可知，$3\times n$棋盤的不敗策略如下：

1. 若$n=2N+8$（$N\in$正整數），參考不敗圖形為圖34-1，且只要先手用$STACK$策略下，即必勝。
2. 其餘情形中，圖34-2為參考不敗圖形之一，且只要先後手用$STACK$策略下，即可造成平手的局面。故我們可整理出表2，並得到【不敗策略5】。

而有先後手之分的原因為在先後手輪流下c3時，因為列數有奇偶之分，故策略也會有先後手之分。

值得一提的是，圖34-1中，如果先手第五步下$CX(1,1)$，在足夠大且n為偶數的棋盤中，會產生多個GP，進而導致先手獲勝。

上述討論皆是在先後手都會下的前提之下，但倘若對手失誤或不照預期情況下，研究之後我們發現先手使用$STACK$策略即可不敗，後手若不在$n=2N+8$（$N\in$正整數）的棋盤中，則也會不敗。

表2　【3】$3\times n$之參考不敗圖形整理		
n	10以上的偶數	其他
勝負	先勝	平手
參考不敗圖形	 圖34-1	 圖34-2

【不敗策略5】

在【3】$3\times n$中，只要先後手用$STACK$策略下，即可造成平手或先勝的局面。

（七）【推論5】

【3】$3\times n$中，若$n=2N+8$（$N\in$正整數），先手必勝。其餘情形中必平手。（在三子連線，棋盤三欄的模式中，若列數為十以上之偶數，先手必勝。其餘情形中必平手。）

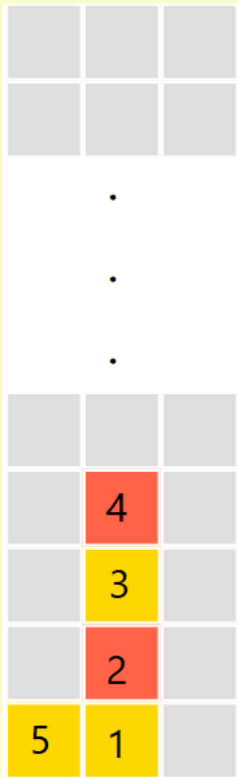
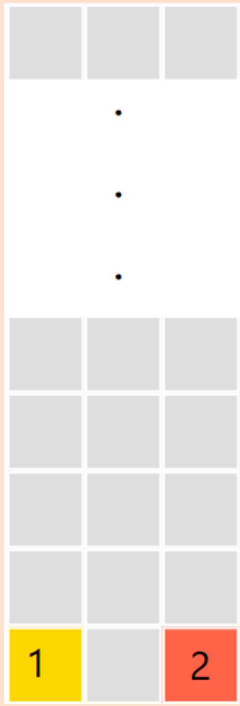
肆、研究結果

一、【1】$m\times n$中，先手必勝。

二、【2】$m\times n$中若$m+n\geq 4$，先手必勝，否則必平手。

三、【X】$m\times n$中，若$n<X\wedge X\geq 3$或$m<X$，則必平手。

四、【3】$3\times n$中，勝負情形及策略如下表3。

表3　【3】$3\times n$之不敗策略		
策略	*STACK*策略： 1. 下在任一方*GP*處或可製造出*VSP*（右圖）、多個*GP*之處（除非己方已出） 2. 照參考不敗圖形的步驟下 3. 與對方上一步下同一欄 4. 先手下在$CX(2,1)$、後手下在$CX(1,2)$ 5. 下在rn 	
n	10以上的偶數	其他
勝負	先勝	平手
參考不敗圖形		

