中華民國第61屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學

組　　別：國中組

作品名稱：由繁化簡～鏡射多邊形退化之探討

關 鍵 詞：鏡射多邊形、退化點、棒圓

編　　號：

摘要

本作品主要研究多邊形與其重複疊作鏡射多邊形之退化關係。經過探討，我們發現多邊形的退化點必在多邊形各邊、各邊的延長線、外接圓、棒圓、近棒圓、遠棒圓上。同時，我們也找出了多邊形退化樣貌規則，和次數疊加性質及提早退化性質，並藉此製造任意 N 邊形的任意退化點及最終退化圖形。

壹、研究動機

在上專題課時，老師提到了一篇科展：「多邊形與其中重、頂重多邊形之性質探討」，其中內容使我們感到好奇。上網查了一些資料後，發現還有幾篇科展也是在做類似的主題，因此，我們想要再探討看看有沒有其他性質，經過我們研究與討論之後發現有些特殊的點會出現特別的情況，因此我們想研究這些點有沒有組成一條特殊的軌跡。

貳、研究目的

一、鏡射三角形退化點性質之研究與探討。

二、鏡射凸 N 邊形退化點及其圖形變化之探討。

三、鏡射凸 N 邊形之退化樣貌之探討。

四、製造任意 N 邊形的任意退化點及最終退化圖形。

參、研究設備及器材

紙、筆、GeoGebra

肆、文獻探討

一、第 54 屆 全國科展作品(多邊形與其中重、頂重多邊形之性質探討)。

二、第 57 屆 全國科展作品(頂圓多邊形之性質研究與探討)。

三、第 60 屆 全國科展作品(數學畢卡索－多邊形疊作之性質探討)。

四、第 38 屆 新竹市科展作品(數學畢卡索－多邊形疊作之性質探討)。

本文引用

第 57 屆 全國科展國中組數學科「頂圓多邊形之性質研究與探討」的作品中的：

p.3 n 階交點(本文中改名為棒點)。

第 54 屆 全國科展國中組數學科「多邊形與其中重、頂重多邊形之性質探討」的作品中的：

p.11 第 m 層與第（m+n）層相似。

p.15 角度轉換性質。

第 38 屆 新竹市科展作品「數學畢卡索－多邊形疊作之性質探討」的作品中的：

p.27 重複疊作頂垂、內三角形性質表。

p.28 重複疊作頂外三角形性質表。

伍、研究過程或方法

一、名詞定義：

(一)**鏡射三角形**：已知△ ABC及任意點 P，P 點分別對$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$作鏡射得三點A_1、B_1、C_1，這三點連成的三角形$\Delta A_1B_1C_1$即為ΔABC的第一層鏡射三角形，若 P 點再對$\Delta A_1B_1C_1$三邊作鏡射，所得的鏡射三角形$\Delta A_2B_2C_2$即為ΔABC的第二層鏡射三角形(圖 1-1)，以此類推，且原△ ABC定義為第 0 層。

(二)**鏡射多邊形**：任意 P 點對多邊形各邊作鏡射，各鏡射點依序連線所形成的圖形為該多邊形的鏡射多邊形。(圖 1-2)

(三)**{3k}**：P 點對原三角形作鏡射三角形，重複疊作後的三角形之疊作層數，除以三整除的層數皆屬於{3k}這組，**例**：第 0，3，6 層(圖 1-3)

(四)**{3k+1}**：P 點對原三角形作鏡射三角形，重複疊作後的三角形之疊作層數，除以三餘一的層數皆屬於{3k+1}這組，**例**：第 1，4，7 層(圖 1-3)

(五)**{3k+2}**：P 點對原三角形作鏡射三角形，重複疊作後的三角形之疊作層數，除以三餘二的層數皆屬於{3k+2}這組，**例**：第 2，5，8 層(圖 1-3)

