

中華民國第 61 屆中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：物理科

組 別：國小組

作品名稱：親愛的！泡泡怎麼變形了！

關鍵詞：泡泡、泡膜、表面張力

編 號：

目錄

摘要.....	1
壹、 研究動機.....	2
貳、 研究目的.....	2
參、 研究設備與器材.....	2
一、 研究器材.....	2
二、 研究設備.....	2
肆、 研究過程與方法.....	4
一、 文獻探討：.....	4
二、 研究方法.....	4
三、 研究架構圖.....	9
伍、 研究結果.....	9
陸、 討論.....	29
柒、 結論.....	30
捌、 參考文獻資料.....	30

親愛的！泡泡怎麼變形了！

摘要

本研究旨在探討過去未曾探究過各種不同立體形狀泡泡的形成，並細微地觀察泡泡間互相吸附、堆積的結構下，造成泡泡形狀的改變，以及它們的夾角和作用力平衡的關係。

本研究藉由不同形狀的立體框架，做出了正四面、六面、八面體、十二面體、正五角柱的泡泡。深入剖析立體多邊形泡泡膜的生成及其物理現象是否受到各項變因（模型大小、框架材質、框架直徑、傾角）的影響，及以不同多邊形內部泡膜是生成時的條件與限制分別為何？

為了探討表面張力及最小面積的關係，並以正六面體作研究。最後以 Excel 和數學軟體 Geogebra 進行分析，嚐試著找出泡膜結構中膜與膜夾角的特性、最小表面積和表面張力之間的相關性，透過數學論證方法協助提出實驗現象之解釋、應用與應用與展望。

關鍵詞：泡泡、泡膜、表面張力

壹、研究動機

腦海裡總是浮現出一幅幅溫馨幸福的畫面，情景是：有的父母陪著孩子踢球、有的父母陪著孩子追逐、有的父母陪著孩子玩滑梯，盪鞦韆，然而最能吸引小朋友目光與讓大小朋友樂開懷的莫過於玩泡泡了。看似平凡的泡泡有著神奇魔力能哄我不哭不鬧，至今天天陪伴著我洗香香，這是最放鬆的一刻。最初玩泡泡時，只會用吸管對著一碗肥皂水吹氣，不一會的功夫就能吹起一堆泡沫，令人無比地興奮，卻在不經意的瞬間看到，當泡泡堆積在一起之後，各接觸面會形成有趣的幾何圖形。

上學後，經老師的帶領仔細的觀察，發現了這些泡泡是具有不同形狀和大小的多面體，多面體的邊都不是筆直的直線，多少帶有一點點弧度；有的面有五條邊，有的面有六條邊，也有的只有四條甚至三條邊。形成規則的幾何圖形，不僅如此，我們發現我們看到的大自然現象中的蜂巢、晶體結構和肥皂泡泡堆積的形狀相似，與數學、物理間有什麼關係？我們一直很想進行詳細地分析。

我們在自然課學習到肥皂泡泡的薄膜因表面張力的作用會形成球形。但我們在吹泡泡的實驗中發現泡膜包圍著柱體模型，而在支架當中泡膜呈現出一種很不同的形狀結構，我們想了解泡泡是不是在不同形狀的支架中會有不同的結構呢？而大小會不會有影響呢？會不會有什麼出乎意料的現象產生呢？於是我們決定從泡泡的堆積和泡膜的形狀為主題，闡述其特殊現象並加以深入了解並實際驗證看看？

貳、研究目的

- 一、研究泡泡水配方與自製泡泡水。
- 二、探討二維泡泡和三維泡泡及泡膜與節點夾角的關係。
- 三、探討立體框架模型從泡泡水拉起的傾角對泡泡形成的影響。
- 四、探討立體框架模型材質對泡泡形成的影響。
- 五、探討立體框架模型框架大小對泡泡形成的影響。
- 六、探討立體框架模型邊框直徑粗細對泡泡形成的影響。
- 七、探討不同多邊形立體框架模型浸入泡泡水後對內部泡泡形狀的影響。
- 八、利用數學工具模擬、觀察和推測。

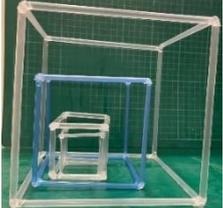
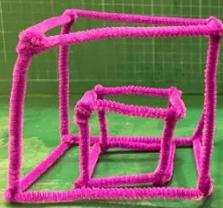
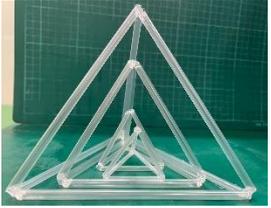
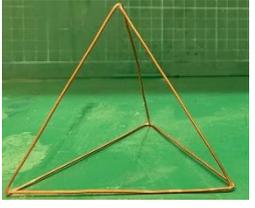
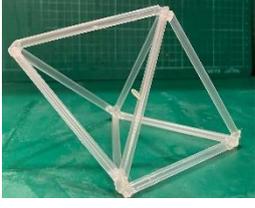
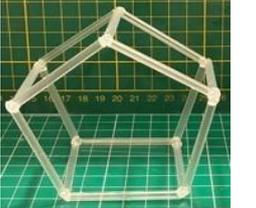
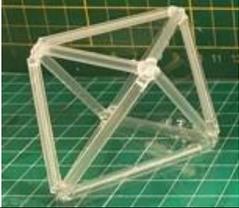
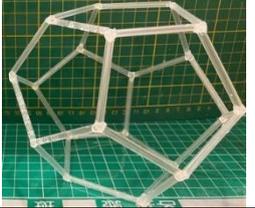
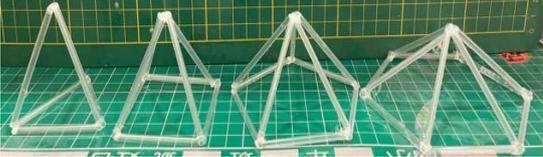
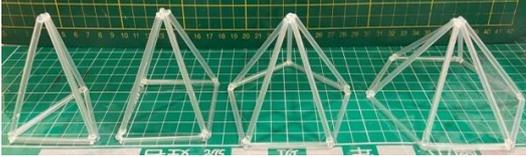
參、研究設備與器材

一、研究器材

- (一)、 溶液類：白蘭濃縮洗碗精、甘油、膠水、泰山 RO 純水。
- (二)、 工具類：量筒、燒杯、注射針筒、玻棒、保鮮膜、碼錶、培養皿、吸管、鐵絲、銅線、毛根、油性筆、標籤紙、滴管、水準儀自製平台、方格紙、護貝膠膜、玻璃片、旋風杯、計算機、圓規、直尺、電腦、數位相機、廚房紙巾、試管、試管架、試管刷、標籤紙、水族箱、起重機模型。

二、研究設備

(一)、邊長 4、5、10、15 公分正多邊形立體模型：三角錐(正四面體)、三角柱、四角錐、四角柱(正六面體)、六面體、五角錐、五角柱、六角錐、六角柱、正八面體、正十二面體、正二十面體、三十二面體(足球體)。

正四角柱(邊長 4、5、10、15cm)		正四角柱(邊長 10cm)	
			
材質-吸管	材質-銅線	材質-鐵絲-	材質-毛根
正三角錐(邊長 4、5、10、15cm)		三角錐(邊長 10cm)	
			
材質-吸管	材質-銅線 10cm	材質-鐵絲	材質-吸管
			
正三角柱(5cm)	六面體(5cm)	正五角柱(5cm)	正六角柱(5cm)
			
正八面體(5cm)	正十二面體(5cm)	正二十面體(5cm)	正三十二面體(5cm)
			
底邊長 5cm、高 5cm 三、四、五角椎		底邊長 5cm、高 6cm 三、四、五、六角椎	
			
底邊長 5cm、高 7cm 三、四、五、六角椎		底邊長 5cm、高 8cm 三、四、五、六角椎	

(二)、測量內部泡膜邊長、泡膜夾角(如圖 3-3)、將立體框架模型拉出傾角裝置(如圖 3-1 和圖 3-2)、觀察泡泡堆積的半球泡泡平台 (如圖 3-4)

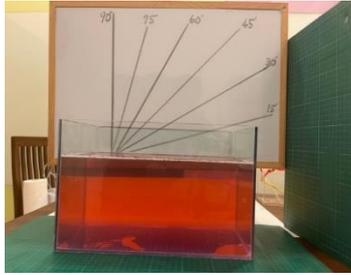


圖 3-1：在調配好泡泡水的水族箱側邊固定標記好角度的板子



圖 3-2：透過起重機沿著不同傾角拿出立體模型框架

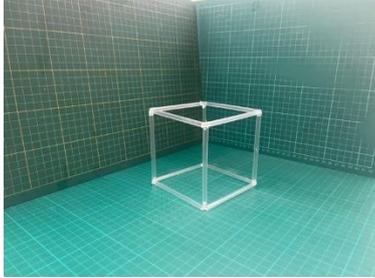


圖 3-3：測量內部泡膜邊長、泡膜夾角

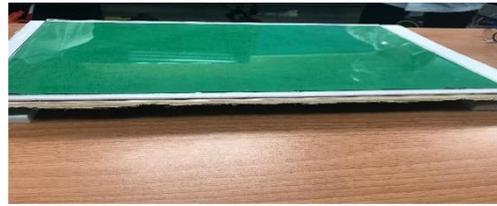


圖 3-4：半球泡泡平台-簡易的水平儀

肆、研究過程與方法

一、文獻探討：我們依據研究文獻及實際驗證結果，這次研究我們以價格便宜、方便取得為原則。

(一). 經文獻結果得知使用濃度為 20% 洗碗精與純水所調製的泡泡水配方，所吹出來的泡泡存活時間比較久。因此本實驗將採用洗碗精、甘油、膠水，當做我們的主要實驗材料，測試在相同濃度 20% 洗碗精泡泡水配方添加甘油之下，找到可在正多面體框架內部形成不同形狀的立體泡泡。

二、研究方法

(一). 研究目的一：研究泡泡水配方與自製泡泡水。

根據文獻探討，有關於泡泡水的配方心得，大略有以下四個主要成份：

1. 水：越純淨越好，蒸餾水、RO 水都可以，以 RO 水較易取得。
2. 起泡劑：一種界面活性劑，功能為降低水的表面張力，使得易於起泡，可以用沐浴乳、洗髮精、洗碗精、肥皂絲等，以洗碗精最便宜好用。
3. 保溼劑：泡泡形成後，由於水的蒸發，泡膜乾掉，泡泡就會破掉，保溼劑有助於延長水分蒸發。可用甘油、糖、酒精、尿素等。經實驗甘油效果較佳。
4. 薄膜劑：水溶性高分子，主要可以增強泡泡的強度，如膠水、明膠、阿拉伯膠等。經實驗加入膠水，的確可以延長泡泡不破的時間，但是泡泡破掉後，會形成白色膠狀殘留物，弄髒環境，所以不予考慮加入泡泡水配方中。

實驗步驟如下：

1. 用滴管及量筒量取不同份量的洗碗精和 RO 純水，依文獻結果使用按照體積百分比濃度的調配法洗碗精 4cc，RO 水 16cc 調出濃度為 20% 的泡泡水配方。
2. 依序進行將量好的甘油和泡泡水倒入旋風杯中攪拌均勻。
3. 將攪拌均勻的泡泡水配方倒入培養皿中靜置 3 分鐘。
4. 在方格紙上畫出直徑 3cm 的圓，並用膠膜護貝後備用。