伍、研究問題與討論

在研究完【3】$3\times n$的情形之後，我們想知道如果欄數增加，勝負情形與策略如何。

一、【3】$4\times n$的勝負情形及必勝策略之探討

（一）名詞釋義

1. 偽*GP*

雙方皆無法下至*GP*處的*GP*。例如圖35中，綠線即為一種偽*GP*，而藍線為*GP*。

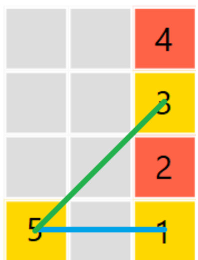


圖35

2. 雙GP

製造GP、偽GP各一個，迫使對手下在GP處，而此舉會使偽GP變成GP，如圖36-1～圖36-3。而因為此舉使偽GP變成GP，故下出雙GP則必勝。

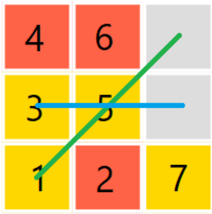


圖36-1

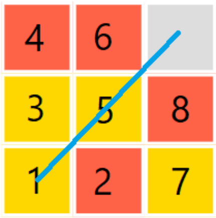


圖36-2

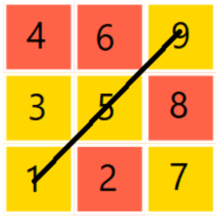


圖36-3

※圖36-1～圖36-3中綠線為偽GP，藍線為GP，黑線為連線並獲勝。

3. *Force Defense*策略

下棋子的優先順序：

（1）下在自己或對方GP處

（2）按照參考致勝圖形的步驟下

（3）製造雙GP或多個GP、單個GP、偽GP且避免讓對手GP
（優先順序由左至右）

例：【*3*】4×4中，圖38即為先手和後手用*Force Defense*策略下出之結果圖形的其中一種（若致勝圖形為圖37）。

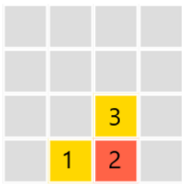


圖37

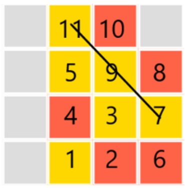
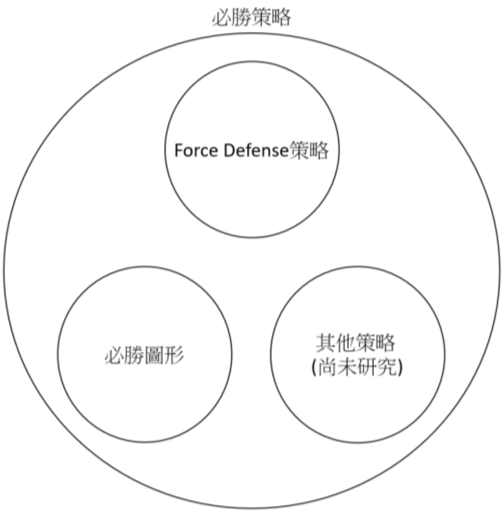


圖38

*Force Defense*策略與必勝策略關係如下圖：



（二）【*3*】4×3的勝負情形之探討

在【*3*】4×3中，因為棋盤互相對稱，故先手第一步下的位置可視為$CX(1,1)$、$CX(2,1)$兩種，再分析此兩種下法的延伸結果，其結果如下圖39。

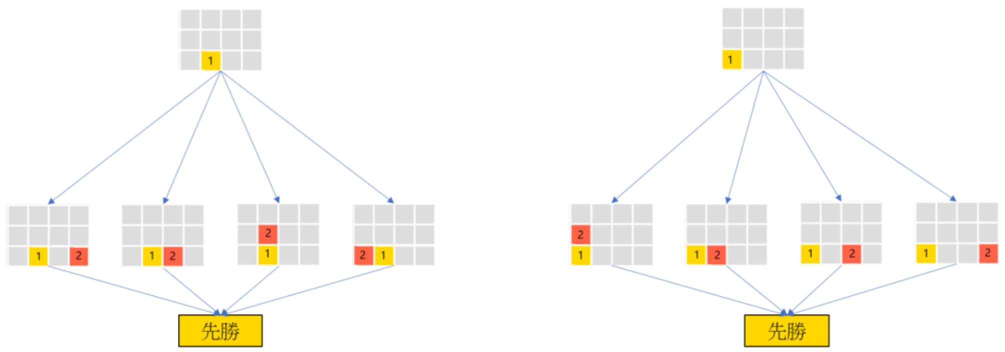
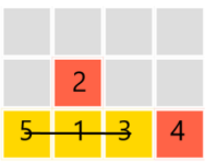


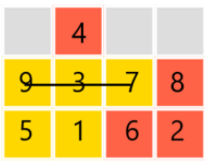
圖39

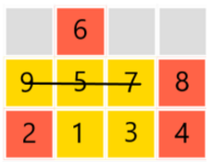
由圖39可知，先手分別下在$CX(2,1)$、$CX(1,1)$時，後手不管下哪都會輸，因此【*3*】4×3先手必勝。

分析圖39後可知，圖40為【*3*】4×3的參考致勝圖形之一，且只要先手用*Force Defense*策略下，即可造成圖41-1～圖41-4這些先勝的局面，因此我們可以得到【必勝策略1】。