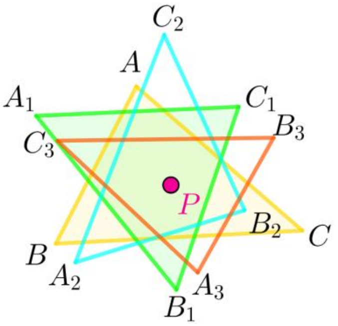


圖 1-1 鏡射多邊形

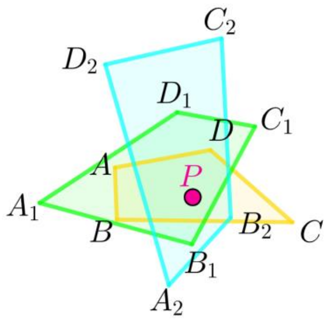


圖 1-2 鏡射多邊形

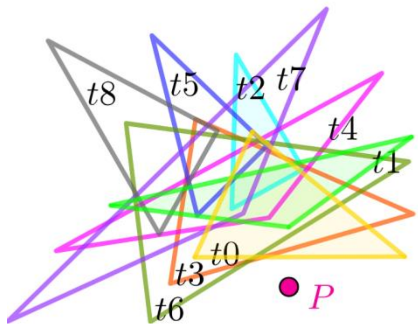


圖 1-3 分組相似

(六)**退化點**：P 點對一多邊形重複疊作鏡射多邊形，若重複疊作圖形之**對應頂點有兩點共點或相鄰三頂點共線**之狀況，則此 P 點稱為退化點。若重複疊作數次後之圖形為一點，則此 P 點稱為**完全退化點**。(圖 1-4)

(七)**退化點軌跡**：任意多邊形的所有退化點所形成的軌跡，稱為該多邊形之退化點軌跡。(圖 1-5 中粉紅色部分為退化點軌跡)

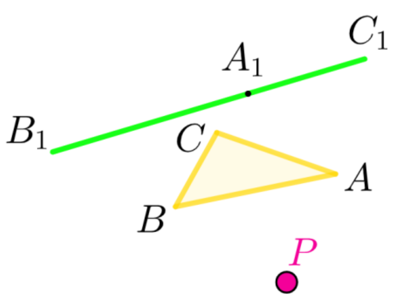


圖 1-4 退化點

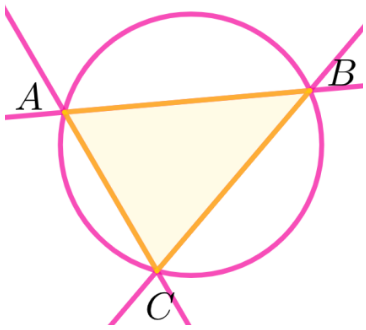


圖 1-5 退化點軌跡

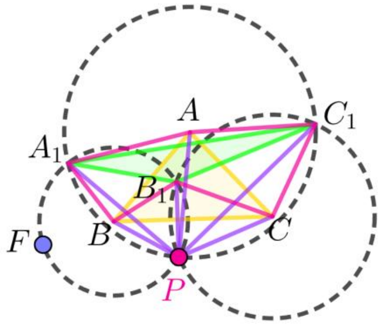


圖 1-6 三角形角度轉換

二、鏡射三角形性質之觀察與分析：

從之前科展中，我們知道有{3k}、{3k+1}、{3k+2}相似性質，但我們想尋找看有沒有其他性質，所以我們決定要從之前的科展作品看起。以下為我們參考的科展作品觀察與分析。

(一)三角形角度轉換性質：

已知：△ABC為原圖形、△$A_1B_1C_1$第一層鏡射多邊形，P 點為任意點，F 為圓 B 上但不在$\widehat{PA_1}$上的任意點(圖 1-6)

求證：$\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{P}C_1A_1,\ \angle\mathrm{PAC}=\angle\mathrm{P}A_1C_1,\ \angle\mathrm{PBA}=180°-\angle\mathrm{P}B_1A_1,$

$\angle\mathrm{PBC}=\angle\mathrm{P}A_1B_1,\ \angle\mathrm{PCA}=180°-\angle\mathrm{P}B_1C_1,\ \angle\mathrm{PCB}=\angle\mathrm{P}C_1B_1$

證明：分別以 A、B、C 為圓心，$\overline{AP}$、$\overline{BP}$、$\overline{CP}$為半徑畫圓

$$\angle\mathrm{PAB}=\angle A_1\mathrm{AB}=\frac{1}{2}\angle PAA_1=\frac{1}{2}\widehat{PA_1}=\angle\mathrm{P}C_1A_1$$

$$\angle\mathrm{PBA}=\angle\mathrm{AB}A_1=\frac{1}{2}\angle PBA_1=\frac{1}{2}\widehat{PA_1}=\frac{1}{2}(360°-\widehat{PFA_1})=180°-\angle\mathrm{P}B_1A_1$$

