新竹市第 41 屆中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：正 k 邊形內接與外延 n 階多角星之研究

關 鍵 詞：多角星、正 k 邊形

編　　號：

摘要

本研究主要探討正 k 邊形內接與外延 n 階多角星之相關性質。我們證明了正 k 邊形內接 n 階多角星與外延 n 階多角星其每個內角度數相同；而正 k 邊形內接 n 階多角星也恰巧會與外延 n 階多角星相似；我們也進一步探討正 k 邊形內接多角星與外延多角星各階圖形的周長、面積等相關幾何性質。

壹、研究動機

某天看見一份科展報告「發現『星』奧妙—正 k 邊形邊長延伸形成多角星之性質」其中探討正 k 邊形 n 階多角星，這些漂亮的圖形引起我們的興趣，也剛好和我們國二所學的三角形性質相關，於是我們在網路上搜尋這主題的相關研究，發現全國科展在第 29 屆，45 屆和 56 屆皆有以此為主題的研究，但它們這些研究皆是探討正 k 邊形向外連線所形成的 k 階多角星，對議題提出了簡單的觀察結果，並無進一步的探索，於研究報告最後，評審給予了一些專業的建議與可行的研究方向。在經過討論後，我們決定遵循評審給定的建議，著手研究正 n 邊形向外衍生的多角星與內接多角星形的關係。

貳、研究目的

一、正 k 邊形內接、外延多角星各階圖形之觀察
二、探討正 k 邊形內接、外延多角星各階圖形頂角的角度關係
三、探討正 k 邊形內接、外延多角星各階圖形的周長
四、探討正 k 邊形內接、外延多角星各階圖形的面積

參、研究設備與器材

電腦、AMA 2.1

肆、研究過程

一、相關符號與定義

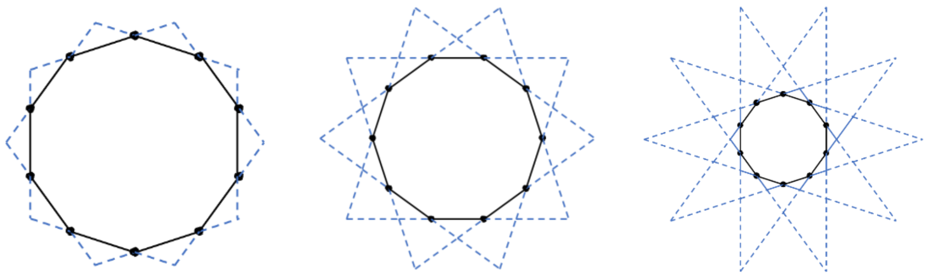
1. 外延 n 階圖形、內接 n 階圖形之定義：

正 k 邊形外延 n 階圖形：在正 k 邊形上，路徑長度為 n 的任兩點，其兩側的邊長向外延伸所形成的圖形。

正 k 邊形內接 n 階圖形：在正 k 邊形上，從一頂點開始，每跳 n 個點做間隔連線所形成的圖形。

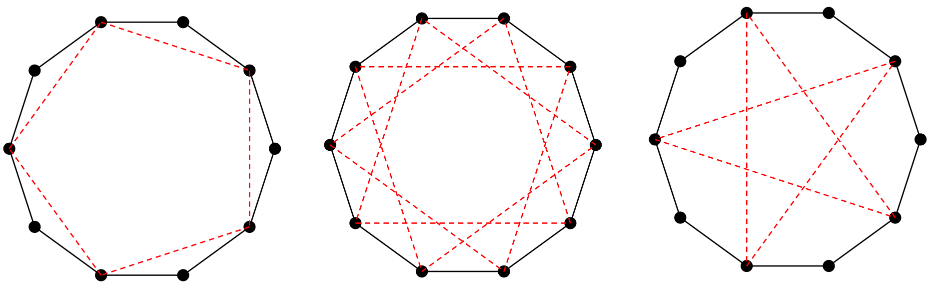
底下我們以正十邊形為例，其外延 n 階與內接 n 階所形成圖形分別如下：

正十邊形外延 n 階圖形(圖中藍色虛線部分即為正十邊形各階的外延圖形)：



$n=1$　　　　$n=2$　　　　$n=3$

正十邊形內接 n 階圖形(圖中紅色虛線部分即為正十邊形各階的內接圖形)：



$n=1$　　　　$n=2$　　　　$n=3$

2. 其他符號定義：

符號	定義
$G(k,n)$	正 k 邊形外延 n 階多角星的頂角角度
$A(k,n)$	正 k 邊形外延 n 階多角星的面積
$P(k,n)$	正 k 邊形外延 n 階多角星
$g(k,n)$	正 k 邊形內接 n 階多角星的頂角角度
$a(k,n)$	正 k 邊形內接 n 階多角星的面積
$p(k,n)$	正 k 邊形內接 n 階多角星
s	原正多邊形邊長
$S(k,n)$	正 k 邊形外延 n 階多角星兩相鄰頂點的連線段長

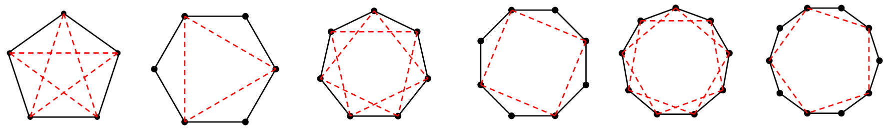
註：本研究以大寫函數符號表示外延多角星，小寫函數符號則是內接多角星

研究一、正 k 邊形內接、外延多角星在各階圖形之觀察

(一)內接星形觀察

內接星形觀察(一階 $n=1$)

五邊形　六邊形　七邊形　八邊形　九邊形　十邊形



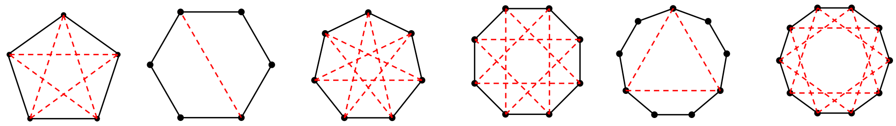
內接星形觀察(一階)小結

1.當 k 為偶數時無法一筆連成星形，只能連成正 $\frac{k}{2}$ 邊形

2.若能連成內接星形，則為正 k 角星形

內接星形觀察(二階 $n=2$)

五邊形　六邊形　七邊形　八邊形　九邊形　十邊形



內接星形觀察(二階)小結

1. k 為 $(n+1)$ 的倍數時，無法一筆內接星形

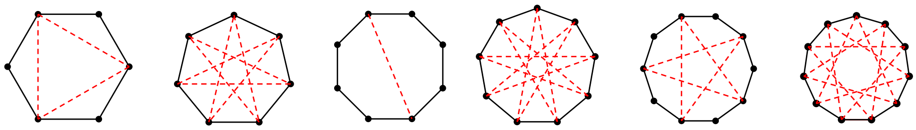
2.呈上點，當 $n+1=\frac{k}{2}$ 時，只會重疊一條線，當 $n+1>\frac{k}{2}$ 時， $p(k,2)=p(k,1)$

3.其餘二階皆可連成星形

註:當 $n=k-2$ 時，即無法採用

內接星形觀察(三階 $n=3$)

六邊形　七邊形　八邊形　九邊形　十邊形　十一邊形



內接星形觀察(三階)小結

1. .在三階內接星形中，當 $n+1>\frac{k}{2}>n$ 時， $p(k,3)=p(k,2)$

綜合三項觀察:

1. k 為 $(n+1)$ 的倍數時，無法一筆畫內接星形
   其餘皆可一筆連成 n 階星形

2. 星上點，

(1)當 $n+1=\dfrac{k}{2}$ 時，只會重疊一條線

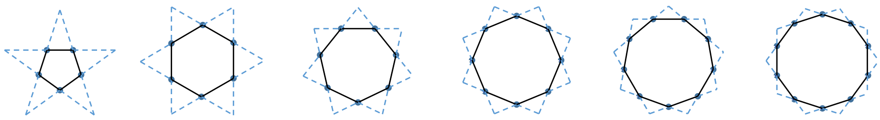
(2)在 n 階內接星形中，當 $n+1>\dfrac{k}{2}>n$ 時， $p(k,n)=p(k,n-1)$

(3)當 k 是 $n+1$ 的倍數且 $n+1\neq\dfrac{k}{2}$ 、 $\dfrac{k}{2}>n$ 時，則會連成正 $\dfrac{k}{n+1}$ 邊形

(二)外延星形觀察

外延星形觀察(一階 $n=1$)

五邊形　六邊形　七邊形　八邊形　九邊形　十邊形

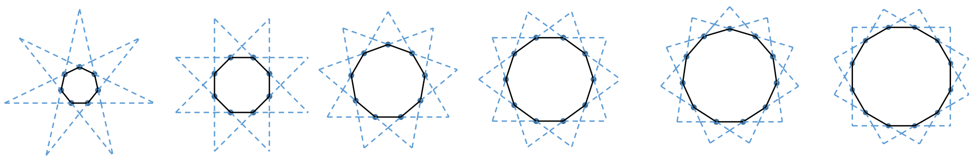


外延星形觀察(一階) 小結

1. $P(k,1)$ 中， k 為奇數時會與 $p(k,1)$ 相似

外延星形觀察(二階 $n=2$)