圖40







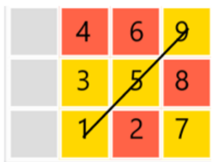


圖41-1 圖41-2 圖41-3 圖41-4

【必勝策略1】

在【*3*】4×3中，圖40為參考致勝圖形之一，且只要先手用*Force Defense*策略下，即可造成先勝的局面。

（三）【*3*】4×4的勝負情形之探討

在【*3*】4×4中，因為棋盤互相對稱，故先手第一步下的位置可視為$CX(1,1)$、$CX(2,1)$兩種，我們先研究先手下在$CX(2,1)$之棋局。其發展如圖42。

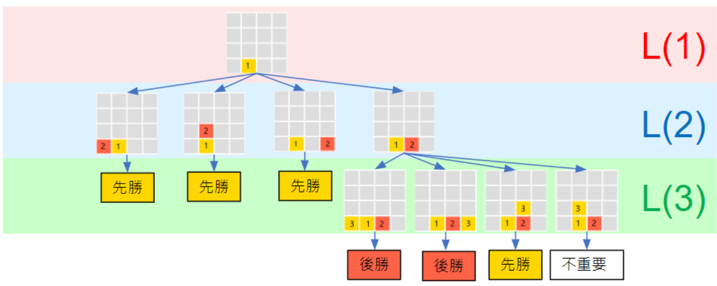


圖42

由圖42可知，因為先手肯定會在$L(3)$時下$CX(3,2)$，因此其餘情況可不必考慮，故【3】4×4先手必勝。

分析圖42後可知，圖43為【3】4×4的參考致勝圖形之一，且只要先手用$Force\ Defense$策略下，即可造成圖44-1～圖44-4這些先勝的局面，因此我們可以得到【必勝策略2】。

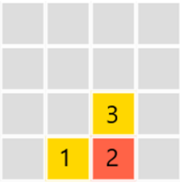


圖43

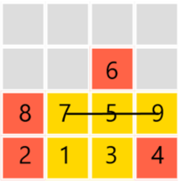


圖44-1

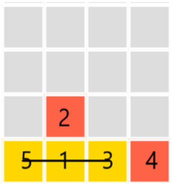


圖44-2

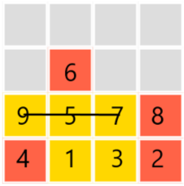


圖44-3

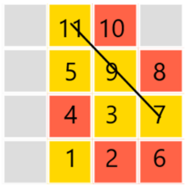


圖44-4

【必勝策略2】

在【3】4×4中，圖43為參考致勝圖形之一，且只要先手用$Force\ Defense$策略下，即可造成先勝的局面。

（四）【3】4×5的勝負情形之探討

在【3】4×5中，因為棋盤對稱，所以先手第一步下的位置可以視為$CX(1,1)$、$CX(2,1)$兩種，我們先研究先手下在$CX(2,1)$之棋局其結果如下圖45。

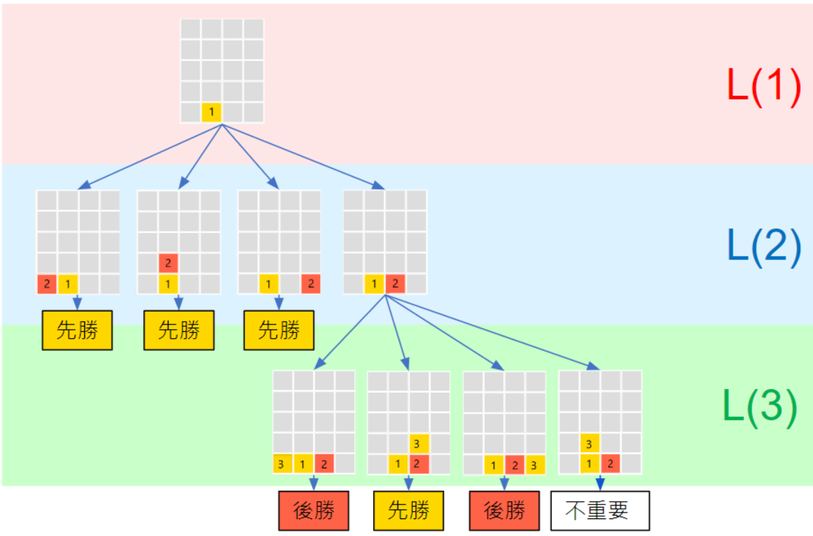


圖45

由圖45可知，因為先手肯定會在$L(3)$時下$CX(3,2)$，因此其餘情況可不必考慮，故【3】4×5先手必勝。

分析圖45後可知，圖46為【3】4×5的參考致勝圖形之一，且只要先手用$Force\ Defense$策略下，即可造成圖47-1～圖47-4這些獲勝的局面，因此我們可以得到【必勝策略3】。