同理得證：

$\angle\mathrm{PAC}=\angle\mathrm{P}A_1C_1,\angle\mathrm{PBC}=\angle\mathrm{P}A_1B_1,\angle\mathrm{PCA}=180°-\angle\mathrm{P}B_1C_1,\angle\mathrm{PCB}=\angle\mathrm{P}C_1B_1$

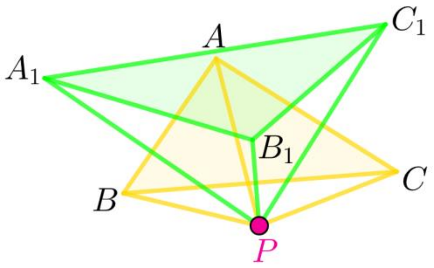


圖 1-7 三角形分組相似 (0、1 層)

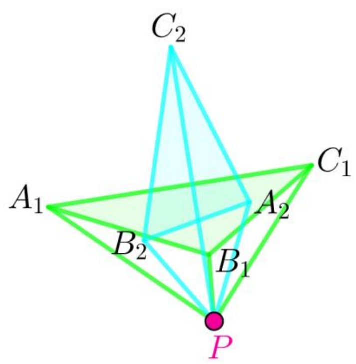


圖 1-8 三角形分組相似 (1、2 層)

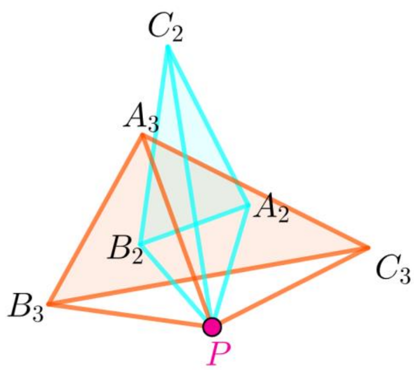


圖 1-9 三角形分組相似 (2、3 層)

(二){3k}、{3k+1}、{3k+2}相似性質之證明：

已知：△ ABC 為任意三角形，P 為平面上任一點(圖 1-7、1-8、1-9)

求證：原圖形與外翻三次圖形為相似圖形

證明：設$\angle\mathrm{PAB}=\angle1,\angle\mathrm{PAC}=\angle2,\angle\mathrm{PBA}=\angle3,\angle\mathrm{PBC}=\angle4,\angle\mathrm{PCA}=\angle5,\angle\mathrm{PCB}=\angle6$

由角度轉換可得知

$\angle\mathrm{P}A_1B_1=\angle4,\angle\mathrm{P}A_1C_1=\angle2,\angle\mathrm{P}B_1A_1=180°-\angle3$

$\angle\mathrm{P}B_1C_1=180°-\angle5,\angle\mathrm{P}C_1A_1=\angle1,\angle\mathrm{P}C_1B_1=\angle6$

$$\angle\mathrm{P}A_2B_2=\frac{1}{2}\angle\mathrm{P}B_1B_2=\frac{1}{2}(360°-2\angle\mathrm{P}B_1C_1)=\frac{1}{2}(360°-2(180°-\angle5))=\angle5$$

$\angle\mathrm{P}A_2C_2=180°-\angle2$

$$\angle PB_2A_2=\frac{1}{2}\angle PB_1A_2=\frac{1}{2}(360°-2\angle PB_1A_1)=\frac{1}{2}(360°-2(180°-\angle 3))=\angle 3$$

$$\angle PB_2C_2=180°-\angle 1,\angle PC_2A_2=\angle 4,\angle PC_2B_2=\angle 6$$

$$\angle PA_3B_3=\angle 1,\angle PA_3C_3=\angle 2,\angle PB_3A_3=\angle 3$$

$$\angle PB_3C_3=\angle 4,\angle PC_3A_3=\angle 5,\angle PC_3B_3=\angle 6$$

表 1：三角形角度轉換各分角移動過程

	第一個角($\angle B_nA_nC_n$)	第二個角($\angle A_nB_nC_n$)	第三個角($\angle A_nC_nB_n$)
n=0	$\angle 1+\angle 2$	$\angle 3-\angle 4$	$\angle 5-\angle 6$
n=1	$\angle 2-\angle 4$	$360°-(180°-\angle 3)-(180°-\angle 5)$ $=\angle 3+\angle 5$	$\angle 1-\angle 6$
n=2	$(180°-\angle 2)-\angle 5$	$(180°-\angle 1)-\angle 3$	$\angle 4+\angle 6$
n=3	$\angle 1+\angle 2$	$\angle 3-\angle 4$	$\angle 5-\angle 6$