- 將玻璃片平放在畫了圓的方格紙上，並用滴管從培養皿中取出適量泡泡水，滴在玻璃片上且塗抹均勻。
- 將水準儀放在自製平台上，並用螺絲起子調整平台的腳架，使平台維持水平(如圖 3-4)。
- 用 60ml 注射針筒打氣，在玻璃片上形成一個直徑 3cm 的半球形泡泡。(注意：打氣時，針頭斜缺口朝下，緩慢均勻的將推桿向內推，小心針頭，避免受傷)。
- 打好半球泡泡後，按下碼錶計時，測量半球泡泡的存活時間，重複十次並記錄，記錄後計算出平均值。
- 每次更換新的泡泡水配方前，必須將玻璃片清洗乾淨並擦乾備用。
- 使用後剩餘的泡泡水配方倒入試管中貼上標籤紙留存備用。

本實驗主要是延長泡泡存活時間以利後續實驗之觀察、記錄，因此，我們挑選了甘油為添加物，依文獻結果使用洗碗精 4cc，RO 水 16cc 的泡泡水配方當做實驗的原料，再設計實驗依序加入甘油，對泡泡存活時間的影響。

◎實驗一：不同甘油添加量對泡泡存活時間的影響。

控制變因	水質、泡泡水的配方(20%的洗碗精溶液)
操作變因	保溼劑-甘油的添加量(體積)
應變變因	泡泡存活的時間

實驗步驟如下：

- 泡泡存活時間最久的洗碗精 4cc，RO 水 16cc 中分別加入 1ml、2ml、3ml、4ml、5ml、6ml、7ml、8ml、9ml、10ml 的甘油。
- 將加入甘油的泡泡水溶液，一起倒入旋風杯中攪拌均勻。重複操作研究目的一的實驗步驟 4、6、7、8、9。

(二).研究目的二：探討二維泡泡和三維泡泡之泡膜與泡膜所圍成的形狀與泡膜彼此間節點夾角的關係。

◎實驗二：泡泡互相吸附時，泡膜與泡膜所圍成的形狀與彼此間節點夾角的關係。

控制變因	水質、相同配方的泡泡水、相同大小的泡泡、泡泡水體積。
操作變因	泡泡相互吸附時個數
應變變因	泡泡相互吸附所圍成的形狀及夾角

假設：泡泡彼此之間會相互吸附，相同大小泡泡吸附時會有規律性。

實驗步驟如下：

- 使用自調配出自製泡泡水。
- 在透明片上抹上均勻的泡泡水。
- 利用容量 60ml 注射筒吹出泡泡。
- 讓泡泡進行吸附。
- 使用腳架拍照並將泡泡與泡泡間所圍泡膜的界線描繪出來。
- 逐次增加泡泡數量觀察所圍成的形狀並量出泡泡相互吸附的夾角。

(三). 研究目的三：探討正立方體(正六面體)模型框架從泡泡水拉起的傾角對泡泡形成的影響。

在課堂的泡泡實驗中利用吸管内套毛根所做成的正六面體內部成功做出類正立方體泡泡(如圖 4-1)

我們不確定拉起時的角度是否會影響泡膜，我們將正立方體拉出水面時，正立方體對稱軸的高會與水平面有一個夾角，我們稱這個夾角為傾角，我們希望觀察出此傾角與形成內部方塊泡泡現象之關係。

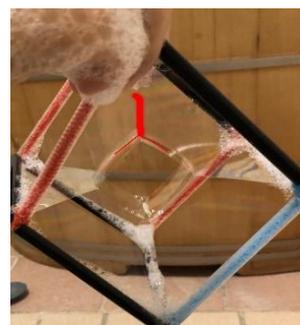


圖 4-1 正六面體內部形成立體泡

◎實驗三：改變不同的傾角（15°、30°、45°、60°、75°、90°）從泡泡水拉出正四面體、正立方體(正六面體)對泡泡形成的影響

控制變因	泡泡水的配方、邊長 10cm 的正四面體、邊長 10cm 的正立方體、浸泡時間、定速垂直拉出框架
操作變因	框架拉出泡泡水族箱液面時的角度(15°、30°、45°、60°、75°、90°)
應變變因	方塊泡泡是否能成形

實驗步驟如下：

1. 使用量角器測量角度後，在珍珠板上畫出固定角度，將此板固定在泡泡水族箱的側邊，角度依序有 15°、30°、45°、60°、75°、90°(如圖 3-1)。
2. 將邊長 10 公分正四面體、正立方體框架浸入已調配好泡泡水配方的水族箱中 3 分鐘。
3. 用肉眼檢視確認每面框架皆有泡膜附著在上，如圖 4-2。
4. 將正立方體框架利用起重機模型定速拉出泡泡水中(如圖 3-2b)。
5. 重複步驟 1-4 數次，觀察並拍照正四面體、正立方體內部是否形成方塊泡泡。
6. 使用紅色食用色素將泡泡水染色，方便肉眼檢視每面框架有泡膜沾附。

(四). 研究目的四：探討立體框架模型材質對泡泡形成影響。

我們探討利用不同材質的正立方體框架在內部形成立體方塊泡泡的關聯性。

◎實驗四：利用銅線、鐵絲、毛根、吸管四種材質的正立方體框對泡泡形成的影響

控制變因	邊長 10 公分正立方體框架、泡泡水配方、浸泡時間、定速垂直拉出框架
操作變因	不同材質的框架（銅線、鐵絲、毛根、吸管）
應變變因	方塊泡泡是否能成形

實驗步驟如下：

1. 使用銅線、鐵絲、毛根、吸管製作邊長 10 公分正立方體框架。
2. 將各種材質正立方體框架浸泡入調配好泡泡水配方中 3 分鐘。
3. 確認每面框架皆有泡膜附著在上，如圖 4-2。
4. 將正立方體框架利用起重機模型定速垂直拉出泡泡水中。
5. 重複步驟 1-4 數次，觀察並拍照正立方體內部是否形成泡泡。

確認每面框架均有泡膜吸附

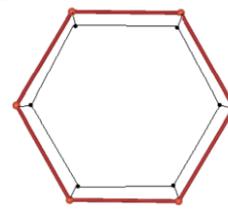
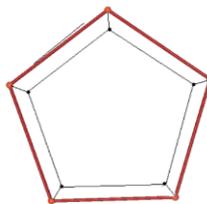
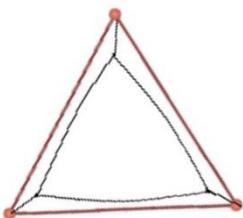
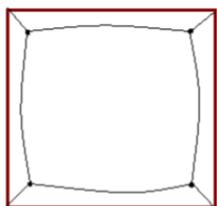


圖 4-2 正立方體

圖 4-3 正四面體

圖 4-4 五角柱

圖 4-5 六角柱

(五). 研究目的五：探討立體框架模型的大小對泡泡形成的影響。

探討利用不同邊長大小的立體框架內部分成立體方塊泡泡的關聯性。

◎實驗五：利用邊長 4、5、10、15 公分的立體框架模型對泡泡形成的影響。

控制變因	立體框架形狀、泡泡水配方、浸泡時間、定速垂直拉出框架
操作變因	邊長 4、5、10、15 公分的立體框架
應變變因	方塊泡泡是否能成形

實驗步驟如下：

1. 使用銅線、吸管製作邊長 4、5、10、15 公分立體框架模型。
2. 將各種大小正四面體、正立方體框架浸泡入已調配好泡泡水配方中 3 分鐘。
3. 確認每面框架皆有泡膜附著在上，如圖 4-2、圖 4-3。
4. 將立體框架利用起重機模型定速垂直拉出泡泡水中。
5. 重複步驟 1-4 數次，觀察並拍照正立方體內部是否形成泡泡。

(六). 研究目的六：探討立體框架模型邊框直徑粗細對泡泡形成的影響。

◎實驗六：改變邊框直徑大小不同（0.3cm、0.6cm、0.8cm）對泡泡形成的影響。

控制變因	邊長 10 公分立體框架、泡泡水配方、浸泡時間、定速垂直拉出框架
操作變因	邊框直徑大小不同（0.3cm、0.6cm、0.8cm）
應變變因	方塊泡泡是否能成形

實驗步驟如下：

1. 使用吸管直徑為 0.3cm、0.6cm、0.8cm，做成邊長 10cm 的正四面體與正六面體框架。
2. 將吸管直徑不同粗細所製成之邊長 10 公分正四面體、正六面體框架浸泡入已調配好泡泡水配方中 3 分鐘。
3. 確認每面框架皆有泡膜附著在上，如圖 4-1、圖 4-2。
4. 將正四面體、正六面體框架利用起重機模型定速垂直拉出泡泡水中。
5. 重複步驟 1-4 數次，觀察並拍照正四面體、正六面體框架內部是否形成泡泡。

(七).研究目的七：探討不同多邊形立體模型浸入泡泡水後對內部泡泡形狀的影響。

由文獻中我們知道要形成泡泡膜的條件，除了表面張力不能太大外，在空氣與液體之間必須形成穩定界面，且必須是「封閉區域」，如果立體框架是開放形狀，泡泡膜就無法產生。我們利用吸管做出各種形狀的多邊形立體模型觀察對內部泡泡形狀的影響。

◎實驗七：不同多邊形立體模型浸入泡泡水後對內部泡泡形狀的影響。

控制變因	邊長 5 公分立體框架、泡泡水配方、浸泡時間、定速垂直拉出框架
操作變因	多邊形立體模型
應變變因	方塊泡泡是否能成形

實驗步驟如下：

1. 製作出邊長 5 公分：三角錐(正四面體)、三角柱、四角錐、四角柱(正六面體)、六面體、五角錐、五角柱、六角錐、六角柱、正八面體、正十二面體、正二十面體、三十二面體(足球體)。
2. 將不同立體多邊形框架浸泡入已調配好泡泡水配方中 3 分鐘。
3. 確認每面框架皆有泡膜附著在上，如圖 4-2、圖 4-3、圖 4-4、圖 4-5。
4. 將不同立體多邊形框架利用起重機模型定速垂直拉出泡泡水中。
5. 重複步驟 1-4 數次，觀察並拍照不同立體多邊形框架內部形成泡泡形狀。

(八).研究目的八：利用數學工具模擬、觀察和推測。

1. 【普拉圖泡膜幾何通則】 由比利時科學家普拉圖(Joseph A. F. Plateau)提出：
 - (1). 附著在鐵絲框架(或其他封閉的結構體)上的泡膜，就有平滑的結構。
 - (2). 泡膜之間只會以下列兩種方式之一相連接：三個表面沿著一平滑曲線相連，或六個平面形成四條曲線在一個頂點相接。
 - (3). 以曲線或同一頂點相接的泡膜，其面與面之間夾角相等：三個表面相接時夾角為 120° ，六個表面相接時夾角約為 $109^\circ 28'$ (Maraldi angle)。
2. 根據表面能與表面張力的原理，泡膜的平衡型式建立在總表面積最小時的狀態。
3. 從研究目的三、四、五、六、七結果發現正立方體(正六面體)中所形成的方塊泡泡膜有時大有時小，而正立方體的每一個側面可獨立視為一個正方形，由此可解釋實驗所得的在表面張力和內聚力的作用下，薄膜表面積會呈現最小狀態，於是我們將研究鎖定了正立方體來研究。