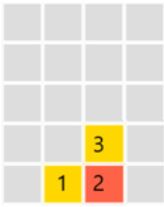
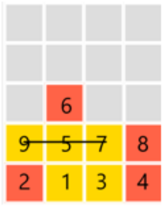
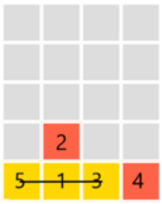


圖46





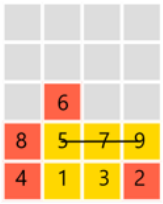


圖47-1　　圖47-2　　圖47-3　　圖47-4

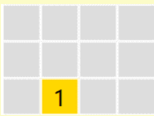
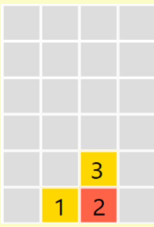
【必勝策略3】

在【3】4×5中，圖46為參考致勝圖形之一，且只要先手用*Force Defense*策略下，即可造成先勝的局面。

（五）【3】$4\times n$的勝負情形之探討

由於【3】4×5先手必勝，且無論再往上多加多少列，先手都可以造出雙*GP*，因此我們可以得知【3】$4\times n$先手必勝。因此我們可以整理出表4，並得到【必勝策略4】。

表4　【3】$4\times n$之參考致勝圖形整理

n	3	4以上
參考致勝圖形	 圖48-1	 圖48-2

【必勝策略4】

在【3】$4\times n$中，若$n\leq 3$，圖48-1為參考致勝圖形之一；若$n\geq 4$，圖48-2為必勝圖形之一，且只要先手用*Force Defense*策略下，即可造成先勝的局面。

（六）【推論6】

【3】$4\times n$中，先手必勝。

（在三子連線，棋盤四欄的模式中，先手必勝。）

二、【3】5× 3的必勝策略之探討

在【3】5× 3中，先手只要一開局下中間，後手一定要下在先手的左右，不然先手可以下在自己第一步的左右，形成左右皆GP的情形（如圖49-1）。就算後手第二步擋了先手，先手也可以一直造成GP的情形，使得後手只能阻擋先手的GP，但最後還是會被先手同時製造出至少三個GP（如圖49-2），之後後手不管擋哪裡，先手都可以藉由下在自己GP處而勝利。故【3】5× 3先手必勝。

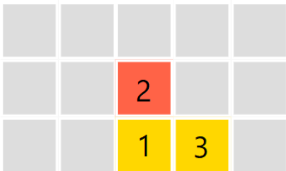


圖49-1

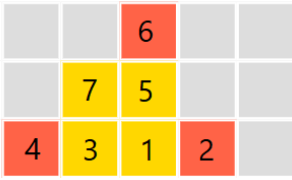


圖49-2

【必勝策略5】

在【3】5× 3中，只要先手照圖49-2的步驟下，即可獲勝。

我們發現【3】5× 3可能可以推廣一般化，於是我們直接開始研究【3】$m \times n$。

三、【3】$m \times n$的必勝策略之探討

在【3】$m \times n$中，因為只要$m \geq 5 \wedge n \geq 3$，先手即可迫使後手下出圖50，且下出圖50之後先手必勝（見上文），故【3】$m \times n$ $(m > 4 \wedge n > 2)$先手必勝。

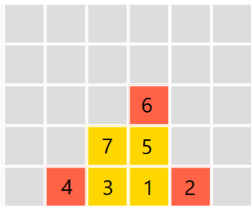


圖50

【必勝策略6】

在【3】$m \times n$中，若$m \geq 5 \wedge n \geq 3$，只要先手照圖50的步驟下，即可獲勝。

（一）【推論7】

【3】$m \times n$中，若$n \geq 3 \wedge m \geq 5$，先手必勝。

（在三子連線，棋盤五欄以上且三列以上的模式中，先手必勝。）

在研究完【3】$m \times n$的情形之後，我們開始研究4子連線時之勝負情形與不敗策略。

四、【4】$m \times 4$的不敗及必勝策略之探討

在4子棋盤中，我們發現當n固定不變且改變m去做討論時，不同棋盤間的關聯性較高，且在斜向連線的勝負有一種特定的情形。所以我們先固定$n = 4$、m則從4開始遞增進行探討。研究【4】$m \times 4$的過程中，我們發現斜向連線的勝負有一種特定的情形，將其命名為「奇偶現象」，並透過「奇偶現象」提出「破壞奇偶策略」使【4】4 × 4及【4】5× 4的不敗的策略。 以下我們先解釋「奇偶現象」及「破壞奇偶策略」。