七邊形　八邊形　九邊形　十邊形　十一邊形　十二邊形

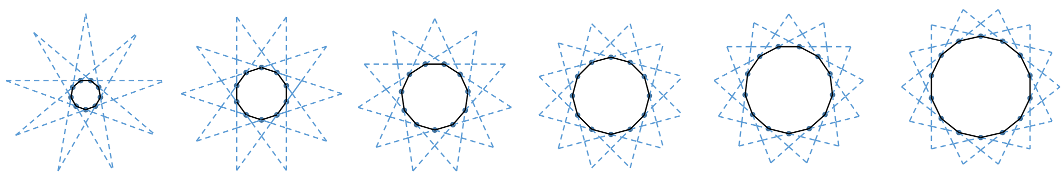


外延星形觀察(二階) 小結

1. $P(k,2)$ 中， k 不為 3 的倍數時會與 $p(k,2)$ 相似

外延星形觀察(三階 $n=3$)

九邊形　十邊形　十一邊形　十二邊形　十三邊形　十四邊形



外延星形觀察(三階) 小結

1. $P(k,n)$ 中，k 不為 $(n+1)$ 的倍數時會與 $p(k,n)$ 相似
2. 在 $P(k,n)$ 中，$k>2n+3$

綜合三項觀察:

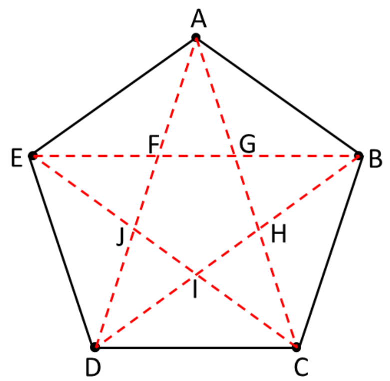
1. $P(k,n)$ 中，k 不為 $(n+1)$ 的倍數時會與 $p(k,n)$ 相似
2. 在 n 階星形中，$k>2n+3$
3. 當 k 為奇數 $(k>4)$ 時，最高階數為 $\frac{k-3}{2}$
4. 當 k 為偶數 $(k>4)$ 時，最高階數為 $\frac{k-4}{2}$

研究二、正 k 邊形內接與外延多角星在各階圖形的頂角度數

I、正 k 邊形內接多角星在各階圖形的頂角度數

(一)正 k 邊形內接一階星形的角度

正五邊形

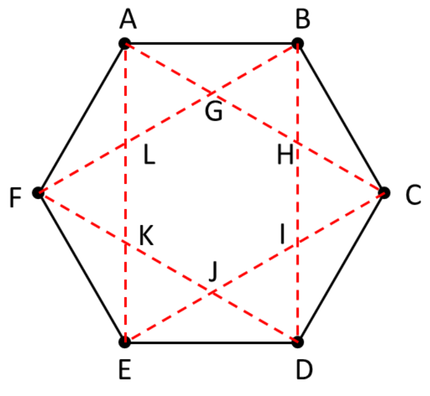


$\angle FGH = 180^\circ \times (5-2) \div 5 = 108^\circ$

$\angle FGA = \angle GFA = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$

$\angle FAG = 180^\circ - 2 \times 72^\circ = 36^\circ$

正六邊形

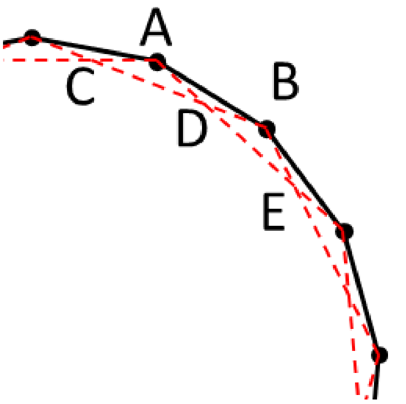


$\angle LGH = 180^\circ \times (6-2) \div 6 = 120^\circ$

$\angle GLA = \angle LGA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$\angle LAG = 180^\circ - 2 \times 60^\circ = 60^\circ$

正 k 邊形



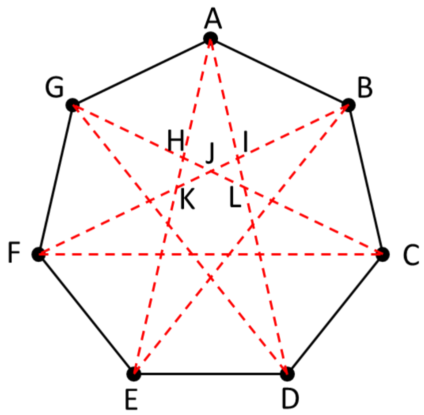
$$\angle CDE = 180^\circ \times (k-2) \div k = \frac{180k - 360^\circ}{k}$$

$$\angle ACD = \angle ADC = 180^\circ - \frac{180k - 360^\circ}{k} = \frac{360^\circ}{k}$$

$$\angle CAD = 180^\circ - 2 \times \frac{360}{k} = 180^\circ - \frac{720^\circ}{k}$$

(二)正 k 邊形內接二階星形的角度

正七邊形



$$\angle KJL = 180^\circ \times (7-2) \div 7 = \frac{900^\circ}{7}$$

$$\angle KJL = \angle HJI = \frac{900^\circ}{7}$$

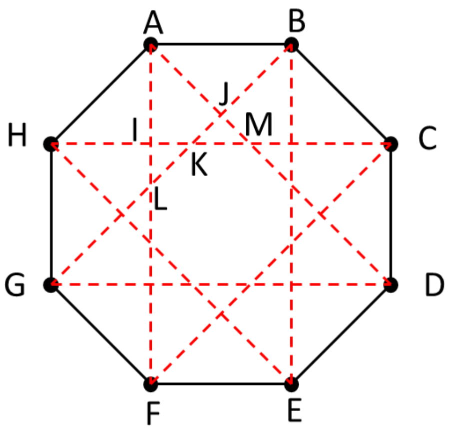
$$180^\circ - \angle HKJ = \angle HJK = \angle IJL = \frac{360^\circ}{7}$$

$$\angle KHJ = \angle JIL = 180^\circ - \frac{360^\circ}{7} \times 2 = \frac{540^\circ}{7}$$

$$\angle JHA = \angle JIA = 180^\circ - \frac{540^\circ}{7} = \frac{720^\circ}{7}$$

$$\angle HAI = 360^\circ - \frac{720^\circ}{7} \times 2 - \frac{900^\circ}{7} = \frac{180^\circ}{7}$$

正八邊形



$$\angle LKM = 180^\circ \times (8-2) \div 8 = 135^\circ$$

$$\angle LKM = \angle IKM = 135^\circ$$

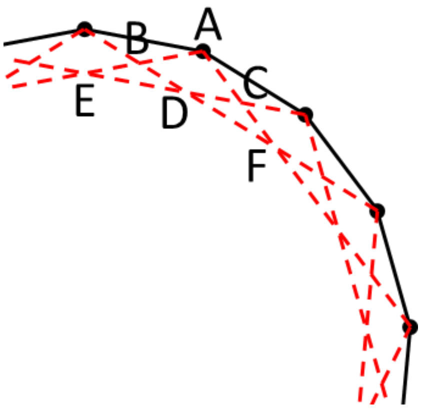
$$180^\circ - \angle LKM = \angle ILK = \angle IKL = 45^\circ$$

$$\angle LIK = \angle KJM = 180^\circ - 45^\circ \times 2 = 90^\circ$$

$$\angle AIK = \angle AJK = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$$\angle IAJ = 360^\circ - 90^\circ \times 2 - 135^\circ = 45^\circ$$

正 k 邊形



$$\angle EDF = 180^\circ \times (k-2) \div k = \frac{180k - 360^\circ}{k}$$

$$\angle EDF = \angle BDC = \frac{180k - 360^\circ}{k}$$

$$180^\circ - \angle EDF = \angle BDE = \angle CDF = 180^\circ - \frac{180k - 360^\circ}{k} = \frac{360^\circ}{k}$$

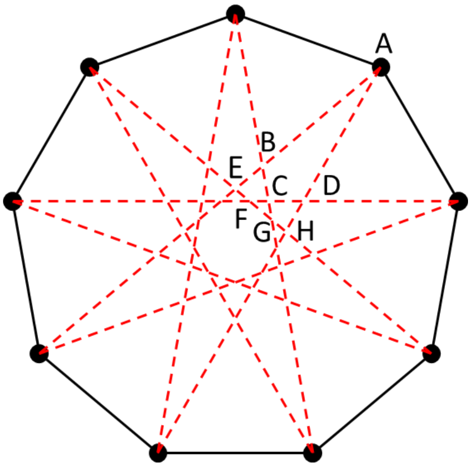
$$\angle EBD = \angle FCD = 180^\circ - \frac{360^\circ}{k} \times 2 = \frac{180k - 720^\circ}{k}$$

$$\angle ABD = \angle ACD = 180^\circ - \frac{180k - 720^\circ}{k} = \frac{720^\circ}{k}$$

$$\angle BAC = 360^\circ - \frac{720^\circ}{k} \times 2 - \frac{180k - 360^\circ}{k} = 180^\circ - \frac{1080^\circ}{k}$$