實驗八中，本研究鎖定了正立方體來研究。

因此我們先測量中央正方形邊長。仿此陸續算出每一個正方形、四個三角形與八個梯形的面積和。所以本研究設計以下述之方法，並重複操作數次拍下實驗照片。

◎實驗八：探討正方體模型做出立體方塊泡泡

實驗步驟如下

1. 求出中央正方形邊長。
2. 計算中央正方形面積。
3. 討論中央正方形所在平面與相鄰兩平面夾角關係。

我們設計以下實驗裝置測量正立方體內類正方形的邊長與夾角(如表 4-1)。

表 4-1 測量正立方體(正六面體)內類正方形的邊長與夾角的實驗裝置

裝置圖片	測量泡泡膜邊長	測量泡泡膜夾角
		

三、 研究架構圖



伍、 研究結果

一、研究目的一：研究泡泡水配方與自製泡泡水。

◎實驗一：不同甘油添加量對泡泡存活時間的影響。

控制變因	水質、泡泡水的配方(20%的洗碗精溶液)
操作變因	保溼劑-甘油的添加量(體積)
應變變因	泡泡存活的時間

實驗結果如下表 5-1 所列：

表 5-1 不同甘油添加量對泡泡存活時間的影響。

洗碗精 4cc，RO 水 16cc 泡泡直徑：3cm 填充氣體：空氣 室溫											
甘油添加量 次數	泡泡存活時間(秒)										
	0ml	1ml	2ml	3ml	4ml	5ml	6ml	7ml	8ml	9ml	10ml
1	150	171	200	303	320	265	240	251	210	197	182
2	161	168	215	306	315	270	240	246	215	190	180
3	155	172	210	310	310	273	235	250	210	192	183
4	152	172	203	307	308	275	246	249	203	188	182
5	160	175	217	305	320	269	238	250	217	189	175
6	152	173	210	302	320	270	235	251	208	190	186
7	155	175	208	300	318	275	233	245	202	190	180
8	153	175	209	305	316	273	245	244	208	192	183
9	150	178	205	302	315	270	240	253	205	188	181
10	158	172	211	310	320	276	241	240	205	189	182
平均	154.6	173.1	208.8	305	316.2	271.6	239.3	247.9	208.3	190.5	181.4

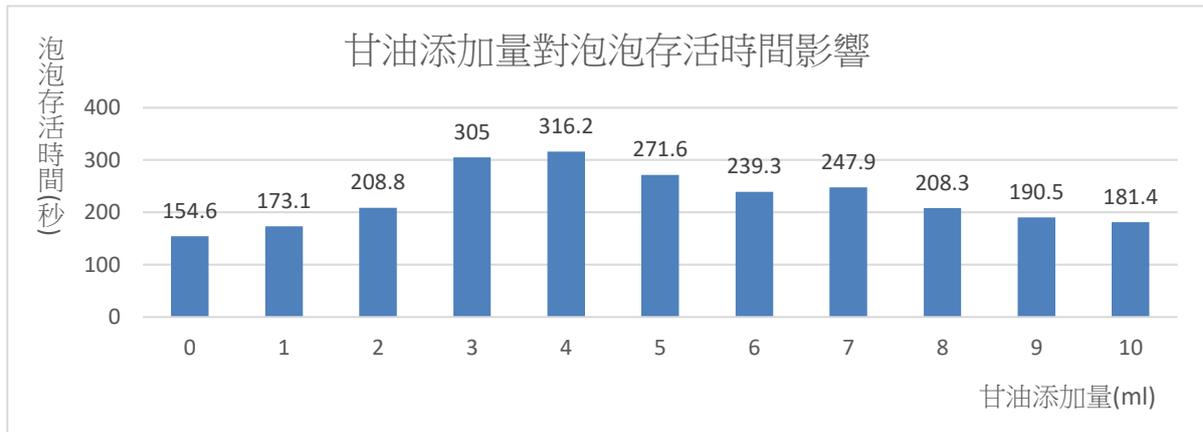


圖 5-1 甘油添加量對泡泡存活時間的影響關係圖。

結果與討論：

- (一). 因為甘油是一種保濕劑，可以減緩水分的蒸發，泡泡膜比較不容易乾掉。比較加入甘油前後的泡泡存活時間增加且泡泡數量變多，由實驗數據得知有增加，而且吹不出泡泡的次數變少。
- (二). 結果：綜合以上研究，獲知自製經濟、效果良好的泡泡水配方為：

RO 水：洗碗精：甘油 = 16：4：4

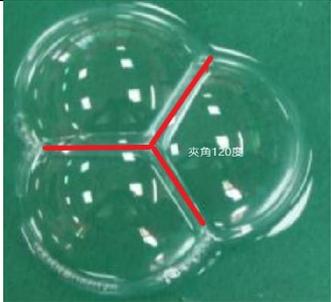
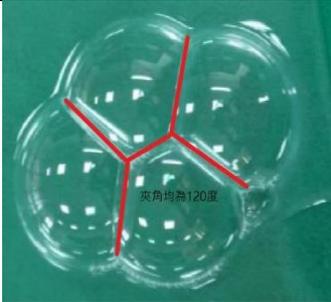
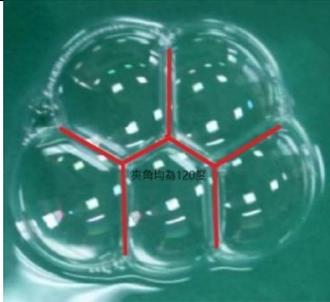
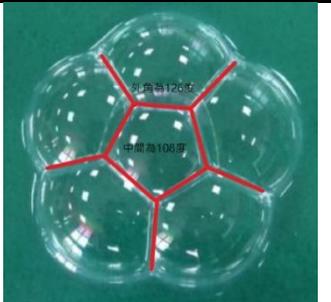
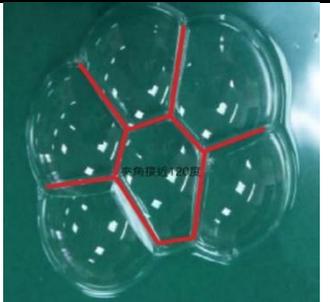
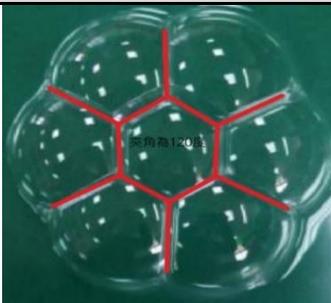
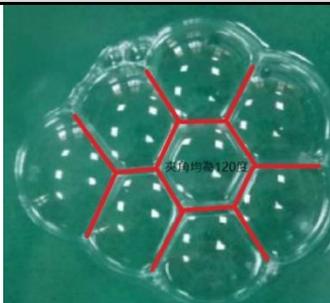
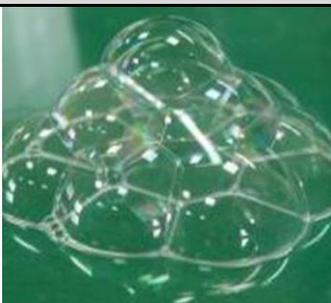
二、 研究目的二：探討二維泡泡和三維泡泡之泡膜與泡膜所圍成的形狀與泡膜彼此間節點夾角的關係。

◎實驗二：相同大小泡泡吸附時，泡膜的形狀及泡膜間的夾角。

控制變因	水質、相同配方的泡泡水、相同大小的泡泡、泡泡水體積。
操作變因	泡泡相互吸附時個數
應變變因	泡泡相互吸附所圍成的形狀及夾角

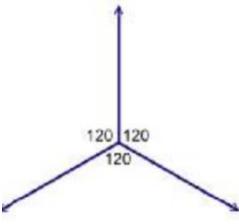
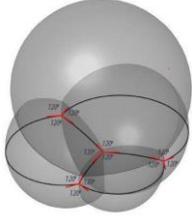
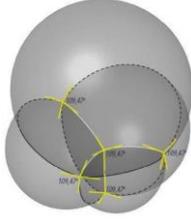
實驗結果如下表 5-2 所述：

表 5-2 二維相同大小泡泡薄膜與節點所形成的夾角

角度	泡泡吸附薄膜於節點所形成的夾角均為 120°		
編號	圖 A	圖 B	圖 C
泡泡互相吸附圖片			
個數	3 個泡泡(二維)	4 個泡泡(二維)	5 個泡泡(二維)
編號	圖 D	圖 E	圖 F
泡泡互相吸附圖片			
個數	6 個泡泡(二維)	6 個泡泡(二維)	6 個泡泡(二維)
編號	圖 G	圖 H	圖 I
泡泡互相吸附圖片			
個數	7 個泡泡(二維)	7 個泡泡(二維)	8 個泡泡(二維)
編號	圖 J	圖 K	圖 L
泡泡互相吸附圖片			
個數	四個泡泡(三維) 夾角 120 度	14 個泡泡(三維) 夾角 109 度	14 個泡泡(二維)

結果與討論：

- (一). 相同大小泡泡彼此吸附時，相鄰的兩個泡泡中間會有一條線，相鄰的三個泡泡會有一個點，泡泡之間形成的形狀就像一個個的蜂巢 (如表 5-2 編號 圖 H、I、J)，夾角都會非常接近 120 度，泡泡堆積下漸漸形成接近六角形泡泡’。
- (二). 二維泡泡薄膜與節點所形成交角接近 120°，可驗證泡泡互相吸附時因薄膜受表面張力作用且大小相等(如表 5-3)。根據普拉托定律，肥皂泡表面的交界一定是由三個表面相交構成的曲線，被稱為普拉托邊界，它們的交角為 120°(如表 5-2 編號 A-J 圖)。普拉托邊界之間相交一定是由四條邊界相交構成一個點，兩兩邊界交角為 109°(如表 5-2 編號 圖 K)，如下表 5-3 說明：表 5-3 多個泡泡的夾角示意圖

名稱	三面受表面張力大小相等	三個表面相交	四條邊界相交
泡膜 吸附 圖片			
夾角	120°	近 120°	109.47°

三、 研究目的三：探討立體框架模型從泡泡水拉起的傾角對泡泡形成的影響。

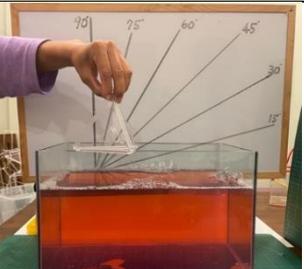
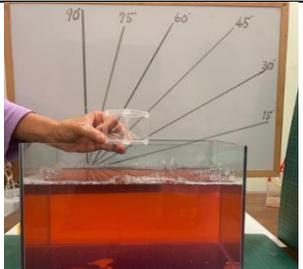
◎實驗三：改變不同的傾角（15°、30°、45°、60°、75°、90°）從泡泡水拉出正立方體（正六面體）對泡泡形成的影響