在△ ABC與△ $A_3B_3C_3$中

$\because \angle BAC=\angle 1+\angle 2=\angle B_3A_3C_3,$

$\angle ABC=\angle 3-\angle 4=\angle A_3B_3C_3,$

$\angle BCA=\angle 5-\angle 6=\angle B_3C_3A_3$

∴△ ABC~△ $A_3B_3C_3$(AA 相似)

∴{3k}、{3k+1}、{3k+2}各組都分別相似

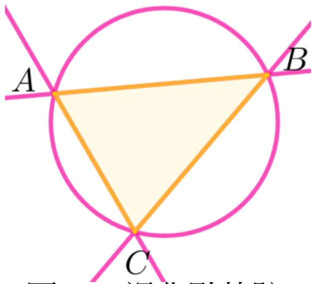


圖 1-5 退化點軌跡

三、三角形退化點之探討：

經過我們觀察，任意三角形的**外接圓及三角形三邊及三邊延長線**即為退化點軌跡(圖 1-5)，同時我們發現 P 點在不同特定位置時，退化情形也不太一樣。因此，我們分成 P 點在**三頂點退化、三邊延長線退化、外接圓退化**分別進行證明。

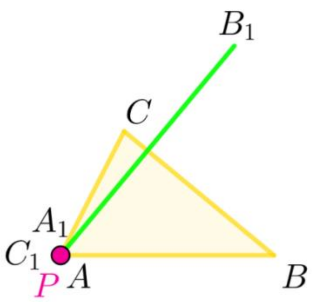


圖 1-10 三角形頂點退化

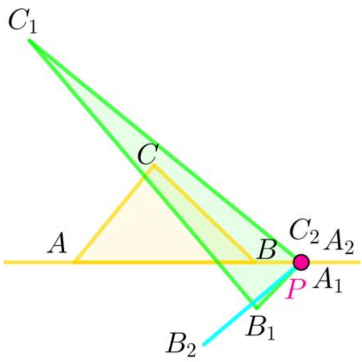


圖 1-11 三角形邊退化

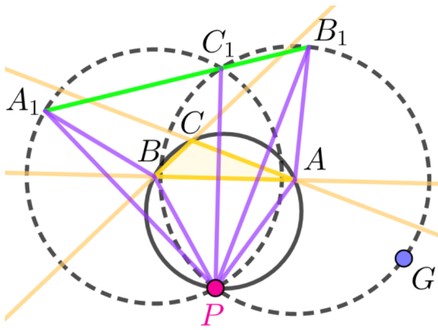


圖 1-12 三角形外接圓退化

(一)性質一頂點退化：

當 P 在三角形之頂點上時第一層開始退化

已知：△ ABC為原圖形，△ $A_1B_1C_1$為第一層，P 在 A 點上

求證：A_1 、B_1 、C_1共線

證明：P 在 A 上，所以 P 等於是在$\overline{CA}$及$\overline{BA}$兩對稱軸上

因此 P 對$\overline{CA}$及$\overline{BA}$作出的B_1、C_1及 P 共點，所以A_1 、B_1 、C_1共線(圖 1-10)

(二)性質二邊退化：當 P 在三角形之邊及邊延長線上時第一層開始退化

已知：△ABC為原圖形，△$A_1B_1C_1$為第一層，△$A_2B_2C_2$為第二層，P 在$\overleftrightarrow{AB}$上

求證：A_2、B_2、C_2共線

證明：∵P 在$\overleftrightarrow{AB}$上, ∴P 對$\overleftrightarrow{AB}$作鏡射出來的A_1與 P 點共點⇒P 在△$A_1B_1C_1$的頂點上