(三)正 k 邊形內接三階星形的角度

正九邊形



$$\angle EBC = \angle CDH = 60^\circ$$

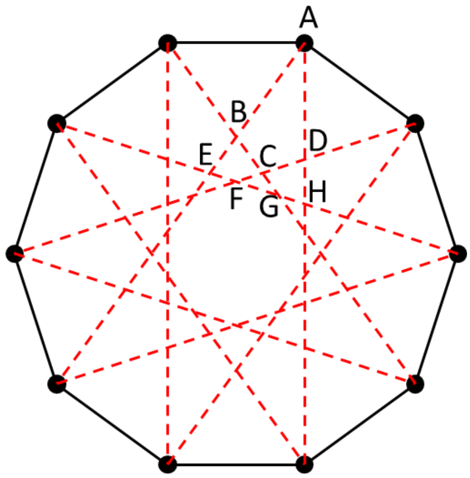
$$\angle FEB = \angle FCB = \angle GCD = \angle GFD = 80^\circ$$

$$\angle ABC = \angle ACD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\angle FCG = \angle BCD = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

$$\angle BAD = 360^\circ - 120^\circ \times 2 - 100^\circ = 20^\circ$$

正十邊形



$\angle EBC = \angle CDH = 72^\circ$

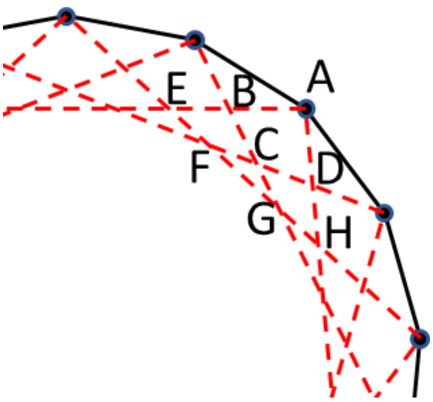
$\angle FEB = \angle FCB = \angle GCD = \angle GHD = 72^\circ$

$\angle ABC = \angle ACD = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$

$\angle FCG = \angle BCD = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$

$\angle BAD = 360^\circ - 108^\circ \times 2 - 108^\circ = 36^\circ$

正 k 邊形



$\angle EBC = \angle CDH = 180^\circ - \frac{1080^\circ}{k}$

$\angle FEB = \angle FCB = \angle GCD = \angle GHD$

$= 180^\circ - \frac{360^\circ}{k} - (180^\circ - \frac{1080^\circ}{k}) = \frac{720^\circ}{k}$

$\angle ABC = \angle ACD = 180^\circ - (180^\circ - \frac{1080^\circ}{k}) = \frac{1080^\circ}{k}$

$\angle FCG = \angle BCD = 180^\circ - \frac{720^\circ}{k}$

$\angle BAD = 360^\circ - \frac{1080^\circ}{k} \times 2 - (180^\circ - \frac{720^\circ}{k}) = 180^\circ - \frac{1440^\circ}{k}$

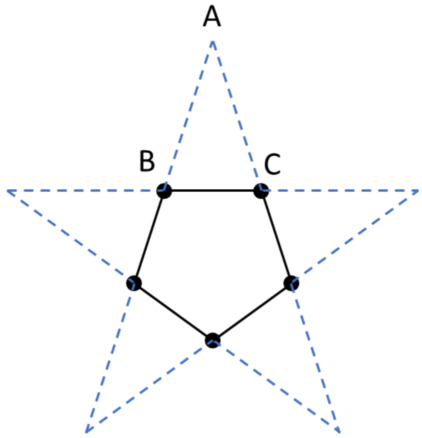
透過上述(一)(二)(三)的觀察與歸納，我們可知：正 k 邊形內接 n 階多角星的每個內角度數為 $180^\circ - \frac{360^\circ + 360^\circ \cdot n}{k}$

結論：正 k 邊形內接 n 階多角星的每個內角度數為 $180^\circ - \frac{360^\circ + 360^\circ \cdot n}{k}$ (即 $g(k,n)=180^\circ - \frac{360^\circ + 360^\circ \cdot n}{k}$)

II、正 k 邊形外延多角星在各階圖形的頂角度數

(一)正 k 邊形外延一階星形的角度

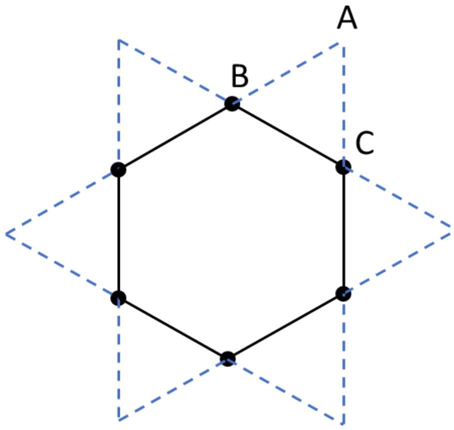
正五邊形



$\angle ABC = \angle ACB = 360^{\circ} \div 5 = 72^{\circ}$

$\angle BAC = 180^{\circ} - 72^{\circ} \times 2 = 36^{\circ}$

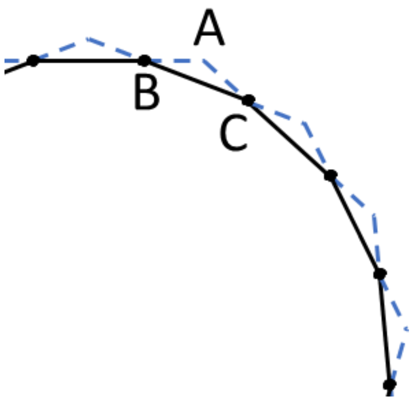
正六邊形



$\angle ABC = \angle ACB = 360^{\circ} \div 6 = 60^{\circ}$

$\angle BAC = 180^{\circ} - 60^{\circ} \times 2 = 60^{\circ}$

正 k 邊形

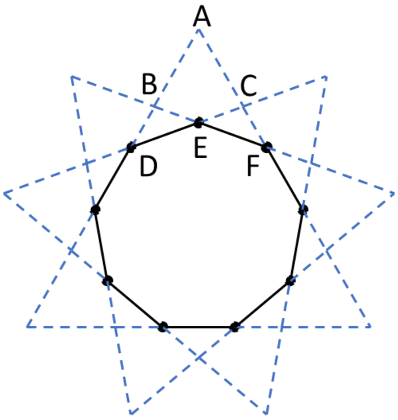


$\angle ABC = \angle ACB = 360^{\circ} \div k = \dfrac{360^{\circ}}{k}$

$\angle BAC = 180^{\circ} - \dfrac{360^{\circ}}{k} \times 2 = 180^{\circ} - \dfrac{720^{\circ}}{k}$

(二)正 k 邊形外延二階星形的角度

正九邊形



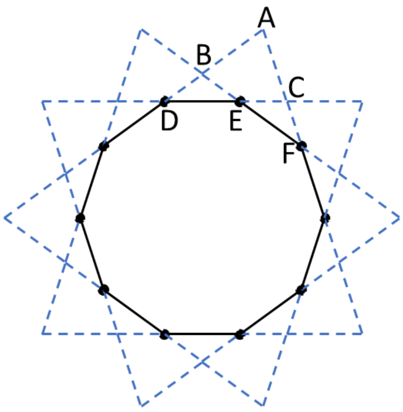
$\angle BDE = \angle BED = \angle CEF = \angle CFE = 360^\circ \div 9 = 40^\circ$

$\angle DEF = \angle BEC = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

$\angle ABE = \angle ACE = \angle BDE + \angle BED = 80^\circ$

$\angle BAC = 360^\circ - 80^\circ \times 2 - 140^\circ = 60^\circ$

正十邊形



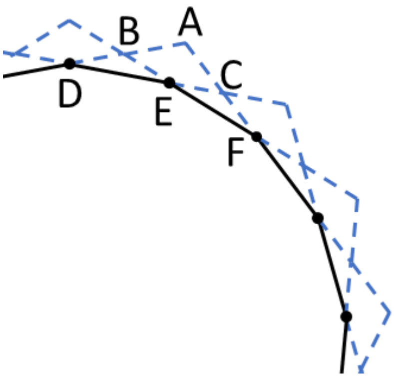
$\angle BDE = \angle BED = \angle CEF = \angle CFE = 360^\circ \div 10 = 36^\circ$

$\angle DEF = \angle BEC = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$

$\angle ABE = \angle ACE = \angle BDE + \angle BED = 72^\circ$

$\angle BAC = 360^\circ - 72^\circ \times 2 - 144^\circ = 72^\circ$

正 k 邊形



$$\angle BDE = \angle BED = \angle CEF = \angle CFE = 360^\circ \div k = \frac{360^\circ}{k}$$

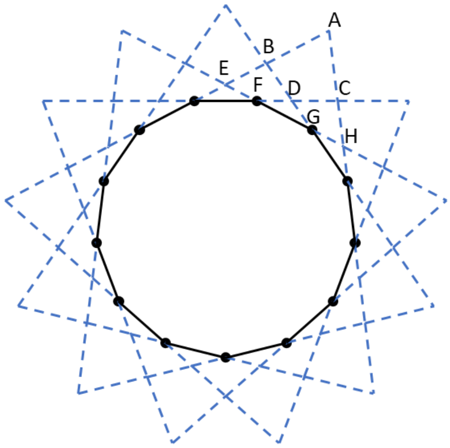
$$\angle DEF = \angle BEC = 180^\circ - \frac{360^\circ}{k}$$

$$\angle ABE = \angle ACE = \angle BDE + \angle BED = \frac{720^\circ}{k}$$

$$\angle BAC = 360^\circ - \frac{720^\circ}{k} \times 2 - (180^\circ - \frac{360^\circ}{k}) = 180^\circ - \frac{1080^\circ}{k}$$