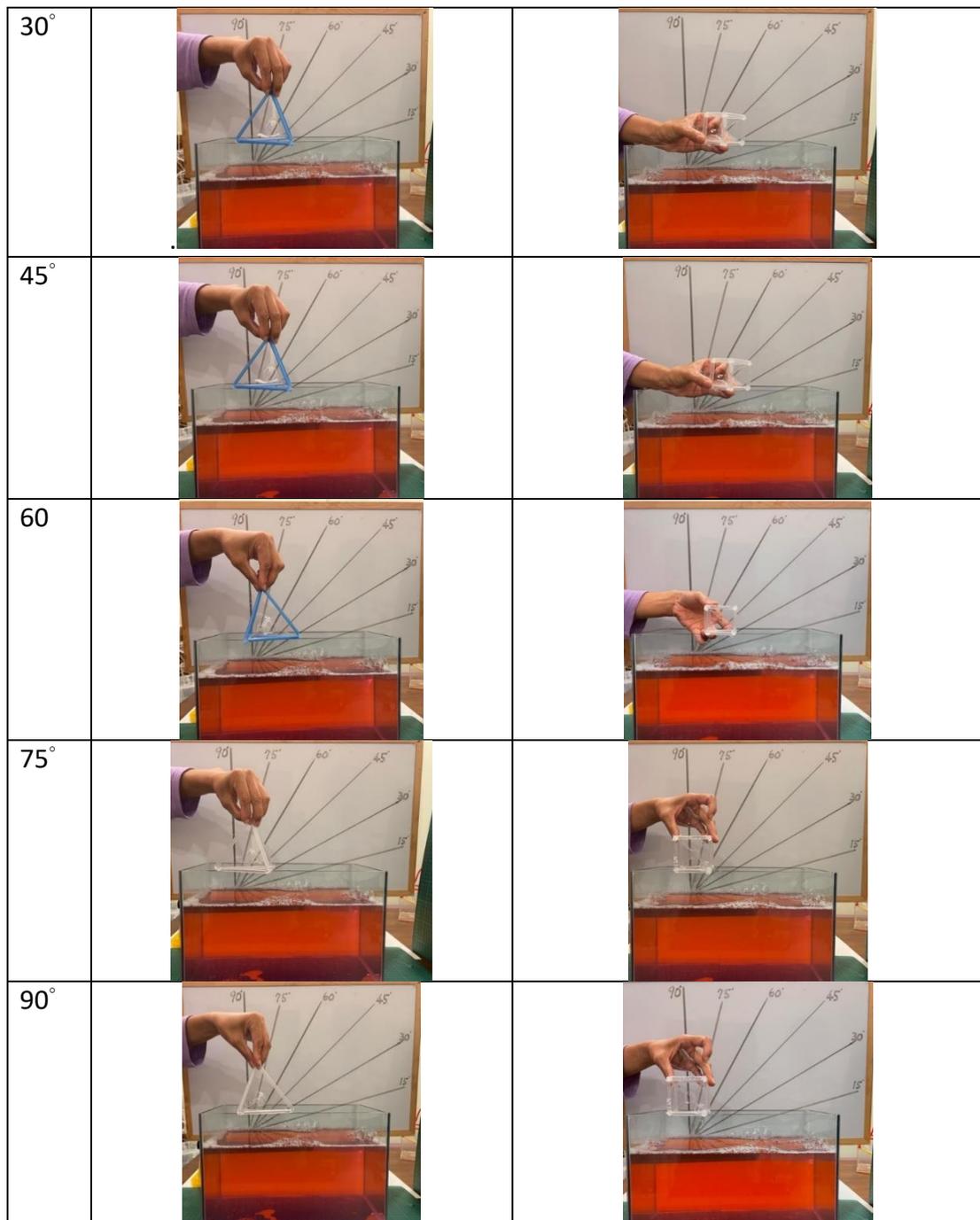
控制變因	泡泡水的配方、邊長 10cm 的正四面體、邊長 10cm 的正立方體(正六面體)、浸泡時間、定速垂直拉出框架
操作變因	框架拉出泡泡水族箱液面時的角度(15°、30°、45°、60°、75°、90°)
應變變因	方塊泡泡是否能成形

- 說明：因研究希望利用數學論證泡膜表面能平衡會形成最小表面積，我們以框架製作的方便性、較好操作、方便計算，先以 10 公分的邊長的框架來進行實驗。

實驗結果如下表 5-4 所列：

表 5-4：改變不同的傾角（15°、30°、45°、60°、75°、90°）從泡泡水拉出立體框架對泡泡形成的影響

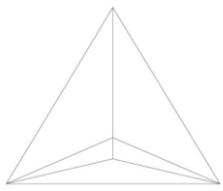
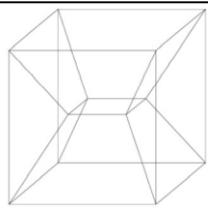
傾角	正四面體	正立方體(正六面體)
15°		



結果與討論：

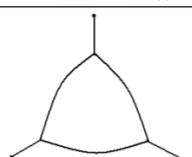
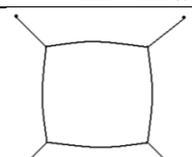
- (一). 在實驗的觀察中，正立方體模型框架從泡泡水由不同的傾角拉出似乎不影響正立方體中央方塊泡泡的形成。這次我們加入了正四面體，我們發現內部同樣會形成一個類似四面體的泡泡(如表 5-5)。
- (二). 因為從泡泡水拉出的傾角不影響正四面體、立體框架內部形成泡泡，接下來的實驗都以鉛直的角度拉出立體框架模型。
- (三). 我們發現正四面體、正六面體的泡膜向外微微彎曲，且曲度為正三角形 > 正四邊形，泡膜在建構圖形時，每兩相交線段夾角必為 $109^{\circ}28'(\theta)$ 。

表 5-5 正四面體、正六面體內部形成立體泡泡說明

正四面體	正立方體(正六面體)
	
<ol style="list-style-type: none"> 1.在四面體內部形成六個泡膜 2.泡膜的中心點也是正四面體的中心點。 3.泡膜的中心點形成三個平面共線、三點共線。 4.在中心點打入空氣，中心點就會形成類似四面體的泡泡。 	<ol style="list-style-type: none"> 1.在正立方體中央形成一個正方形平面泡膜，平行於上下底邊。 2.泡膜中心點也在正立方體中心點。 3.在中央正方形打入空氣，中心就會形成類正立方體氣泡。 4.具有上下對稱的形狀，所以內部所產生的泡泡膜多具有上下左右的對稱性。

(四). 我們發現每一次的實驗立體框架內部形成大小不一的立體泡泡。內部泡泡的邊並非直線，而是有一點弧形，如下表 5-6。

表 5-6 正四面體、正六面體內部形成泡泡簡圖及說明

形狀	正四面體	正六面體
內部形成立體泡泡簡圖		
說明	正三角形內角為 60° ，遠小於 θ ，故泡膜須大幅向外彎曲，使兩線段的夾角達到 $109^\circ 28'$ ，才能建立平衡的薄膜結構。	正方形的內角為 90° ，小於 θ ，故泡膜仍須向外彎曲，以取得平衡。不過因為角度差距較正三角錐小，故曲度也小於正三角柱。

四、研究目的四：探討正立方體(正六面體)模型框架材質對泡泡形成的影響。

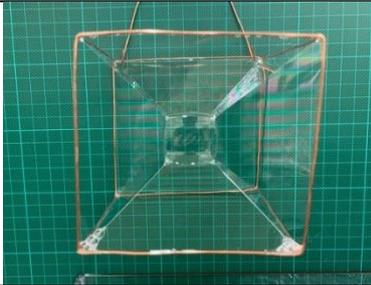
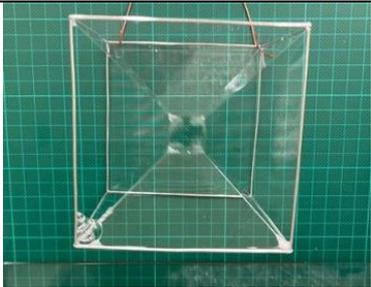
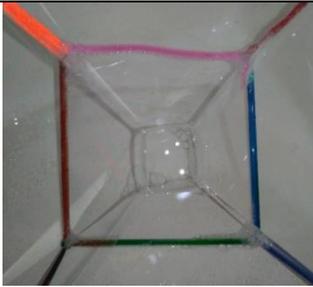
◎實驗四：利用銅線、鐵絲、毛根、吸管四種材質的正立方體對泡泡形成的影響

控制變因	邊長 10 公分正立方體(正六面體)框架、泡泡水配方、浸泡時間、定速垂直拉出框架
操作變因	不同材質的框架(銅線、鐵絲、毛根、吸管)
應變變因	方塊泡泡是否能成形

➤ 說明：因研究希望利用數學論證泡膜表面能平衡會形成最小表面積，我們以框架製作的方便性、較好操作、方便計算，以 10 公分的邊長的框架來進行實驗。

實驗結果如表 5-7 所列：

表 5-7 銅線、鐵絲、毛根、吸管四種材質的正立方體(正六面體)對形成的泡泡

材質	銅線	吸管
內部形成方塊泡泡照片		
材質	鐵絲	毛根
內部形成方塊泡泡照片		

結果與討論：

- (一). 在實驗的觀察中，正立方體框架的**材質似乎不影響**正立方體中央方塊泡泡的形成。每一次的實驗框架內部會形成大小不一的中央正方形，類正方形的邊並非直線，而是有一點弧形。
- (二). 由於 DIY 製作立體模型浸泡在溶液中很快就壞了，後續的實驗以便宜又方便取得為原則，**選擇以吸管製作**立體框架模型。