（一）名詞釋義及策略觀察

1. 奇偶現象

在【4】$m\times 4$中，因為棋盤大小以及對手阻擋難以製造出可獲勝的GP、雙GP，所以只能製造出偽GP。當其中一方造出偽GP時，由於有偽GP的那欄會影響勝負，所以先後手會優先填滿其他格子，最後才會下在有偽GP的那欄。設棋盤中偽GP處的座標為$CX(x,y)$，觀察 y是奇數或偶數 ，經過研究後發現 y的奇偶和先後手的勝負有一定的關係。

在圖51-1、圖51-2中，先手的偽GP處在$CX(3,3)$，其位於$r3$，為奇數列。由於先手下在$c3$會喪失勝利，後手則會讓對方贏。所以雙方都不想下在$c3$。會先選擇填滿其他欄，最後後手還是會先下到$c3$，導致先手勝利。但如果先手的偽GP處的 y座標為偶數（如圖52-1、圖52-2），則最後會是先手先下入該欄而錯失勝利。

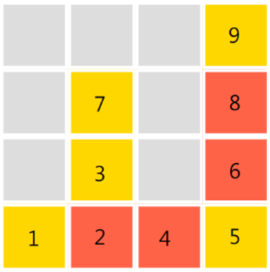


圖51-1

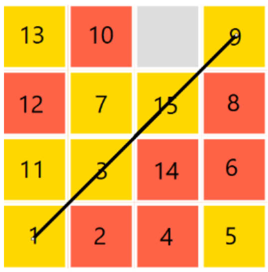


圖51-2

圖52-1

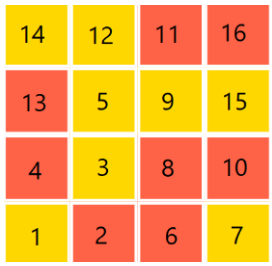


圖52-2

經過研究之後我們【4】$m\times 4$中的奇偶現象結果如下表:

	偽GP的 y座標為奇數	偽GP的 y座標為偶數
先手	勝利	無法勝利
後手	無法勝利	勝利

奇偶現象可以讓我們在棋局中了解自己需要優先搶到哪個位置，以【4】4×4後手為例，能斜向連線的獲勝方式有兩種，因為對稱所以視為同種狀況（圖53）。根據奇偶觀察我們可以知道，後手的偽GP處要在$CX(3,2)$、$CX(1,4)$才能獲勝，所以要先搶下$CX(4,1)$、$CX(2,3)$來確保會在自己期望的位置，進而獲得勝利。

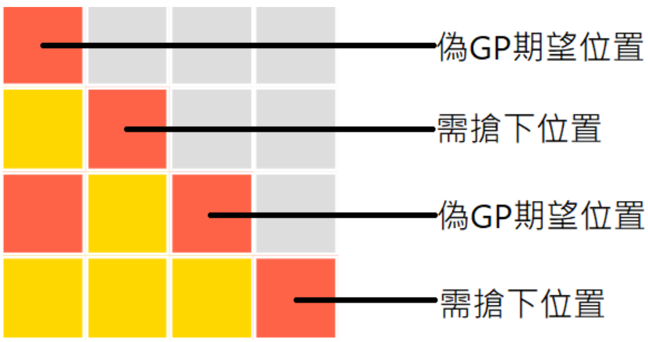


圖53

接下來我們發現只要利用奇偶現象把對手的偽GP處控制在無法勝利的位置，就可以達成平手或己方勝利，我們把該策略命名為破壞奇偶策略。

2. 破壞奇偶策略

下棋子的優先順序：

（1）下在自己或對手GP處

（2）下在對手連斜線所需格

（3）由下往上下在無己方棋子之列處（先手以$r2$、$r4$，後手以$r3$為優先）（在【4】5×4中，若下在c1、c5，則須再下一次。）

（4）下在對手連斜線所需格之下方一格處（後手免下r3，先手免下r2）

根據奇偶規則我們可以得知：在【4】$m\times 4$中，先手偽GP的 y座標為奇數會獲勝，後手則是偶數，我們可以反過來利用這個結論來破壞對手的連線。以下以【4】4×4先手斜向連線為例：假設局勢如圖54-1，這時先手第一步和第三步形成一個兩子連線，這時只要下到$CX(3,3)$或$CX(4,4)$都可以形成偽GP或GP，依照上述的奇偶策略，只要後手下在$CX(3,2)$，就可以讓先手下在$CX(3,3)$，進而導致先手GP在$CX(4,4)$，也就是 y座標是偶數，最後導致平手的局面（如圖54-2）。