(三)正 k 邊形外延三階星形的角度

正十三邊形



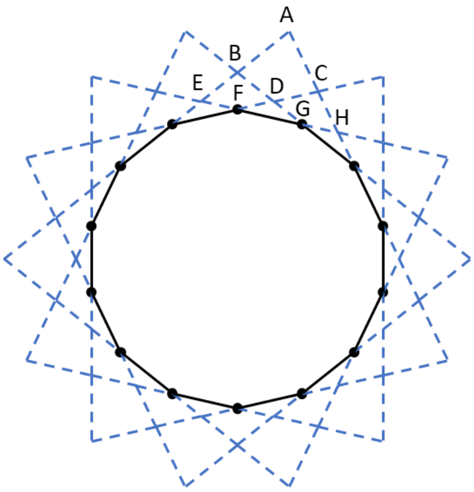
$$\angle FDG = 180^\circ - \frac{720^\circ}{13}$$

$$\angle EBD = \angle HCD = 180^\circ - \frac{1080^\circ}{13}$$

$$\angle ABD = \angle ACD = 180^\circ - (180^\circ - \frac{1080^\circ}{13}) = \frac{1080^\circ}{13}$$

$$\angle BAC = 360^\circ - \frac{1080^\circ}{13} \times 2 - (180^\circ - \frac{720^\circ}{13}) = 180^\circ - \frac{1800^\circ}{13}$$

正十四邊形



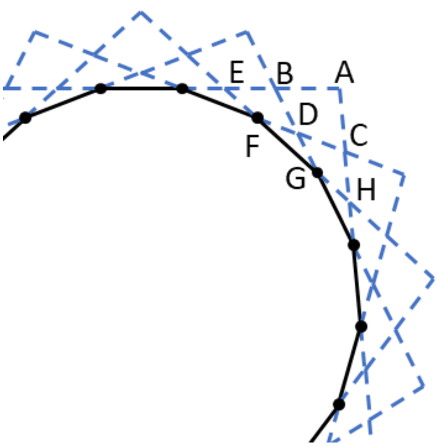
$$\angle FDG = 180^\circ - \frac{720^\circ}{14} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{7}$$

$$\angle EBD = \angle HCD = 180^\circ - \frac{540^\circ}{7}$$

$$\angle ABD = \angle ACD = 180^\circ - (180^\circ - \frac{540^\circ}{7}) = \frac{720^\circ}{7}$$

$$\angle BAC = 360^\circ - \frac{720^\circ}{7} \times 2 - (180^\circ - \frac{360^\circ}{7}) = 180^\circ - \frac{720^\circ}{7}$$

正 k 邊形



$$\angle FDG = 180^\circ - \frac{720^\circ}{k}$$

$$\angle EBD = \angle HCD = 180^\circ - \frac{1080^\circ}{k}$$

$$\angle ABD = \angle ACD = 180^\circ - (180^\circ - \frac{1080^\circ}{k}) = \frac{1080^\circ}{k}$$

$$\angle BAC = 360^\circ - \frac{1080^\circ}{k} \times 2 - \frac{720^\circ}{k} = 180^\circ - \frac{1440^\circ}{k}$$

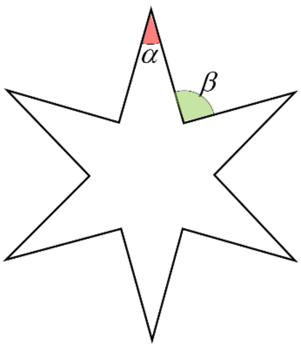
透過上述(一)(二)(三)的觀察與歸納，我們可知：正 k 邊形外延 n 階多角星的每個內角度數為$180^\circ - \dfrac{360^\circ + 360^\circ \cdot n}{k}$

結論：正 k 邊形外延 n 階多角星的每個內角度數為$180^\circ - \dfrac{360^\circ + 360^\circ \cdot n}{k}$ (即 $G(k,n)=180^\circ - \dfrac{360^\circ + 360^\circ \cdot n}{k}$)

由研究二我們可歸納出：正 k 邊形內接 n 階多角星恰巧與外延 n 階多角星的每個內角度數相同，其角度均為$180^\circ - \dfrac{360^\circ + 360^\circ \cdot n}{k}$，即 $g(k,n)=G(k,n)=180^\circ - \dfrac{360^\circ + 360^\circ \cdot n}{k}$ 。

定理一：正 k 邊形內接 n 階多角星與外延 n 階多角星的每個內角度數恰巧相同 (即 $g(k,n)=G(k,n)=180^\circ - \dfrac{360^\circ + 360^\circ \cdot n}{k}$)

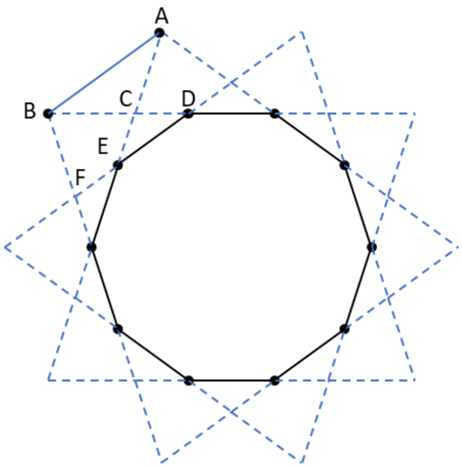
透過上述推論我們知道：正 k 邊形內接 n 階多角星與外延 n 階多角星的恰巧每個內角度數均相同，我們想更進一步了解其是否會相似？由於內階 n 階多角星與外延 n 階多角星均是由正 k 邊形所衍生，故所衍生的多角星均為等邊多角星，而兩多邊形的相似必須滿足：**(1)所有對應邊成比例**，**(2)所有對應角均相等**，而兩個等邊多角星的所有對應邊的邊長比都是相等的，故我們只須證明兩多角星的所有對應角均相等(亦即證明內階與外延角星的每個內角 α 、凹陷角 β 均相同)。



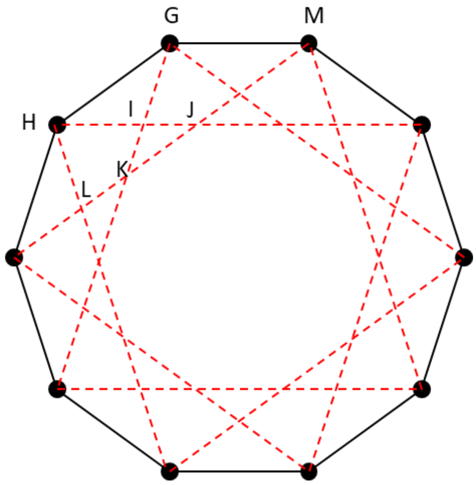
多角星的內角 α 與凹陷角 β 的位置圖

在上述定理一中，我們已證明正 k 邊形內接 n 階多角星與外延 n 階多角星的每個內角度數均相同，底下我們將證明正 k 邊形內接 n 階多角星與外延 n 階多角星的每個凹陷角度數也會相同。

[證明]



正 k 邊形外延 n 階多角星凹陷角為 $\angle BCA$



正 k 邊形內接 n 階多角星凹陷角為 $\angle HIG$

由於正 k 邊形外延 n 階多角星凹陷角為 $\angle BCA$ 恰巧會等於正 k 邊形外延(n-1)階多角星的內角，故 $\angle BCA = G(k,n-1) = 180^\circ - \dfrac{360^\circ + 360^\circ \cdot (n-1)}{k} = 180^\circ - \dfrac{360^\circ \cdot n}{k}$

而正 k 邊形內接 n 階多角星凹陷角為 $\angle GHF = 180^\circ - 2\angle GFH$..........................(1)

又 $\angle HGI = \dfrac{1}{2}[\angle HGM - g(k,n)] = \dfrac{1}{2}[(180^\circ - \dfrac{360^\circ}{k}) - g(k,n)]$

$= \dfrac{1}{2}[(180^\circ - \dfrac{360^\circ}{k}) - (180^\circ - \dfrac{360^\circ + 360^\circ \cdot n}{k})] = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{360^\circ \cdot n}{k}$ 將其代入上式(1)

可得 $\angle HIG = 180^\circ - 2\angle HGI = 180^\circ - 2(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{360^\circ \cdot n}{k}) = 180^\circ - \dfrac{360^\circ \cdot n}{k}$

故正 k 邊形外延 n 階多角星凹陷角 $\angle BCA$ 與正 k 邊形內接 n 階多角星凹陷角 $\angle HIG$ 相等

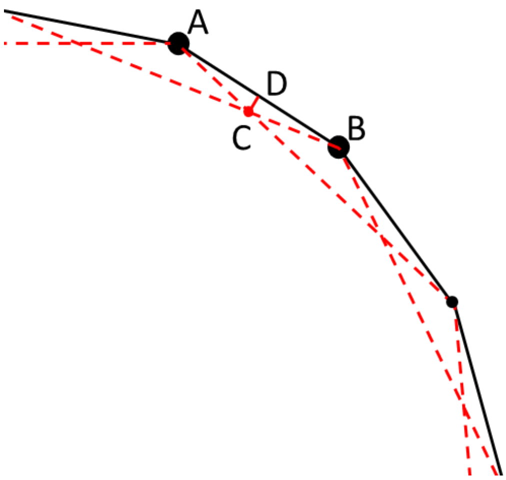
透過上述證明，我們知道：正 k 邊形外延 n 階多角星的凹陷角與正 k 邊形內接 n 階多角星的凹陷角均相等，又每個內角度數也相同且均為等邊多角星，故正 k 邊形外延 n 階多角星與內接 n 階多角星會相似，即 $p(k,n) \sim P(k,n)$。