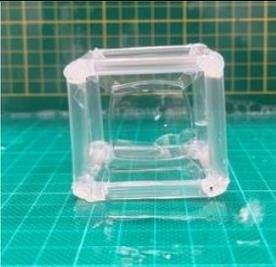
五、研究目的五：探討正立方體模型框架的大小對泡泡形成的影響。

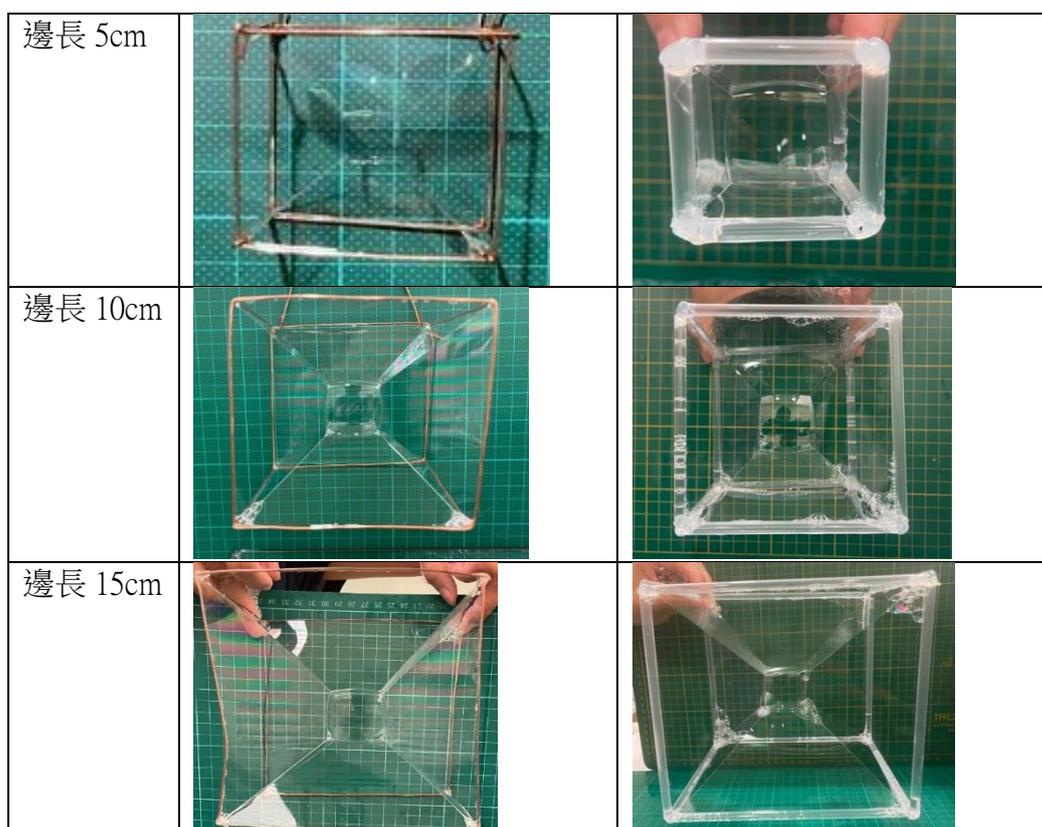
◎實驗五：利用邊長 4、5、10、15 公分的正立方體對泡泡形成的影響

控制變因	立體框架形狀、泡泡水配方、浸泡時間、定速垂直拉出框架
操作變因	邊長 4、5、10、15 公分的立體框架
應變變因	方塊泡泡是否能成形

實驗結果如表 5-8 所列：

表 5-8 邊長 4、5、10、15 公分的正立方體對泡泡形成的影響

邊長長度	材質(銅線)	材質(吸管)
邊長 4cm		



結果與討論：

- (一). 在實驗的觀察中，正立方體框架的**大小似乎不影響**類正立方體中央方塊泡泡的形成。框架內部形成大小不一的中央類正方形，內部方塊泡泡類正方形的邊並非直線，而是有一點弧形。
- (二). 我們接下來的實驗都**以邊長 10 公分**的立體框架進行實驗，在研究目的七不同多邊形立體框架因為考慮多面體的大小我們以邊長 5 公分來製作多面體框架。
- (三). 根據表面張力的規律，系統能量會傾向於最小化，泡泡膜會傾向於形成具有最小表面積之形狀，所以泡泡膜的**形成與最小表面積有關**，我們希望透過計算立體框架泡膜的總表面積是是否趨於最小化，為了框架製作的方便性、較好操作、方便計算，後續的實驗我們選擇**以 10 公分的邊長的框架來進行實驗。**
- (四).

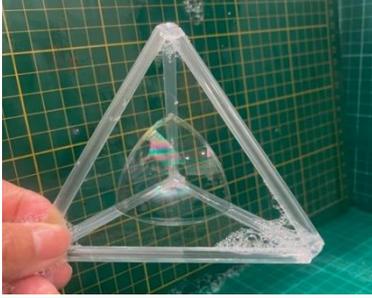
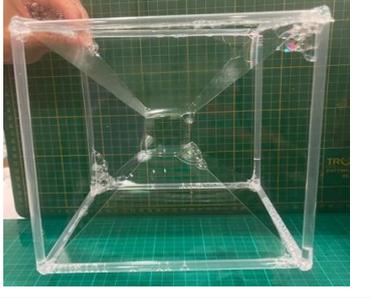
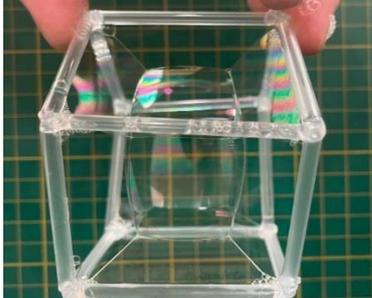
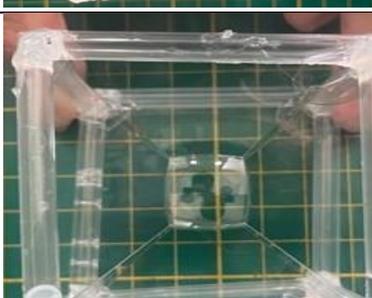
六、 研究目的六：探討探討立體框架模型邊框直徑粗細對泡泡形成的影響

◎實驗六：改變邊框直徑大小不同（0.3cm、0.6cm、0.8cm）從泡泡水拉出正四面體、正立方體(正六面體)對泡泡形成的影響。

控制變因	邊長 10 公分立體框架、泡泡水配方、浸泡時間、定速垂直拉出框架
操作變因	邊框直徑大小不同（0.3cm、0.6cm、0.8cm）
應變變因	方塊泡泡是否能成形

實驗結果如表 5-9 所列：

◎表 5-9：改變邊框直徑大小不同（0.3cm、0.6cm、0.8cm）從泡泡水鉛直拉出正四面體、正立方體對泡泡形成的影響

直徑	正四面體	正立方體(正六面體)
0.3cm		
0.6cm		
0.8cm		

結果與討論：

- (一). 在實驗的觀察中，正立方體模型框架直徑粗細不同似乎不影響正立方體中央方塊泡泡的形成；正四面體內部形成一個類似四面體的泡泡，類正方體、類四面體的邊非直線，而是有一點弧形。
- (二). 後續實驗我們以便宜且較好操作為原則選擇直徑為 0.3cm 的吸管來製作立體框架。

七、研究目的七：探討不同多邊形立體模型浸入泡泡水後對內部泡泡形狀的影響。

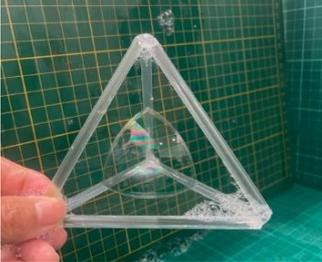
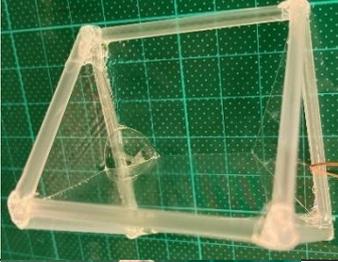
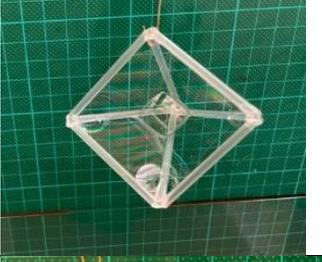
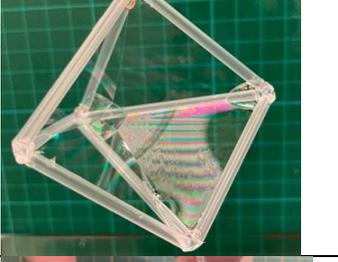
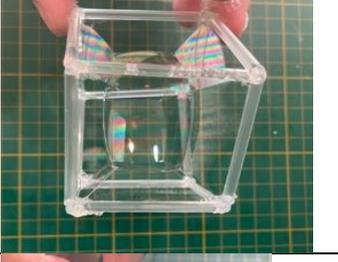
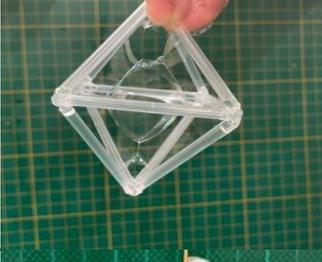
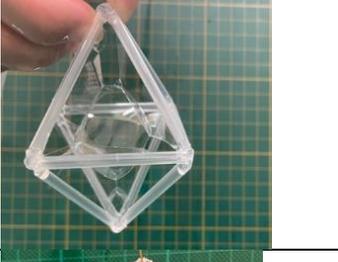
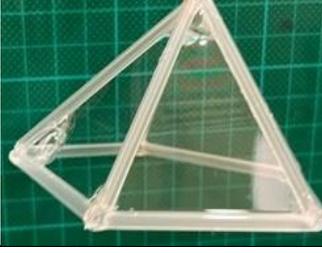
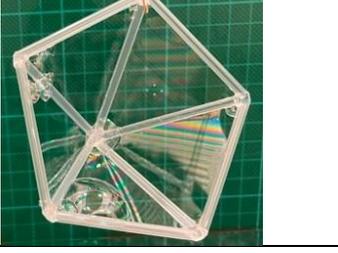
◎實驗七：不同多邊形立體模型浸入泡泡水後對內部泡泡形狀的影響。

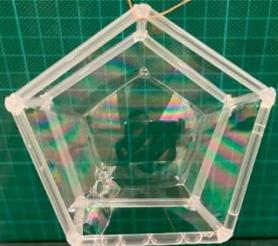
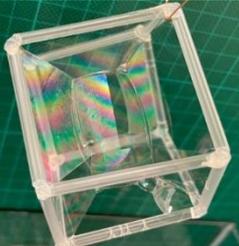
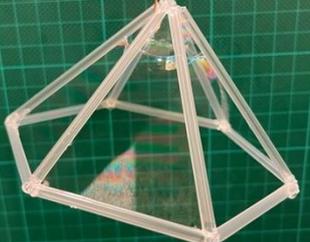
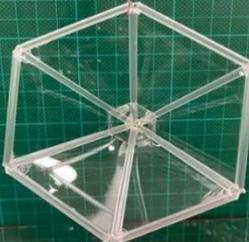
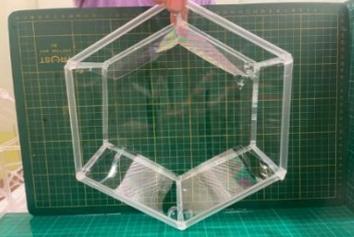
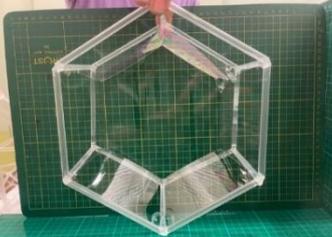
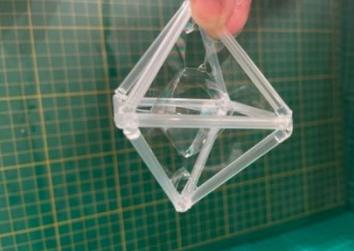
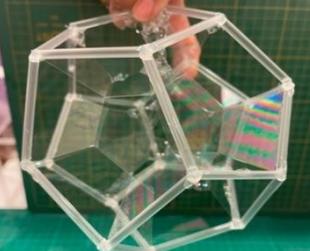
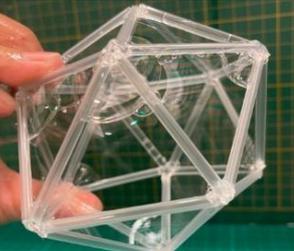
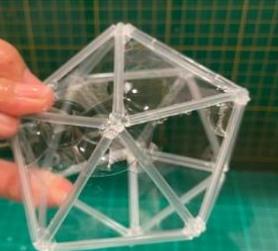
實驗步驟如下：