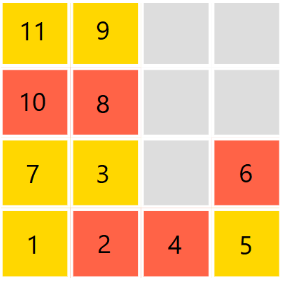


圖54-1

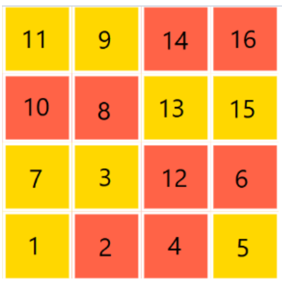


圖54-2

提出奇偶現象和破壞奇偶策略後，我們從【4】$m\times 4$最小的棋盤【4】4×4著手，驗證上述策略是否可行。希望推廣至【4】$m\times 4$並用奇偶現象找出必勝策略。

（二）【4】4×4的不敗策略之探討

雖然在網路上已經有【4】4×4勝負情形了，但是我們想透過了解【4】4×4平手的原因，來找出不敗策略(以下先後手下法皆為最好下法)。

促使某方必勝的原因有單條連線、雙GP、多個GP三種，於是我們將其分類，並嘗試找出阻擋他們的方法：

1. 阻止對方單條連線之策略探討

我們將單條連線依其連線情況的方向性分為橫向、斜向、直向連線三種，並運用策略阻擋。

（1）橫向連線

由於先後手下法皆為最好下法，故若要連成一條橫線，自己就不能下在欲連成橫向連線的下方列，否則對手將可阻擋，因此下方列都會是對手的子，但這樣對手就會先製造出GP迫使自己阻擋，對手便可趁機阻擋自己欲連成的橫向連線，因此橫向不可能連線（如圖55）。

圖55

（2）斜向連線

根據破壞奇偶策略，先後手在【4】4×4因會遭阻擋，故皆不可能斜向連線（如圖56）。

圖56

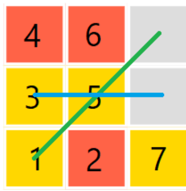
（3）直向連線

因為只要在GP時下在上方即可阻擋，故直向不可能連線。

由上述可知，直、橫、斜向的單條連線皆會被阻擋，故先後手雙方皆不可能因單條連線獲勝。

2. 阻止對方雙GP之策略探討

雙GP是由一個GP和一個偽GP所組成（如右圖），我們依GP、偽GP的方向性將其分類為六種：



橫向+橫向雙GP、橫向+斜向雙GP、橫向+直向雙GP、斜向+斜向雙GP、斜向+直向雙GP、直向+直向雙GP。

（1）橫向+橫向雙GP

若橫向+橫向雙GP在$r1$、$r2$：第一、二步即可阻擋對手（如圖57）；

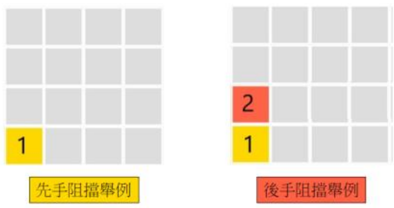


圖57

若橫向+橫向雙GP在$r2$、$r3$：第三、四步即可阻擋對手（如圖58）；

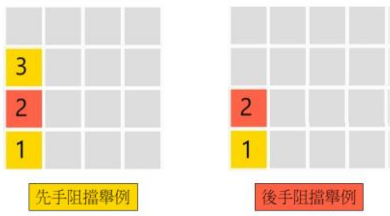


圖58

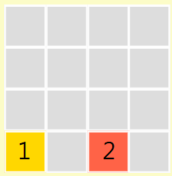
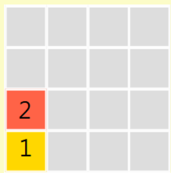
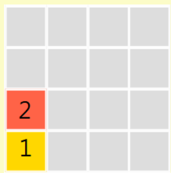
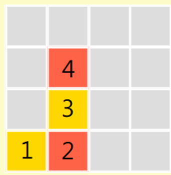
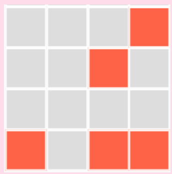
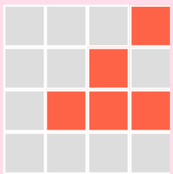
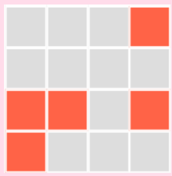
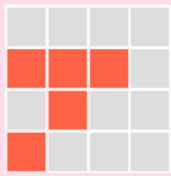
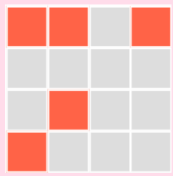
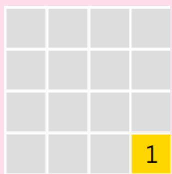
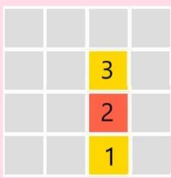
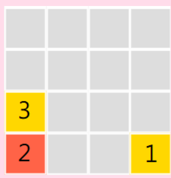
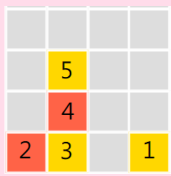
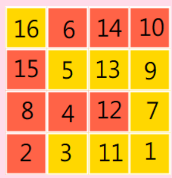
若橫向+橫向雙GP在$r3$、$r4$：第四、五步即可阻擋對手（如圖59）。