定理二：正 k 邊形內接 n 階多角星恰巧與外延 n 階多角星相似
(即 $p(k,n) \sim P(k,n)$)

研究三、正 k 邊形內接與外延多角星在各階圖形的周長關係

I、正 k 邊形內接多角星在各階圖形的周長

(一)正 k 邊形內接一階星形的周長



$$\angle BAC = 180^\circ - \frac{360^\circ}{k}$$

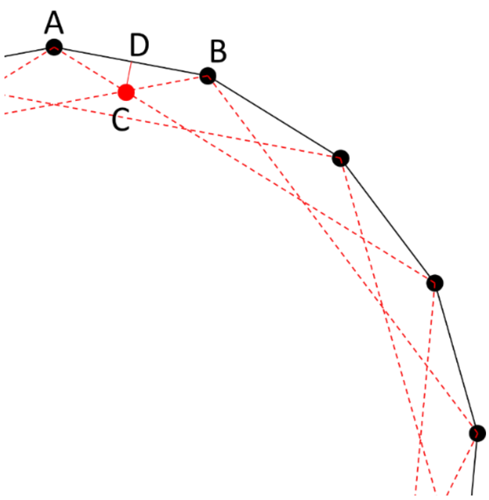
$$\angle DCA = 90^\circ - \frac{180^\circ}{k}$$

$$\overline{AC} = \csc(90^\circ - \frac{180^\circ}{k}) \times \frac{s}{2}$$

$$= \sec(\frac{180^\circ}{k}) \times \frac{s}{2}$$

$$周長 = \sec(\frac{180^\circ}{k}) \times s \times k$$

(二)正 k 邊形內接二階星形的周長



$$\angle BAC = 180^\circ - \frac{720^\circ}{k}$$

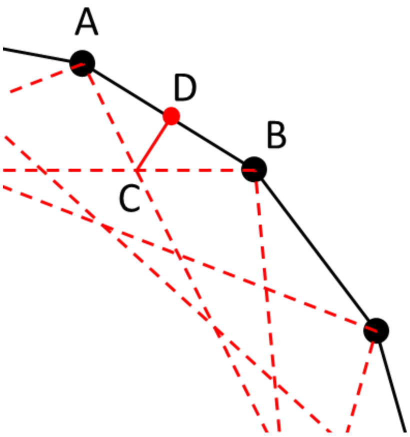
$$\angle DCA = 90^\circ - \frac{360^\circ}{k}$$

$$\overline{AC} = \csc(90^\circ - \frac{360^\circ}{k}) \times \frac{s}{2}$$

$$= \sec(\frac{360^\circ}{k}) \times \frac{s}{2}$$

$$周長 = \sec(\frac{360^\circ}{k}) \times s \times k$$

(三)正 k 邊形內接三階星形的周長



$$\angle BAC = 180^\circ - \frac{1080^\circ}{k}$$

$$\angle DAC = 90^\circ - \frac{540^\circ}{k}$$

$$\overline{AC} = \csc(90^\circ - \frac{540^\circ}{k}) \times \frac{s}{2}$$

$$= \sec(\frac{540^\circ}{k}) \times \frac{s}{2}$$

$$周長 = \sec(\frac{540^\circ}{k}) \times s \times k$$

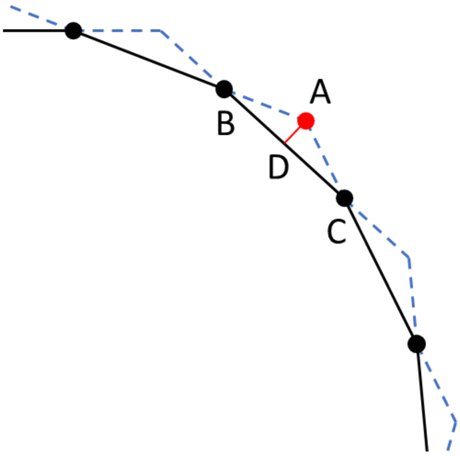
透過上述(一)(二)(三)的觀察與歸納，我們可知：

正 k 邊形內接 n 階多角星的周長為 $\sec(\frac{180n^\circ}{k}) \times s \times k$

結論：正 k 邊形內接 n 階多角星的周長為 $\sec(\frac{180n^\circ}{k}) \times s \times k$

II、正 k 邊形外延多角星在各階圖形的周長

(一)正 k 邊形外延一階星形的周長



已知 $\overline{BC} = s$

$$\angle BAC = 180^\circ - \frac{720^\circ}{k}$$

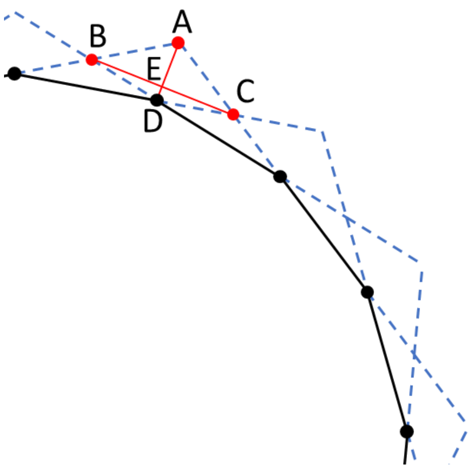
$$\angle DAC = 90^\circ - \frac{360^\circ}{k}$$

$$\overline{AC} = \csc(90^\circ - \frac{360^\circ}{k}) \times \frac{s}{2}$$

$$= \sec(\frac{360^\circ}{k}) \times \frac{s}{2}$$

$$\text{周長} = \sec(\frac{360^\circ}{k}) \times s \times k$$

(二)正 k 邊形外延二階星形的周長



已知 $\overline{CD} = \sec(\frac{360^\circ}{k}) \times \frac{s}{2}$

$$\angle BDC = 180^\circ - \frac{360^\circ}{k}$$

$$\angle EDC = 90^\circ - \frac{180^\circ}{k}$$

$$\overline{EC} = \sin(90^\circ - \frac{180^\circ}{k}) \times \sec(\frac{360^\circ}{k}) \times \frac{s}{2}$$

$$\angle BAC = 180^\circ - \frac{1080^\circ}{k}$$

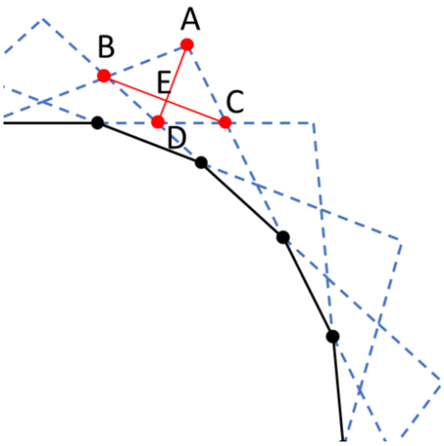
$$\angle EAC = 90^\circ - \frac{540^\circ}{k}$$

$$\overline{AC} = \csc(90^\circ - \frac{540^\circ}{k}) \times \sin(90^\circ - \frac{180^\circ}{k}) \times \sec(\frac{360^\circ}{k}) \times \frac{s}{2}$$

$$= \sec(\frac{540^\circ}{k}) \times \cos(\frac{180^\circ}{k}) \times \sec(\frac{360^\circ}{k}) \times \frac{s}{2}$$

$$\text{周長} = \sec(\frac{540^\circ}{k}) \times \cos(\frac{180^\circ}{k}) \times \sec(\frac{360^\circ}{k}) \times s \times k$$

(三)正 k 邊形外延三階星形的周長



已知 $\overline{CD}=\sec(\frac{540^\circ}{k})\times\cos(\frac{180^\circ}{k})\times\sec(\frac{360^\circ}{k})\times\frac{s}{2}$

$\angle BDC=180^\circ-\frac{720^\circ}{k}\quad \angle EDC=90^\circ-\frac{360^\circ}{k}$

$\overline{EC}=\sin(90^\circ-\frac{360^\circ}{k})\times\sec(\frac{540^\circ}{k})\times\cos(\frac{180^\circ}{k})\times\sec(\frac{360^\circ}{k})\times\frac{s}{2}$

$\angle BAC=180^\circ-\frac{1440^\circ}{k}\quad \angle EAC=90^\circ-\frac{720^\circ}{k}$

$\overline{AC}=\csc(90^\circ-\frac{720^\circ}{k})\times\sin(90^\circ-\frac{360^\circ}{k})$

$\times\sec(\frac{540^\circ}{k})\times\cos(\frac{180^\circ}{k})\times\sec(\frac{360^\circ}{k})\times\frac{s}{2}$

$=\sec(\frac{720^\circ}{k})\times\cos(\frac{360^\circ}{k})\times\sec(\frac{540^\circ}{k})\times\cos(\frac{180^\circ}{k})\times\sec(\frac{360^\circ}{k})\times\frac{s}{2}$

$=\left(\prod_{j=1}^{3}\sec(\frac{180^\circ(j+1)}{k})\cos(\frac{180^\circ(j-1)}{k})\right)\times\frac{s}{2}$

周長$=\left(\prod_{j=1}^{3}\sec(\frac{180^\circ(j+1)}{k})\cos(\frac{180^\circ(j-1)}{k})\right)\times s\times k$

透過上述(一)(二)(三)的觀察與歸納，我們可知：正 k 邊形外延 n 階多角星的周長為

$$\left(\prod_{j=1}^{n}\sec(\frac{180^\circ(j+1)}{k})\cos(\frac{180^\circ(j-1)}{k})\right)\times s\times k$$