控制變因	邊長 5 公分立體框架、泡泡水配方、浸泡時間、定速垂直拉出框架
操作變因	多邊形立體模型
應變變因	框架內部泡泡是否能成形

實驗結果如表 5-10 所列：

◎表 5-10：不同多邊形立體模型浸入泡泡水後對內部泡泡形狀的影響

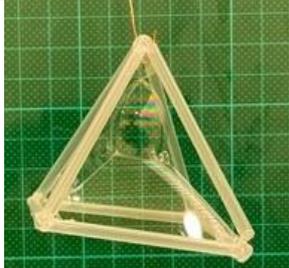
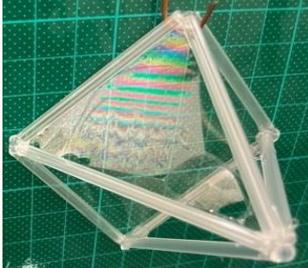
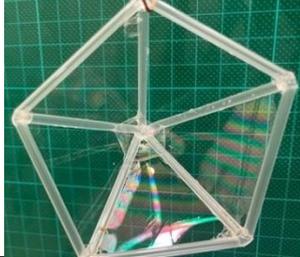
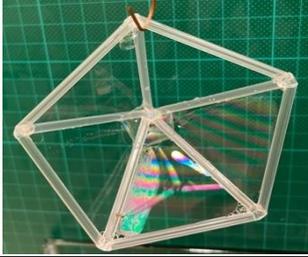
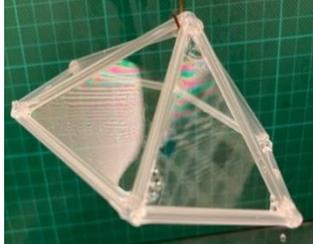
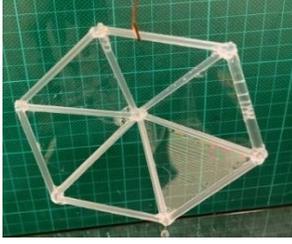
立體模型名稱	不同多邊形立體模型泡泡膜形狀照片(邊長 5 公分)	
三角錐(正四面體)		
三角柱		
四角錐		
四角柱(正六面體)		
六面體		
五角錐		

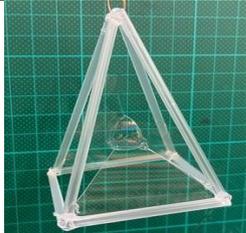
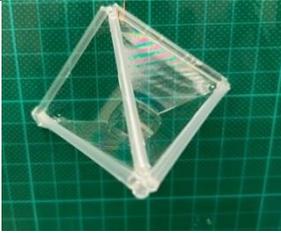
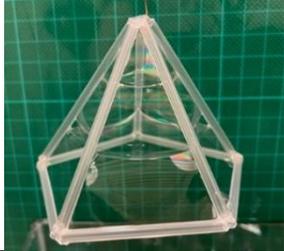
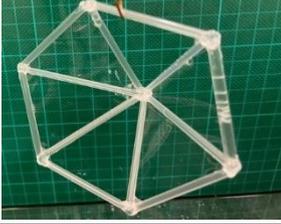
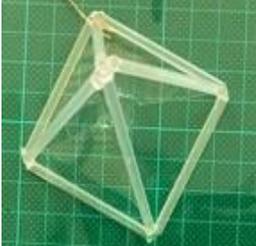
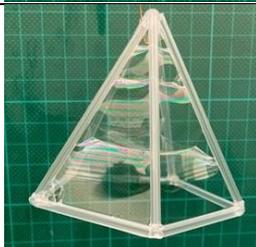
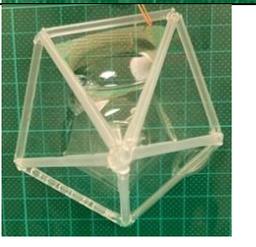
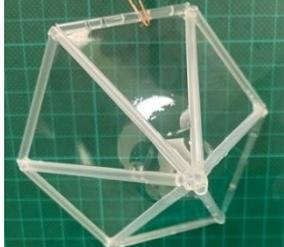
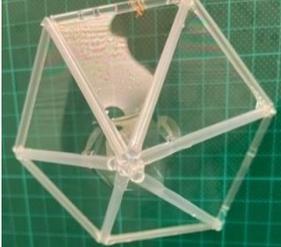
五角柱		
六角錐 (底邊：5cm、 高：6cm)		
六角柱		
正八面體		
正十二面體		
正二十面體		
三十二面體 (足球體)		

結果與討論：

- (一). 經實驗後發現，五角椎、六角椎因邊長一樣長，角錐的高度低於 2 公分，無法成功作出立體框架無法拉出泡泡膜。因此我們想如果製作不同高度角錐，角錐框架內部是否會出現不同的變化，各立體模型浸入泡泡水後所形成的形狀如下表 5-11：

表 5-11 改變邊長長度的角錐浸入泡泡水後對內部泡泡形狀的影響

立體模型名稱	角錐立體模型泡泡膜形狀照片 (底邊邊長 5 cm)	
側邊長度	側邊邊長為 6 公分	
三角錐 (正四面體)		
四角錐		
五角錐		
六角錐		
側邊長度	側邊邊長為 7 公分	
三角錐 (正四面體)		

四角椎				
五角椎				
六角椎				
側邊長度	側邊邊長為 8 公分			
三角錐 (正四面體)				
四角椎				
五角椎				
六角椎				

- 增加角錐高度後，三角錐、四角椎可以成功形成內部的立體泡泡，五角椎、六角椎無法形成內部立體泡泡。

(二). 本研究發現到泡泡膜的形成本須是在一封閉區域，如正四面體、正四角柱(正六面體)、正五角柱、正六角柱、正八面體、正十二面體的立體模型是一個對稱且封閉的圖框，所以可以在框架內部組成多樣式的立體泡泡膜。

(三). 正多邊形立體框架模型(正二十面體、正三十二面體)則會隨著面體越來越多，泡膜只在框架表面形成，內部無法形成立體泡泡膜。

(四). 我們在研究結果正五角柱的泡膜邊緣為近乎於直線，沒有曲度；正三角柱、正四角柱的泡膜向外微微彎曲，且曲度為正三角形 > 正四邊形；正六角柱的泡膜則是微微內凹。泡膜在建構圖形時(如圖 5-2)，每兩相交線段夾角必為 $109^{\circ}28'(\theta)$ ，依此分析，條列如下：

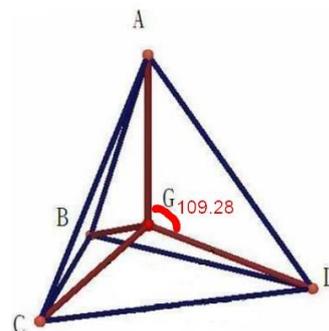


圖 5-2 正四面體泡膜的夾角

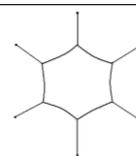
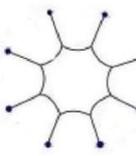
- ①正四面體：正三角形內角為 60° ，遠小於 θ ，故泡膜須大幅向外彎曲，使兩線段的夾角達到 $109^{\circ}28'$ ，才能建立平衡的薄膜結構。
- ②正四角柱(正六面體)：正方形的內角為 90° ，小於 θ ，故泡膜仍須向外彎曲，以取得平衡。不過因為角度差距較正四面體小，故曲度也小於正四面體。
- ③正五角柱：正五邊形的內角為 108° ，和 θ 差距甚小，故觀察到泡膜邊緣近乎於直線。
- ④正六角柱：正六邊形的內角為 120° ，略大於 θ ，故泡膜須向內彎曲以縮小角度，可觀察到泡膜邊緣微微內凹。

(五). 肥皂泡膜的表面張力能將表面積縮為最小，當面積在可能範圍內變成最小，因為內外壓力平衡而決定了膜的形狀。肥皂泡內部的空氣體積一定時，為了讓表面積最小，可以形成立體泡泡，如下表 5-11 整理：

- 氣室內空氣的氣壓作用於接觸面的泡膜所形成的作用力 = 大氣壓力作用於泡膜(薄膜)各個接觸面上所形成的合力 + 薄膜向內的收縮力

表 5-11 正多面體泡沫內外壓力平衡時，泡膜所形成的形狀

多面體名稱	面數	內部形成泡泡	泡膜邊緣彎曲的簡圖	泡膜邊緣
正四面體	四	四面體		外凹
正六面體(正四角柱)	六	立體方塊泡泡		外凹
正五角柱	七	五角柱		接近直線

正八面體	八	外凹的立體窩形		外凹
(正六角柱)	八	內凹六角柱		內凹
正八角柱	十	內凹八角柱		內凹
正十二面體	十二	內凹 1 十二面體		
正二十面體	二十	無法形成內部立體泡泡		
正三十二面體	三十二	無法形成內部立體泡泡		

八.研究目的八：利用數學工具模擬、觀察和推測。

根據表面能與表面張力的原理，泡膜的平衡型式建立在總表面積最小時的狀態。正立方體的每一個側面可獨立視為一個正方形，在表面張力和內聚力的作用下，薄膜表面積會呈現最小狀態。

實驗過程中發現，泡膜不會以圖形的費瑪點(如圖 5-3，兩對角線的交點:P)為節點，取而代之的是以另兩個節點(S,T)建構出平衡薄膜型式，此二點分別是△APB 及△CPD 的費瑪點。利用最小表面積的想法解釋此現象

例：邊長為 1 的正方形中(如圖 5-3)

以費瑪點 P 為節點所得之總長為 $2\sqrt{2}$

而以 S、T 為節點所得之總長為

$$\frac{4}{\sqrt{3}} + 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) = 1 + \sqrt{3} < 2\sqrt{2}$$

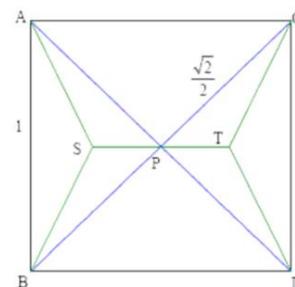


圖 5-3 正立方體側面正方形

由上推導，泡膜在四邊形中，以費瑪點 P 為節點的表面積大於以 S、T 為節點的表面積，為使表面積達降到最低，泡膜結構選擇後者做為平衡薄膜型式。故正立方體側面正方形的薄膜是由兩片梯形、兩片三角形組成的。

◎實驗七：探討正立方體(正六面體)模型做出立體方塊泡泡泡膜的邊長、總表面積、夾角

實驗步驟如下

1. 求出中央正方形邊長。
2. 計算中央正方形面積。
3. 討論中央正方形所在平面與相鄰兩平面夾角關係。

根據實驗八的研究目的在探討正立方體(正六面體)模型做出立體方塊泡泡膜的邊長、總表面積、夾角，茲將其結果分述如下：

(一) 求出中央正方形邊長。

首先我們求出中央正方形邊長，正方形是泡膜形成，所以不易測邊長，我們利用照片上正方形的邊長長度與泡膜長度比例與實際正方體邊長 10 公分與實際泡膜長度比例相同利用 excel 直接進行計算。

研究設計方法如下：

測量公式：實際泡膜邊長(X)/正方形邊長(10)=相片泡膜邊長(a)/相片正方體邊長(b)

我們每次測量重複十次，實際得到結果如下表 5-12 所述：

表 5-12 中央正方形邊長 (單位：公分)

次數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
邊長	0.69	0.76	0.81	0.83	0.73	0.88	0.69	0.86	0.76	0.78

(二) 計算正立方體(正六面體)泡膜總表面積

在以下的研究中，我們考慮邊長為 1 單位的正立方體(正六面體)，將中央正方形的邊長設為 x ，我們可以定義總面積和： $f(x)$

中央正方形面積： x^2

三角形面積： $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}(1-x)}{2}$

梯形的面積： $\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-x}{2}\right)^2}$

總表面積和 $f(x)$ = 中央正方形面積 + 8 個梯形面積 + 4 個三角形面積

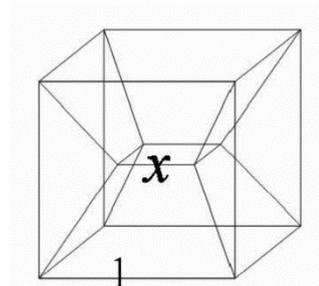


圖 5-4 正立方體內部結構

$$f(x) = x^2 + 8 \times \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-x}{2}\right)^2} + 4 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}(1-x)}{2}$$

$$\text{總面積和：} f(x) = x^2 + 2(x+1)\sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{2}(1-x)$$