由性質一可得知A_2、B_2、C_2共線(圖 1-11)

(三)性質三外接圓退化：

已知：△ABC為原圖形，△$A_1B_1C_1$為第一層，G 為圓 A 上但不在$\widehat{PC_1B_1}$上的一點

會造成退化的兩角關係為$\angle PBC+\angle PAC=180°$(屬於後面提到的**情況二**)

求證：$\angle A_1C_1B_1=180°$

證明：分別以 A、B 為圓心，$\overline{AP}$及$\overline{BP}$為半徑畫圓

$\overleftrightarrow{BC}$為$\overline{A_1P}$之中垂線　又$\overline{BP}=\overline{BA_1}$

則$\angle PBC=\angle A_1BC=\frac{1}{2}\widehat{PC_1A_1}=\frac{1}{2}\left(360°-\widehat{PA_1}\right)=180°-\angle PC_1A_1$

$\Rightarrow \angle PC_1A_1=180°-\angle PBC$

$\overleftrightarrow{CA}$為$\overline{B_1P}$之中垂線　又$\overline{B_1A}=\overline{AP}$，則$\angle PAC=\angle CAB_1$

$\widehat{PGB_1}=360°-2\angle PAC=2\angle PC_1B_1,\ \angle PC_1B_1=180°-\angle PAC$

∵ ACBP為一圓內接四邊形，則$\angle PBC+\angle PAC=180°$

$\angle A_1C_1B_1=\angle PC_1B_1+\angle PC_1A_1=180°-\angle PAC+180°-\angle PBC$

$=360°-(\angle PBC+\angle PAC)=360°-180°$

$\Rightarrow \angle A_1C_1B_1=180°$(圖 1-12)

(四)結論：

1.由(一)、(二)、(三)得知，三角形的退化點必在三角形的邊及邊延長線與外接圓上。

2.由(一)、(二)，在我們往後發展時發現多邊形皆有此性質、皆可用此方法證明。

四、四邊形退化點之探討：

(一)名詞定義：

1.**退化**：N 邊形經過重複疊作鏡射後的圖形，若鏡射圖形邊數少於 N，則稱此情形為退化。若 N 邊形作出之重複疊作鏡射圖形為 N-1 邊形，則此情形為退化一次，以此類推。

2. **k 次退化**：P 點對一多邊形重複疊作鏡射多邊形，重複疊作後之圖形為(N-k)邊形，則此 P 點為此 N 邊形的 k 次退化點。

例：四邊形退化成三角形，為一次退化。七邊形退化成四邊形，為三次退化。

3.**a 層 b 次退化**：P 點對一多邊形重複疊作鏡射多邊形，在第 a 層鏡射多邊形時開始退化，最終退化 b 次，則此 P 點為此 N 邊形之 a 層 b 次退化點。

例：(圖 2-1)為 1 層 1 次退化

4.**m 階棒點**：若一 N 邊形兩邊之延長線交於一點 Q，且此兩邊最小相隔 m 個邊，則 Q 點稱為此多邊形的 m 階棒點。

註：頂點即為 0 階棒點

例：(圖 2-2-1)A'_1、B'_1、C'_1、D'_1、E'_1、F'_1為一階棒點、

(圖 2-2-2)B'_2、D'_2、F'_2為二階棒點。

5.**⊙ ABC**：ABC三點所連成的圓即為⊙ ABC。(圖 2-3)