圖59

（2）橫向+斜向雙*GP*

在【*4*】*4*× *4*中，只會有以下六種情況發生（如表5），但是因為後手皆可阻擋，所以六種情況都不可能發生。同理後手也不可能製造出橫向－斜向雙*GP*，故橫向－斜向雙*GP*不可能產生。

表5　【*4*】*4*× *4*橫向－斜向雙*GP*之情況

情況	第一情況	第二情況	第三情況	第四情況	第五情況	第六情況
先手情況圖						
阻擋舉例						
後手情況圖						
阻擋舉例						

（3）橫向+直向雙*GP*

所有棋盤皆不可能產生。

（4）斜向+斜向雙*GP*

【*4*】*4*× *4*中，因n過小，故無法產生。

（5）斜向+直向雙*GP*

所有棋盤皆不可能產生。

（6）直向+直向雙*GP*

所有棋盤皆不可能產生。

3. 多個*GP*

在【4】4×4中，多個*GP*是由至少兩個*GP*所組成，我們依*GP*的方向性及數量將其分類為七種：

橫向*GP*+橫向*GP*、橫向*GP*+斜向*GP*、橫向*GP*+直向*GP*、

斜向*GP*+斜向*GP*、斜向*GP*+直向*GP*、直向*GP*+直向*GP*、

三個*GP*以上。

（1）橫向GP+橫向GP

【4】4×4中，因m過小，故無法產生。

（2）橫向GP+斜向GP

所有棋盤皆不可能產生。

（3）橫向GP+直向GP

【4】4×4中，因為直向連線的$r3$格對方必可以阻擋，故無法產生。

（4）斜向GP+斜向GP

【4】4×4中，因n過小，故無法產生。

（5）斜向GP+直向GP

【4】4×4中，因為直向連線的$r3$格對方必可以阻擋，故無法產生。

（6）直向GP+直向GP

所有棋盤皆不可能發生。

（7）三個GP以上

因為兩個GP不可能發生，故3個以上也不可能發生。

故【4】4×4必平手。

由上述可得，只要先後手使對方之斜向單條連線、直向單條連線、橫向－斜向雙GP皆不可能產生，則必不敗，於是我們發現使用破壞奇偶策略可以有效的達到這個目的，進而造成平手的局面，於是我們可得【不敗策略6】。

【不敗策略6】

在【4】4×4中，只要用破壞奇偶策略下，即可造成平手的局面。

（二）【4】5×4的勝負情形之探討

首先在【4】5×4中，前兩步都不能下$CX(3,1)$，不然對手一定可以造兩子斜向連線並勝利，如圖60。所以雙方一開始都不會下在中間。

接著同上述討論法，我們發現無論下在其他任何一欄，只要使用破壞奇偶策略即不敗，於是我們可得【不敗策略7】。

【不敗策略7】

在【4】5×4中，只要用破壞奇偶策略下，即可造成平手的局面。

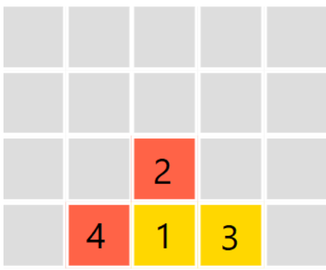


圖60

（四）【4】6×4的勝負情形之探討

根據文獻回顧（三），【4】6×4為後手必勝，而我們在6×4棋盤中發現了一個後手必勝圖形（圖61-1），該圖形是由雙GP所簡化的圖形，不管先手下在第4列（如圖61-2）或下在其他地方（如圖61-3中的A格），後手都可以下在B格形成一個y座標為偶數的偽GP，進而導致後手勝利。