所以我們利用了數學軟體 Geogebra 模擬，從 0 測試到 1 來改變 x 的值，來觀察面積和，因為當面積為最小時，能量會最穩定，我們設計了軟體模擬，改變 x 的值，來觀察面積和，因為當面積為最小時，能量會最穩定，所以我們想先求出 x 的最小值。當然如果換算成邊長為 $10x$ 公分的正立方體(正六面體)模型時，中央正方形的邊長為 10 公分，面積和為 $100 f(x) \text{ cm}^2$

$f(x)$ = 中央正方形面積 + 8 個梯形面積 + 4 個三角形面積

1. 當 $x = 0$ 時， $f(0) = 4.24$

$$f(0) = 0 + 2.83 + 1.41 = 4.24$$

2. 當 $x = 0.19$ ， $f(0) = 4.24$

$$f(0) = 0 + 3.06 + 1.15 = 4.24$$

我們發現從 $x=0$ 到 $x=0.19$ ，面積既然都沒改變，所以我們考慮增加有效數字，當有效數字增加到小數點後 5 位時，其實函數值都沒改變。

我們透過數學模擬後發現，發現當 $x=0.07291$ 時， $f(x)$ 有最小值 4.242539(如圖 5-5)。

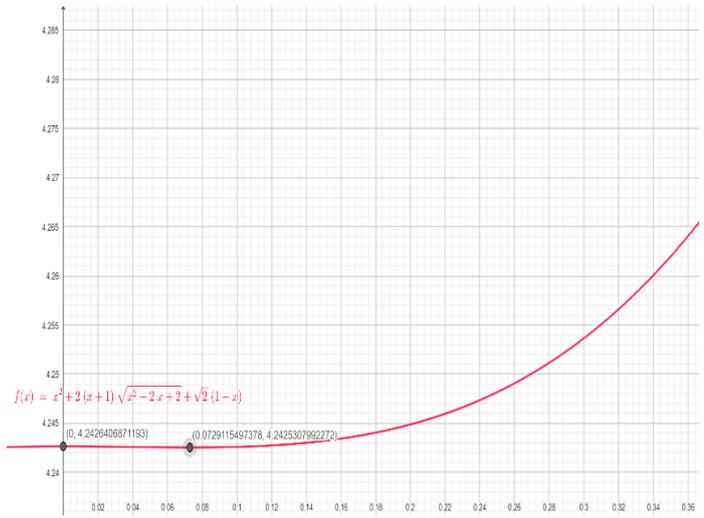
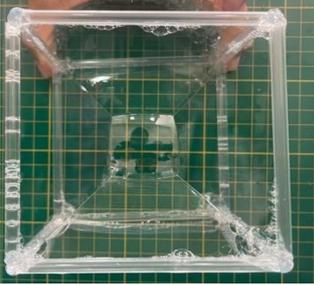
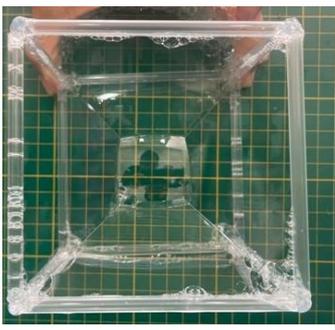
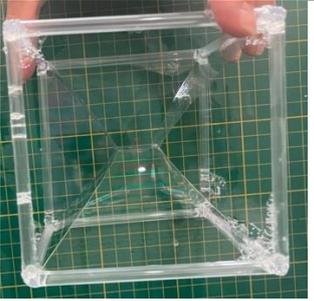
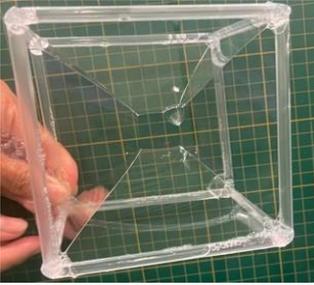
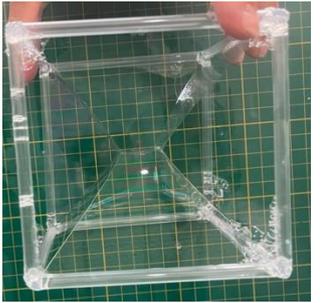
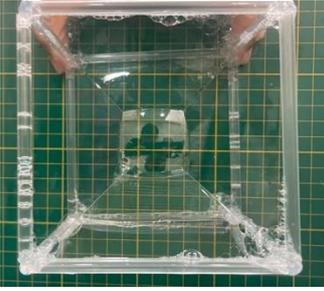
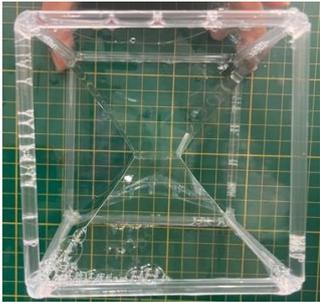
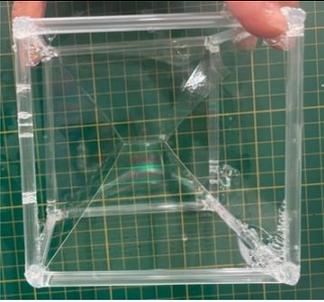
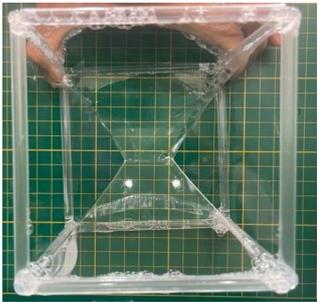


圖 5-5 當 $x=0$ 時， $f(0)=4.24264$
當 $x=0.07291$ 時， $f(x)$ 有最小值

我們把利用繪圖軟體所測得中央正方形的邊長，代入上述面積公式 $f(x) = x^2 + 2(x+1)\sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{2}(1-x)$ 將運用函數計算而得的面積，其數據整理製作成如表 5-13 所列：

表 5-13 類正方形泡膜的邊長與總表面積

次數	泡膜圖片	邊長 (cm)	總表面積 (cm ²)	次數	泡膜圖片	邊長 (cm)	總表面積 (cm ²)
1		0.69	424.25	6		0.88	424.25
2		0.84	424.25	7		0.69	424.25
3		0.81	424.25	8		0.86	424.25

4		0.83	424.25	9		0.76	424.25
5		0.73	424.25	10		0.78	424.25

結果與討論

- 1.在實驗三、四、五、六實驗中，在室溫下所使用相同泡泡水配方溶液,不同的直徑,大小,材質都不會影響正立方體方框所能形成的內部泡泡。
- 2.經電腦模擬後發現，原來在 $x = 0.0644$ 到 $x = 0.08076$ 時，都發生最小面積，透過不同的邊框變因，中央的類正方形它可能就會有不同的邊長。而且正立方體模型在抽出泡泡水溶液所形成的泡膜的總表面積在小數第二位計算下幾乎相同(如圖 5-6、圖 5-7)。
- 3.在表面張力和內聚力的作用下，薄膜表面積會呈現最小狀態，由此可解釋實驗所得的在表面張力和內聚力的作用下，薄膜表面積會呈現最小狀態。

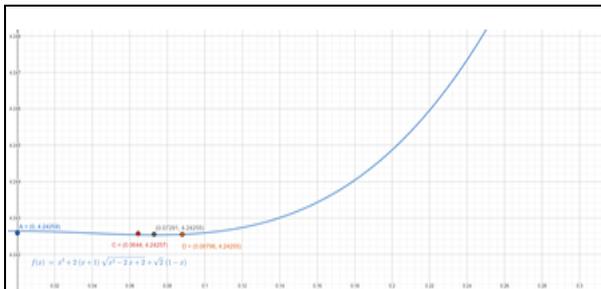


圖 5-6 數學函數圖 $f(x)$ 在 $x = 0.0644$ 到 $x = 0.08076$ 有最小值 4.24253

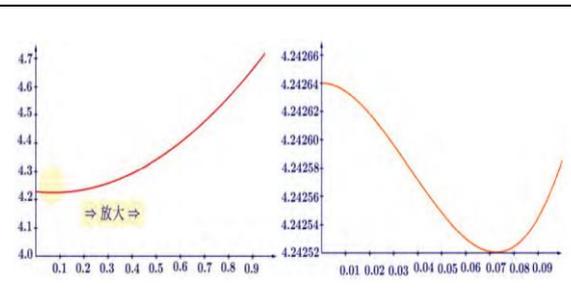


圖 5-7 數學函數放大圖 $f(x)$ 在 $x = 0.0644$ 到 $x = 0.08076$ 有最小值 4.24253

(三).討論中央正方形所在平面與相鄰兩平面夾角關係

事實上兩個梯形與相鄰正方形所在平面並不是成兩兩相交成為 120° 。我們知道三力共點平衡時，兩兩相交成為 120° ，而且類正方形的邊並非直線，而是有一點弧形，其結果如下表 5-14 說明泡膜示意圖與表 5-15 表面張力的力圖分析

表 5-14 說明泡膜示意圖

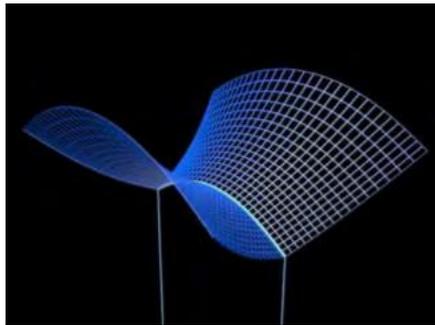
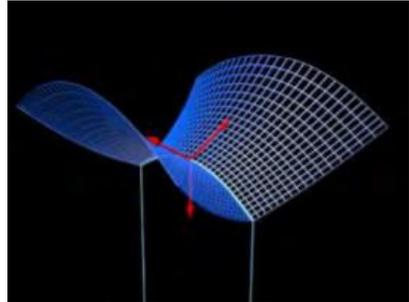
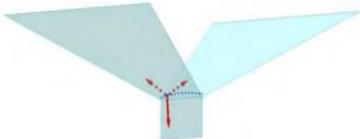
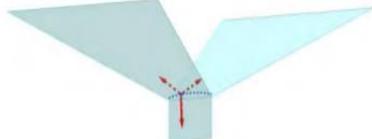
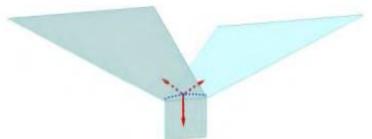
示意圖		
說明	為了達到力平衡，中央正方形的邊會被拉高，變成一個弧	達到力平衡，共點的三力兩兩成 120

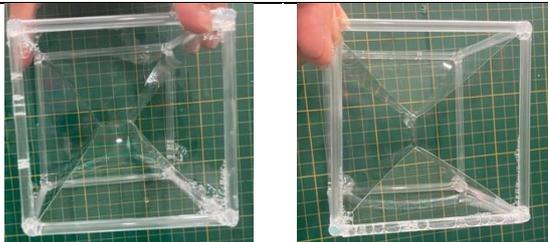
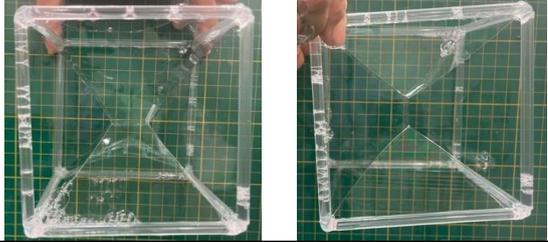
表 5-15 表面張力的力圖分析