結論：正 k 邊形外延 n 階多角星的周長為 $\left(\prod_{j=1}^{n}\sec(\frac{180^\circ(j+1)}{k})\cos(\frac{180^\circ(j-1)}{k})\right)\times s\times k$

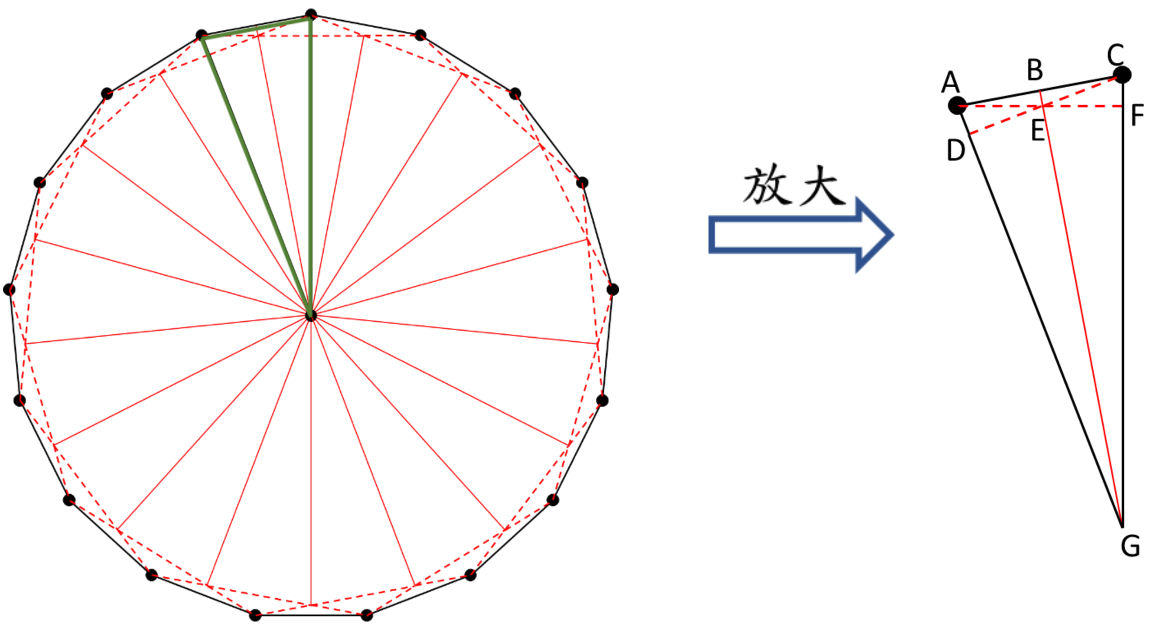
定理三：(1)正 k 邊形內接 n 階多角星周長 $=\sec(\frac{180n^\circ}{k})\times s\times k$

(2)正 k 邊形外延 n 階多角星周長 $=\left(\prod_{j=1}^{n}\sec(\frac{180^\circ(j+1)}{k})\cos(\frac{180^\circ(j-1)}{k})\right)\times s\times k$

研究四、正 k 邊形內接與外延多角星在各階圖形的面積

I、正 k 邊形內接多角星在各階圖形的面積

(一)正 k 邊形內接一階星形的面積



$\triangle AEG$ 的面積 $=\triangle ABG$ 的面積 $-\triangle ABE$ 的面積

$$\triangle ABG \text{ 的面積} = \frac{1}{2}\times\frac{s}{2}\times\frac{s}{2}\times\cot(\frac{180^\circ}{k}) = \frac{s^2}{8}\times\cot(\frac{180^\circ}{k})$$

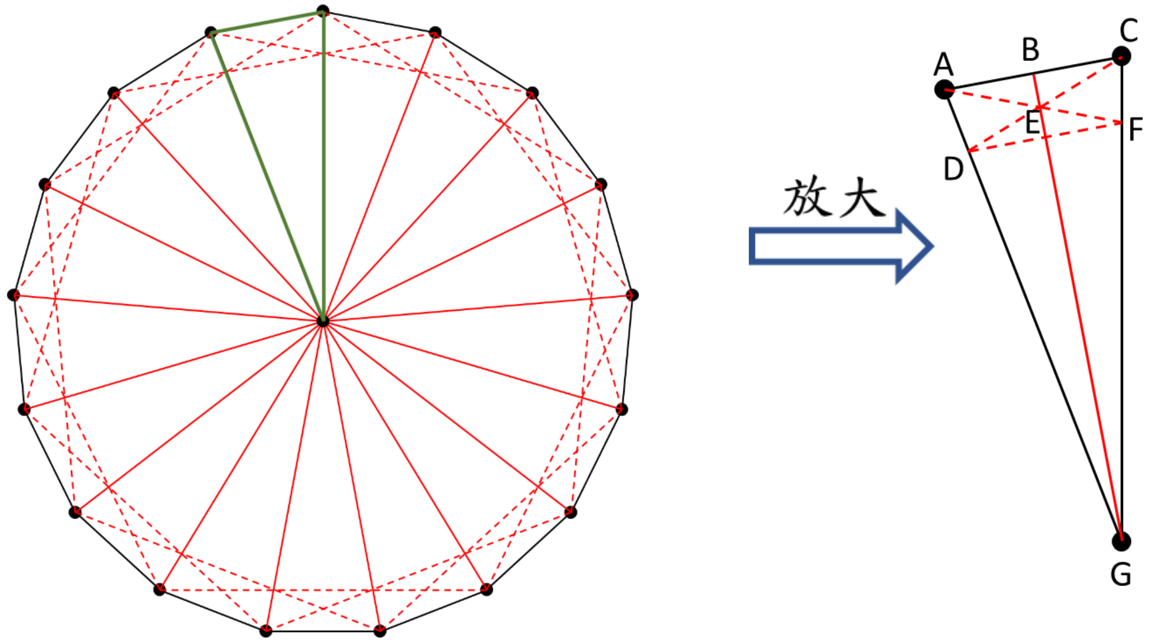
$$\triangle ABE \text{ 的面積} = \frac{1}{2}\times\frac{s}{2}\times\frac{s}{2}\times\cot\left[\frac{(180^\circ-\frac{360^\circ}{k})}{2}\right] = \frac{s^2}{8}\times\tan(\frac{180^\circ}{k})$$

$$\triangle AEG \text{ 的面積} = \frac{s^2}{8}\times\left[\cot(\frac{180^\circ}{k})-\tan(\frac{180^\circ}{k})\right]$$

$a(k,1)=2k\cdot\triangle AEG$ 的面積

$$=2k\times\frac{s^2}{8}\times\left[\cot(\frac{180^\circ}{k})-\tan(\frac{180^\circ}{k})\right]=\frac{s^2k}{4}\times\left[\cot(\frac{180^\circ}{k})-\tan(\frac{180^\circ}{k})\right]$$

(二)正 k 邊形內接二階星形的面積



$\triangle AEG$ 的面積 $=\triangle ABG$ 的面積 $-\triangle ABE$ 的面積

$$\triangle ABG \text{ 的面積} = \frac{1}{2}\times\frac{s}{2}\times\frac{s}{2}\times\cot(\frac{180^\circ}{k}) = \frac{s^2}{8}\times\cot(\frac{180^\circ}{k})$$

$$\triangle ABE \text{ 的面積} = \frac{1}{2}\times\frac{s}{2}\times\frac{s}{2}\times\cot\left[\frac{(180^\circ-\frac{720^\circ}{k})}{2}\right] = \frac{s^2}{8}\times\tan(\frac{360^\circ}{k})$$

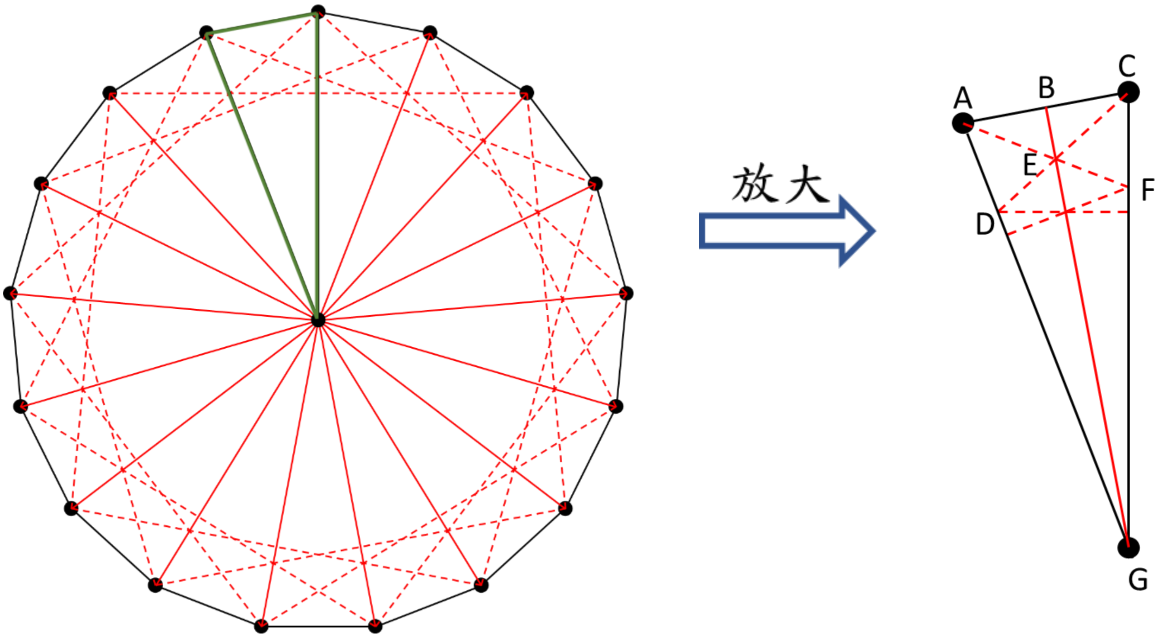
$$\triangle AEG \text{ 的面積} = \frac{s^2}{8}\times\left[\cot(\frac{180^\circ}{k})-\tan(\frac{360^\circ}{k})\right]$$

$$a(k,2) = 2k\cdot\triangle AEG \text{ 的面積} = 2k\times\frac{s^2}{8}\times\left[\cot(\frac{180^\circ}{k})-\tan(\frac{360^\circ}{k})\right]$$

$$=\frac{s^2k}{4}\times\left[\cot(\frac{180^\circ}{k})-\tan(\frac{360^\circ}{k})\right]$$