圖61-1

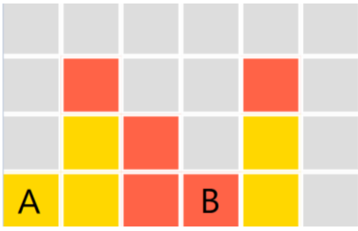


圖61-2

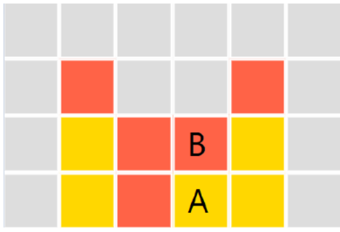


圖61-3

陸、結論

一、在一子連線獲勝的情形中，因為只要下一顆子即可獲勝，所以先手必勝。

二、在二子連線獲勝的情形中，若欄列和為四以上，因為先手只要下一顆子即可造成至少兩個GP，後手不可能贏，所以先手必勝；若欄列和為三以下則必平手。

三、若欄數小於連線子數，因為橫向和斜向都無法連線，且直向連線對手下在上方即可阻擋，所以必平手。

四、 若列數小於連線子數且連線子數為三以上，因為斜向和縱向都無法連線，且橫向連線對手下在左右兩側即可阻擋，所以必平手。

五、三子連線時的勝負情形及不敗和必勝策略整理如表6。

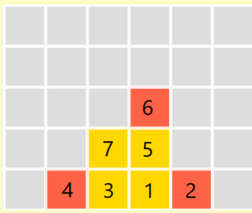
<table>
<tr><th colspan="5">表6　【3】$m\times n$之勝負情形與策略</th></tr>
<tr><td>m</td><td colspan="2">3</td><td>4</td><td>5以上</td></tr>
<tr><td rowspan="2">勝負</td><td>n為10以上的偶數</td><td>n非10以上的偶數</td><td colspan="2" rowspan="2">先勝
($Force\ Defense$策略)</td></tr>
<tr><td>先勝
($STACK$策略)</td><td>平手
($STACK$策略)</td></tr>
<tr><td>運用
策略</td><td colspan="2">表6-1
【3】$3\times n$之不敗策略</td><td>表6-2
【3】$4\times n$之必勝策略</td><td>
</td></tr>
</table>

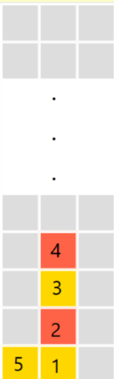
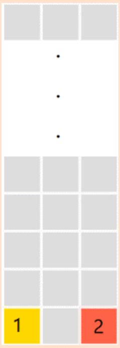
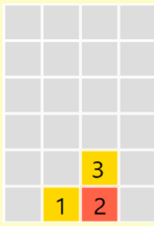
表6-1 【3】$3\times n$之不敗策略		
策略	$STACK$策略： 1. 下在任一方GP處或可製造出VSP、多個GP之處（除非己方已造出） 2. 照參考不敗圖形的步驟下 3. 與對方上一步下同一欄 4. 先手下在$CX(2,1)$、後手下在$CX(1,2)$ 5. 下在rn	
VSP		
n	10以上的偶數	其他
勝負	先勝	平手
參考不敗圖形	 	

表6-2 【3】$4\times n$之必勝策略		
策略	$Force\ Defense$策略： 1. 下在自己或對方GP處 2. 照參考致勝圖形的步驟下 3. 製造雙GP或多個GP、一個GP、偽GP且避免讓對手GP	
n	3	4以上
勝負	先勝	
參考致勝圖形	 	

六、四子連線時的勝負情形及不敗和必勝策略整理如表7。

表7 【4】4×4及【4】5×4之不敗策略	
勝負	平手
策略	破壞奇偶策略： 1. 下在任一方GP處或可製造出VSP、多個GP之處（除非己方已造出） 2. 照參考不敗圖形的步驟下 3. 與對方上一步下同一欄 4. 先手下在$CX(2,1)$、後手下在$CX(1,2)$ 5. 下在rn

柒、參考文獻資料

一、屏風式四子棋 維基百科（中文及英文）
https://zh.wikipedia.org/zh-tw/屏風式四子棋
https://en.wikipedia.org/wiki/Connect_Four
二、Connect 4 Solver及其原理
https://connect4.gamesolver.org/en/
http://blog.gamesolver.org/
三、John's Connect Four Playground
https://tromp.github.io/c4/c4.html

捌、未來展望

一、【4】$m \times n$中是否都存在先後手的簡單必勝策略。
二、任意棋盤中是否都存在先後手的簡單必勝策略。
三、各棋盤中的勝負情形是否存在規律。
四、其餘形狀的棋盤是否也存在先後手的簡單必勝策略。