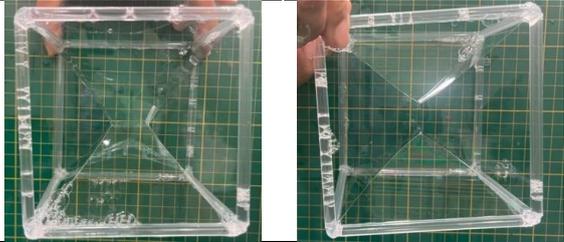
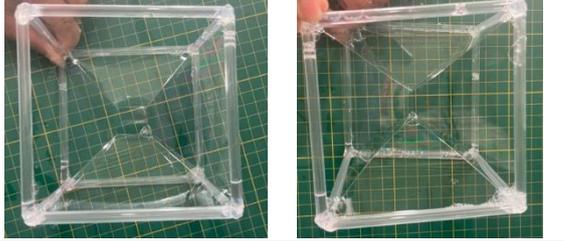
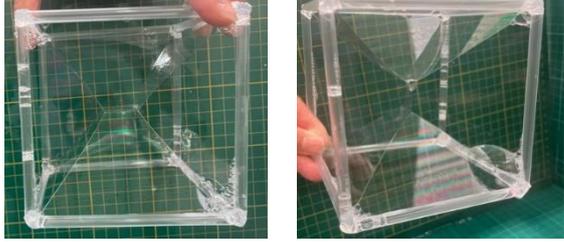
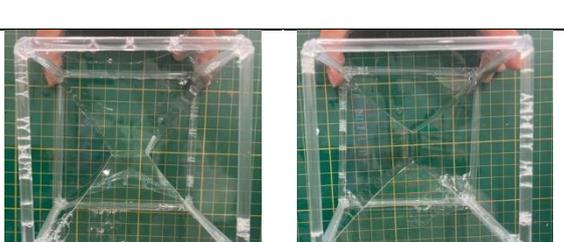
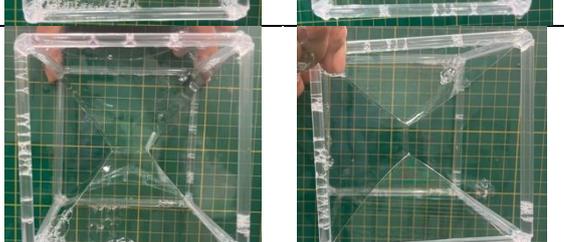
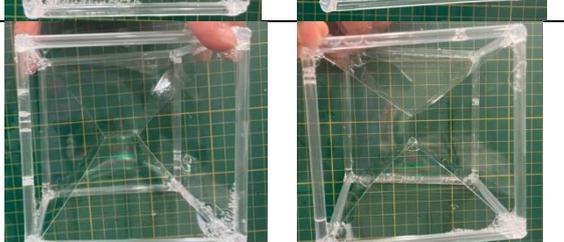
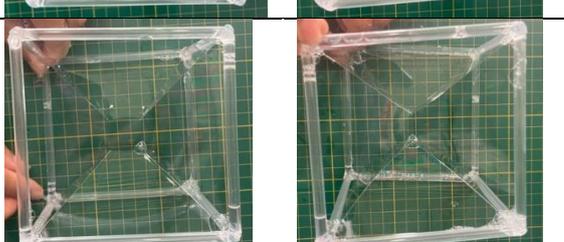
位置	靠近頂點處	頂點與中點間	邊緣中點上
示意圖			
說明	在中央類正方形的邊緣靠近頂點處，表面張力為達力平衡，被拉起一點	表面張力在在中央類正方形的邊緣頂點與中點間示意圖。	在中央類正方形的邊緣中點上，表面張力為達力平衡，被拉到最高。

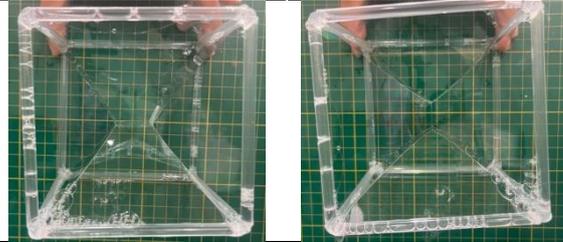
我們想要驗證實際正方體內的中央正方形所在平面與相鄰兩平面夾角關係，是否可驗證示意圖中所說明的部分。

1. 我們設計了實驗裝置(如表 4-3)，以便同時可測得中央正方形邊長與相鄰兩平面之夾角。直徑 0.15cm 邊長 10 公分模型。
2. 重複實驗同時照出互相垂直的兩個角度照片，再將照片放入軟體內分析，記錄數據於表 5-16：

表 5-16 中央正方形所在平面與相鄰兩平面夾角

次數	泡膜圖片	邊長(cm)	總表面積(cm ²)	角度(°)
1		0.69	424.25	106.2°
2		0.84	424.25	105°

3		0.81	424.25	109°
4		0.83	424.25	107.6°
5		0.73	424.25	106.7°
6		0.88	424.25	109.5°
7		0.69	424.25	106.3°
8		0.86	424.25	106.3°
9		0.76	424.25	108.6°

10		0.78	424.25	109.1°
----	---	------	--------	--------

結果與討論

- 1.我們知道三力共點平衡時，兩兩相交成為 120° ，而且類正方形的邊並非直線，而是有一點弧形。
- 2.在泡膜的實驗觀察中，由中央正方形所在平面與相鄰兩平面夾角測量得知，中央正方形邊長與相鄰兩平面之夾角並非 120 度，可見得泡膜痕跡在每個點所受的力並非相同。由力圖分析得知，三力大小不一，因此痕跡才會形成有一點弧形。

陸、 討論

- 一、 超過三個泡泡彼此吸附時，相鄰的兩個泡泡中間會有一條線，相鄰的三個泡泡會有一個點，我們把泡泡之間的形狀利用點和線紀錄下來。我們發現泡泡在超過七顆後所形成的圖形大同小異，所以我們紀錄到十四顆。
- 二、 我們利用數位相機將泡泡所形成的形狀拍攝下來，把相片放入小畫家中放大直接量泡泡間的角度。當泡泡彼此吸附住時，泡泡膜之間的夾角都會非常接近 120 度，中央的形體會很自然而然接近正六角形的形狀。跟大自然的蜂巢及晶體結構相似。
- 三、 超過兩顆以上的泡泡彼此吸附時，泡泡膜之間的夾角都會非常接近 120 度，漸漸形成接近六角形，除非刻意牽引或設計，我們刻意吹泡泡在四顆的正上方讓他沉下去形成正方形，而六顆泡泡我們刻意牽引讓它形成正五邊形。
- 四、 本研究發現，泡泡膜不只會形成在立體模型表面而已，模型裡面的泡泡膜是會互相接觸著，尤其如正四面體、正六面體、正六面體、五角柱、六角柱、正八面體和正十二面體，因具有上下對稱的形狀，所以內部所產生的泡泡膜多具有上下左右的對稱性，因此不同的立體模型會形成不同形狀的泡泡膜，我們通常以為泡泡膜只形成於框架的表面上，但實際上泡泡膜會傾向於形成具有最小表面積之形狀，所以泡泡膜的形與最小表面積有關，這是因為系統能量會傾向於最小化。
- 五、 在實驗三、四、五、六的實驗中，我們使用相同泡泡水配方溶液，室溫、模型直徑，重複十次。發現相同控制變因條件下，正立方體框架可以作出大小不同的正方形。經電腦模擬後發現，原來在 $x = 0.0644$ 到 $x = 0.08076$ 時，都發生最小面積，我們利用正立方體框架形成中央類正方形泡泡的邊長，帶入總表面積公式中所計算出的總表面積在小數第二位計算下幾乎相同。
- 六、 在表面張力和內聚力的作用下，薄膜表面積會呈現最小狀態，由此可解釋實驗所得的在表面張力和內聚力的作用下，薄膜表面積會呈現最小狀態。

柒、 結論

在本實驗中，我們得到了以下幾個結論，

一、市售的泡泡水，無法在立體框架內部形成立體泡泡，我們依據文獻研究及不斷的實驗，我們得到最佳泡泡水的配方：**RO 水：洗碗精：甘油 = 16：4：4**。

二、在平面上泡泡會自然彼此吸附在一起，超過兩顆以上就會並漸漸形成接近 **120** 度的夾角，所以當一群泡泡聚集在一起時，便會成為像蜂巢或晶體一樣六角形的泡泡聚集。

三、方塊泡泡膜的 formed 現象與變換與傾角、框架材質、框架大小、模型直徑之關聯性。

結果我們發現**操作如下的變因吧：**

(1)改變不同的傾角（**15°、30°、45°、60°、75°、90°**）、

(2)立體框架材質（鐵絲、銅線、毛根、吸管）、

(3)正六面體模型大小（邊長 **4 cm、5 cm、10 cm、15 cm** ）、

(4)模型直徑（**0.3cm、0.6cm、0.8cm** ）、

在實驗的觀察中，似乎不影響正立方體中央類正方形的大小，並藉由計算類正方形、三角形和梯形泡膜的總表面積，得到儘管不同大小的類正方形，但面積總和差異在小數點下四位。由此得知，類正方形邊長在一個範圍內會達到能量的穩定及平衡。

四、泡泡膜的 formed 必須是在一封閉區域，如正四面體、四角椎、正六面體、正八面體、正十二面體、五角柱及六角柱立體模型是一個對稱且封閉的圖框，則可以組成多樣式的泡泡膜，而五角錐、六角椎立體模型則是上下不對稱且開放式的圖框，即使增加角錐的高度也無法組成多樣化的泡泡膜。正多邊形及三十二面體則因隨著面體越來越多且距離太長無法呈現一封閉圖框而無法形成內部立體形狀的泡泡。

五、以能量的角度解釋面轉變：表面自由能是每單位表面積所具有的能量，因此當總面積越小，能量就越低，而液體表面總是試圖達到能量最低的狀態，因此，本研究計算出泡膜形式的總表面積，以數學實際論證表面張力作用下會使得泡膜傾向面積最小。

六、從方塊泡泡膜觀察，正立方體所形成的方塊泡泡膜，中央的部分是一個類正方形的形狀。而兩個梯形與相鄰正方形所在平面並不是成兩兩相交成為 **120°**。我們知道三力共點平衡時，兩兩相交成為 **120°**，而且類正方形的邊並非直線，而是有一點弧形。在泡膜的實驗觀察中，由中央正方形所在平面與相鄰兩平面夾角測量得知，中央正方形邊長與相鄰兩平面之夾角並非 **120°**，可見得泡膜痕跡在每個點所受的力並非相同。由力圖分析得知，三力大小不一，因此痕跡才會形成有一點弧形。

捌、 參考文獻資料

一、傅宗正、陳正平（2001）。冒泡的美。科學發展月刊，29（11），788-796。

二、許良榮、吳筱婷（2007）。科普活動設計：以「泡泡世界」為例。科學教育月刊，296，33-41。

三、泡泡界的養生秘方-甘油濃度與泡泡壽命的探討。中華民國第四十五屆中小學科學展覽會參展作品。2006 年。取自：<http://lab.ntsec.gov.tw/activity/race-1/45/senior/0402/040202.pdf>

四、碳為觀止 一泡泡的形狀改變了！新竹市第三十八屆中小學科學展覽會參展作品。2020 年