(三)正 k 邊形內接三階星形的面積

$\triangle AEG$ 的面積 $=\triangle ABG$ 的面積 $-\triangle ABE$ 的面積



$$\triangle ABG \text{ 的面積} = \frac{1}{2}\times\frac{s}{2}\times\frac{s}{2}\times\cot(\frac{180^\circ}{k}) = \frac{s^2}{8}\times\cot(\frac{180^\circ}{k})$$

$$\triangle ABE \text{ 的面積} = \frac{1}{2}\times\frac{s}{2}\times\frac{s}{2}\times\cot\left[\frac{(180^\circ - \frac{1080^\circ}{k})}{2}\right] = \frac{s^2}{8}\times\tan(\frac{540^\circ}{k})$$

$$\triangle AEG \text{ 的面積} = \frac{s^2}{8}\times\left[\cot(\frac{180^\circ}{k}) - \tan(\frac{540^\circ}{k})\right]$$

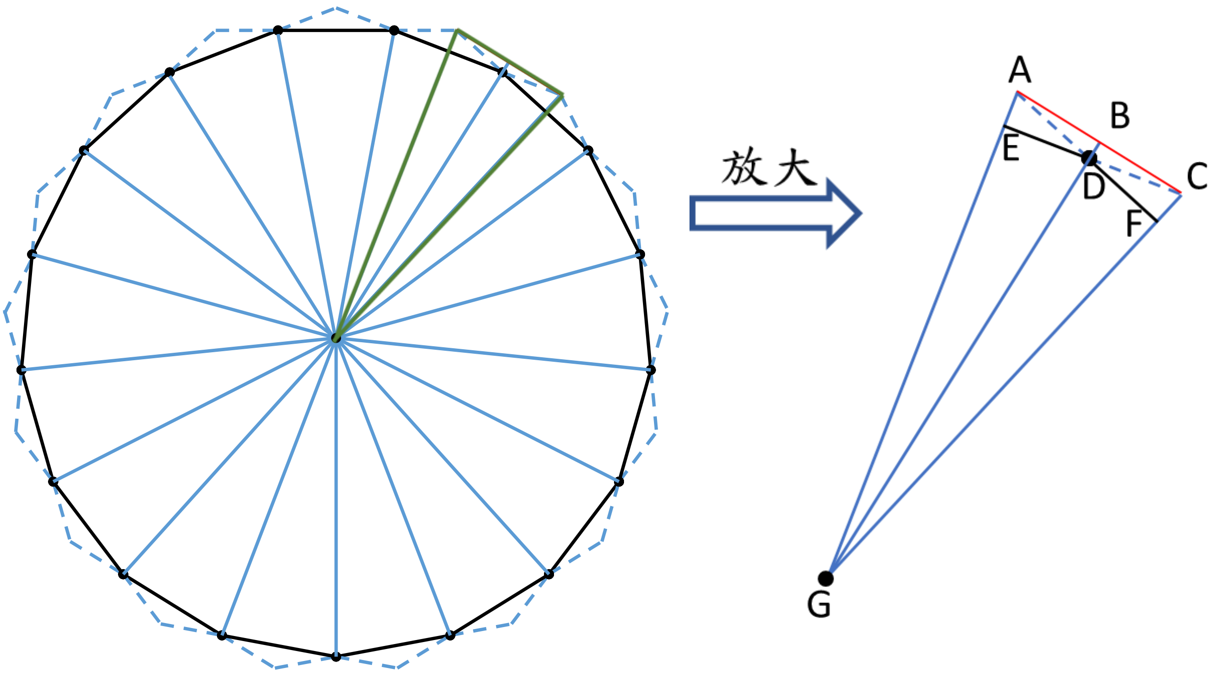
$$a(k,3) = 2k\cdot\triangle AEG \text{ 的面積} = 2k\times\frac{s^2}{8}\times\left[\cot(\frac{180^\circ}{k}) - \tan(\frac{540^\circ}{k})\right]$$

$$= \frac{s^2k}{4}\times\left[\cot(\frac{180^\circ}{k}) - \tan(\frac{540^\circ}{k})\right]$$

結論：$a(k,n) = \dfrac{s^2k}{4}\times\left[\cot(\dfrac{180^\circ}{k}) - \tan(\dfrac{180^\circ}{k}\cdot n)\right]$

II、正 k 邊形外延多角星在各階圖形的面積

(一)正 k 邊形外延一階星形的面積



$$\overline{AD}=\frac{s}{2}\times\sec(\frac{360^{\circ}}{k})$$

$$S(k,1)=\overline{AC}=s\times\sec(\frac{360^{\circ}}{k})\times\cos(\frac{180^{\circ}}{k})$$

$\triangle ADG$ 的面積 $=\triangle ABG$ 的面積 $-\triangle ABD$ 的面積

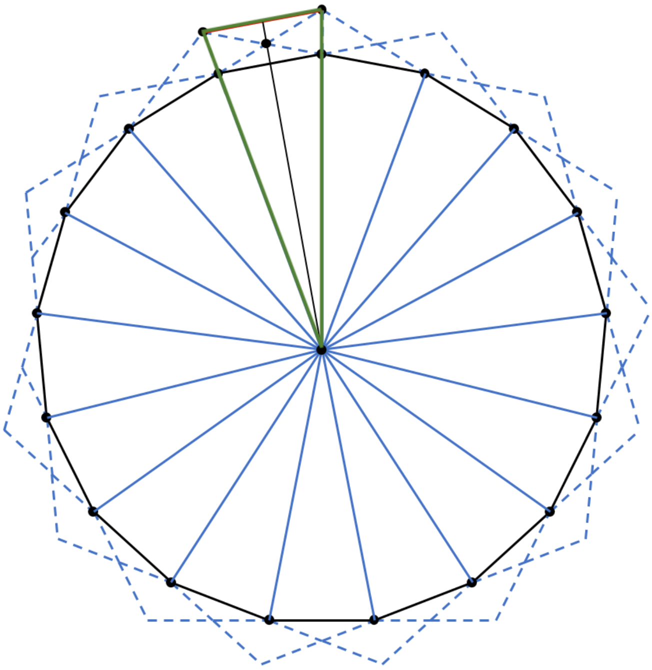
$$\triangle ABG\text{ 的面積}=\frac{1}{2}\times\frac{S(k,1)}{2}\times\frac{S(k,1)}{2}\times\cot(\frac{180^{\circ}}{k})=\frac{[S(k,1)]^2}{8}\times\cot(\frac{180^{\circ}}{k})$$

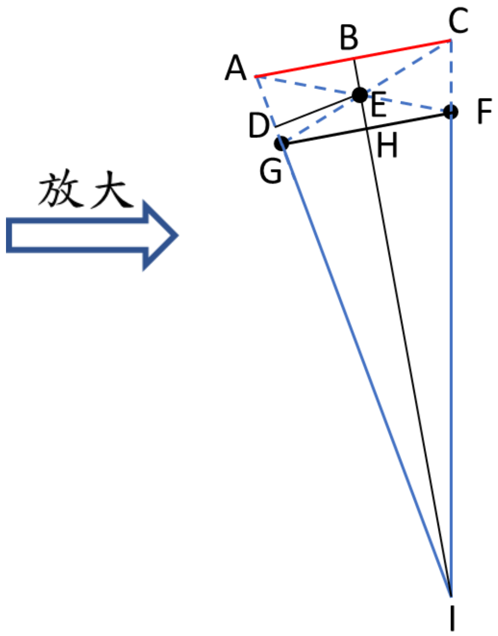
$$\triangle ABD\text{ 的面積}=\frac{1}{2}\times\frac{S(k,1)}{2}\times\frac{S(k,1)}{2}\times\cot\left[\frac{(180^{\circ}-\frac{360^{\circ}}{k})}{2}\right]=\frac{[S(k,1)]^2}{8}\times\tan(\frac{180^{\circ}}{k})$$

$$\triangle ADG\text{ 的面積}=\frac{[S(k,1)]^2}{8}\times\left[\cot(\frac{180^{\circ}}{k})-\tan(\frac{180^{\circ}}{k})\right]$$

$$A(k,1)=(\triangle ABG-\triangle ABD)\cdot 2k=\frac{[S(k,1)]^2 k}{4}\times\left[\cot(\frac{180^{\circ}}{k})-\tan(\frac{180^{\circ}}{k})\right]$$

(二)正 k 邊形外延二階星形的面積





$$\overline{DE}=\frac{s}{2}\times\sec(\frac{360^\circ}{k})\times\cos(\frac{180^\circ}{k})$$

$$\overline{AE}=\frac{s}{2}\times\sec(\frac{540^\circ}{k})\times\sec(\frac{360^\circ}{k})\times\cos(\frac{180^\circ}{k})$$

$$S(k,2)=\overline{AC}=s\times\sec(\frac{540^\circ}{k})\times\sec(\frac{360^\circ}{k})\times\cos(\frac{360^\circ}{k})\times\cos(\frac{180^\circ}{k})$$

$\triangle AEI$ 的面積 $=\triangle ABI$ 的面積 $-\triangle ABE$ 的面積

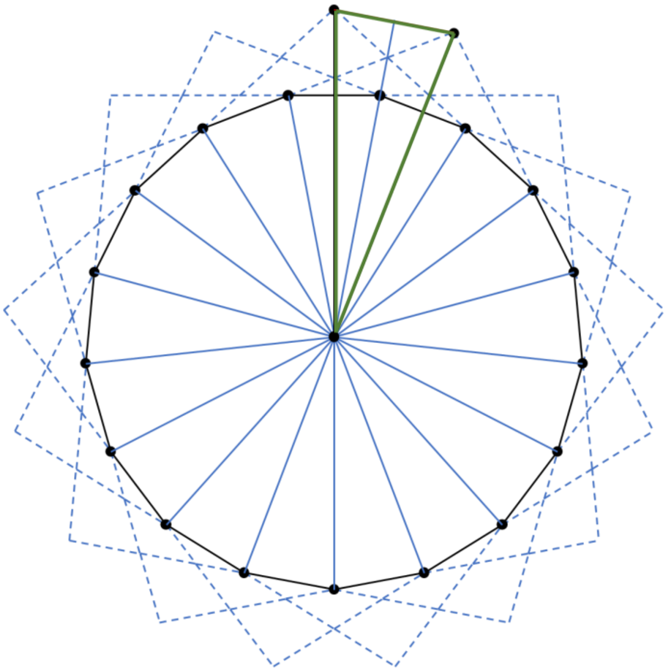
$\triangle ABI$ 的面積 $=\frac{1}{2}\times\frac{S(k,2)}{2}\times\frac{S(k,2)}{2}\times\cot(\frac{180^\circ}{k})=\frac{[S(k,2)]^2}{8}\times\cot(\frac{180^\circ}{k})$

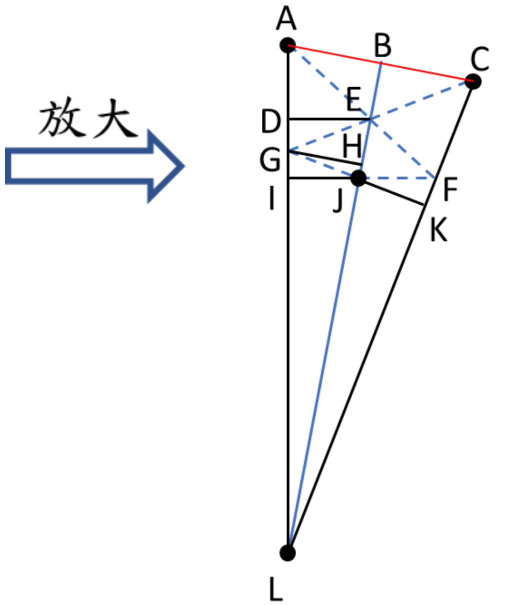
$\triangle ABE$ 的面積 $=\frac{1}{2}\times\frac{S(k,2)}{2}\times\frac{S(k,2)}{2}\times\cot\left[\frac{(180^\circ-\frac{720^\circ}{k})}{2}\right]=\frac{[S(k,2)]^2}{8}\times\tan(\frac{360^\circ}{k})$

$\triangle AEI$ 的面積 $=\frac{[S(k,2)]^2}{8}\times\left[\cot(\frac{180^\circ}{k})-\tan(\frac{360^\circ}{k})\right]$

$$A(k,2)=(\triangle ABI-\triangle ABE)\cdot 2k=\frac{[S(k,2)]^2 k}{4}\times\left[\cot(\frac{180^\circ}{k})-\tan(\frac{360^\circ}{k})\right]$$

(三)正 k 邊形外延三階星形的面積





$$\overline{DE}=\frac{s}{2}\times\sec(\frac{540^\circ}{k})\times\sec(\frac{360^\circ}{k})\times\cos(\frac{360^\circ}{k})\times\cos(\frac{180^\circ}{k})$$

$$\overline{AE}=\frac{s}{2}\times\sec(\frac{720^\circ}{k})\times\sec(\frac{540^\circ}{k})\times\sec(\frac{360^\circ}{k})\times\cos(\frac{360^\circ}{k})\times\cos(\frac{180^\circ}{k})$$

$$S(k,3)=\overline{AC}=s\times\sec(\frac{720^\circ}{k})\sec(\frac{540^\circ}{k})\times\sec(\frac{360^\circ}{k})\times\cos(\frac{540^\circ}{k})\times\cos(\frac{360^\circ}{k})\times\cos(\frac{180^\circ}{k})$$

$\triangle AEL$ 的面積 $=\triangle ABL$ 的面積 $-\triangle ABE$ 的面積

$\triangle ABL$ 的面積 $=\frac{1}{2}\times\frac{S(k,3)}{2}\times\frac{S(k,3)}{2}\times\cot(\frac{180^\circ}{k})=\frac{[S(k,3)]^2}{8}\times\cot(\frac{180^\circ}{k})$

$\triangle ABE$ 的面積 $=\frac{1}{2}\times\frac{S(k,3)}{2}\times\frac{S(k,3)}{2}\times\cot\left[\frac{(180^\circ-\frac{1080^\circ}{k})}{2}\right]=\frac{[S(k,3)]^2}{8}\times\tan(\frac{540^\circ}{k})$

$\triangle AEL$ 的面積 $=\frac{[S(k,3)]^2}{8}\times\left[\cot(\frac{180^\circ}{k})-\tan(\frac{540^\circ}{k})\right]$

$$A(k,3)=(\triangle ABL-\triangle ABE)\cdot 2k=\frac{[S(k,3)]^2 k}{4}\times\left[\cot(\frac{180^\circ}{k})-\tan(\frac{540^\circ}{k})\right]$$

結論：$A(k,n)=\dfrac{\left[S(k,n)\right]^2 k}{4}\times\left[\cot(\dfrac{180^\circ}{k})-\tan(\dfrac{180^\circ}{k}\cdot n)\right]$，

其中 $S(k,n)=\left(\prod_{j=1}^{n}\sec(\dfrac{180^\circ(j+1)}{k})\times\cos(\dfrac{180^\circ(j)}{k})\right)\times s\times k$

定理四：(1)正 k 邊形內接 n 階多角星面積 $a(k,n)=\dfrac{s^2k}{4}\times\left[\cot(\dfrac{180^\circ}{k})-\tan(\dfrac{180^\circ}{k}\cdot n)\right]$

(2)正 k 邊形外延 n 階多角星面積 $A(k,n)=\dfrac{\left[S(k,n)\right]^2 k}{4}\times\left[\cot(\dfrac{180^\circ}{k})-\tan(\dfrac{180^\circ}{k}\cdot n)\right]$，

其中 $S(k,n)=\left(\prod_{j=1}^{n}\sec(\dfrac{180^\circ(j+1)}{k})\cos(\dfrac{180^\circ(j)}{k})\right)\times s\times k$

伍、結論

1. 正 k 邊形內接 n 階多角星與外延 n 階多角星的每個內角度數恰巧相同

(即 $g(k,n)=G(k,n)=180^\circ-\dfrac{360^\circ+360n^\circ}{k}$)

2. 正 k 邊形內接 n 階多角星恰巧與外延 n 階多角星相似(即 $p(k,n)\sim P(k,n)$)

3. (1)正 k 邊形內接 n 階多角星周長 $=\sec(\dfrac{180n^\circ}{k})\times s\times k$

(2)正 k 邊形外延 n 階多角星周長 $=\left(\prod_{j=1}^{n}\sec(\dfrac{180^\circ(j+1)}{k})\cos(\dfrac{180^\circ(j-1)}{k})\right)\times s\times k$

4. (1)正 k 邊形內接 n 階多角星面積 $=\dfrac{s^2k}{4}\times\left[\cot(\dfrac{180^\circ}{k})-\tan(\dfrac{180^\circ}{k}\cdot n)\right]$

(2)正 k 邊形外延 n 階多角星面積 $=\dfrac{\left[S(k,n)\right]^2 k}{4}\times\left[\cot(\dfrac{180^\circ}{k})-\tan(\dfrac{180^\circ}{k}\cdot n)\right]$，

其中 $S(k,n)=\left(\prod_{j=1}^{n}\sec(\dfrac{180^\circ(j+1)}{k})\cos(\dfrac{180^\circ(j)}{k})\right)\times s\times k$

陸、參考資料

[1] 小星星之旅－多邊形與多角星(2014)。新北市 102 學年度市科展作品。

[2] 物換星移 折折稱奇(2005)。全國中小學科展作品第 45 屆作品-國小組數學科。

[3] 發現「星」奧妙—正 n 邊形邊長延伸形成多角星之性質(2016)。
全國中小學科展作品第 56 屆作品-國小組數學科。