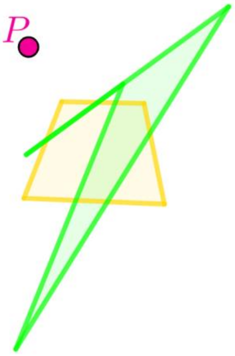


圖 2-1 一次退化

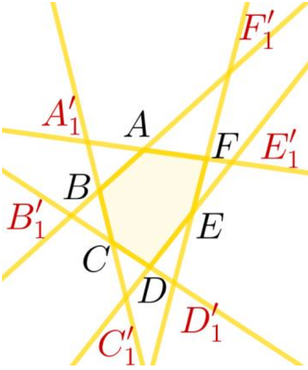


圖 2-2-1 一階棒點

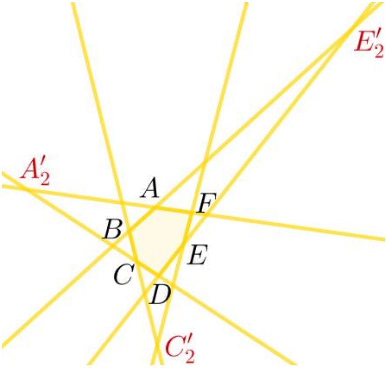


圖 2-2-2 二階棒點

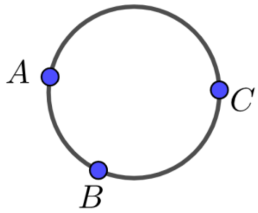


圖 2-3 ⊙ ABC

6.**棒圓**：已知一多邊形的**任意三個相鄰頂點**畫圓，則此圓稱為棒圓。

(圖 2-4 中⊙ ABC、 ⊙ BCD、 ⊙ CDE ⊙ DEA、 ⊙ EAB均為棒圓，以藍色表示)

註 1：在平行四邊形中的四個棒圓又分成兩個銳角棒圓(淡藍⊙ ABC、 ⊙ ACD)和兩個鈍角棒圓(深藍⊙ ABD、 ⊙ BCD)(圖 2-5)

註 2：經過探討，我們發現棒圓即為 0 階遠棒圓。

7.**近棒點、遠棒點**：若一多邊形之兩邊延長線交於一點，對此點而言，此兩邊上(線段)分別離此點較近的兩頂點是近棒點；較遠的兩點是遠棒點。

例：四邊形 ABCD 中兩邊$\overline{AD}$ 、$\overline{BC}$延長線交於A'_1點，對A'_1點而言，A、B 兩點為近棒點；C、D 兩點為遠棒點。(圖 2-6)

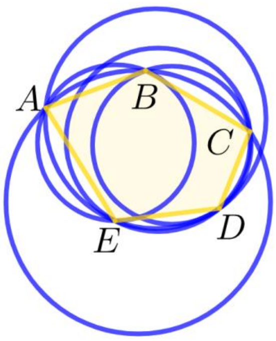


圖 2-4 棒圓

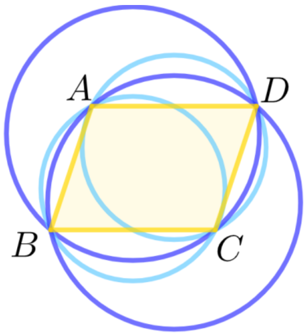


圖 2-5 銳角棒圓、鈍角棒圓

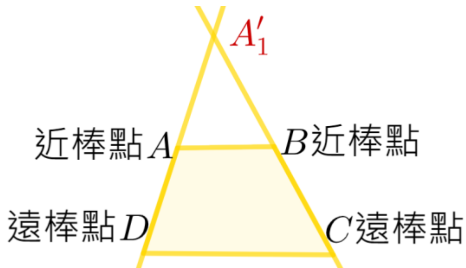


圖 2-6 近棒點、遠棒點

8.**近棒圓(綠)**：多邊形任意一階棒點與交出該棒點的兩邊延長線上**近棒點**畫圓，即為近棒圓。即為 57 屆科展(頂圓多邊形之性質研究與探討)所提的邊界圓。(圖 2-7 中,⊙ A'_1AB、 ⊙ B'_1BC、 ⊙ C'_1CD、⊙ D'_1DE、 ⊙ E'_1AE均為近棒圓，以綠色表示)

9.m **階近棒圓**：在一多邊形中，任意一個 m 階棒點及兩個**近棒點**所畫的圓即為 m 階近棒圓。**例**：二階近棒圓，一個二階棒點及其**近棒點**所畫的圓。

10.**遠棒圓**：多邊形任意一階棒點與交出該棒點的兩邊延長線上**遠棒點**畫圓。

(圖 2-8 中$\odot A'_1CE$、$\odot B'_1AD$、$\odot C'_1BE$、$\odot D'_1AC$、$\odot E'_1BD$均為近棒圓，以紫色表示)

11.m **階遠棒圓**：在一多邊形中，任意一個 m 階棒點及兩個**遠棒點**所畫的圓即為 m 階遠棒圓。**例**：二階遠棒圓：一個二階棒點及其**遠棒點**所畫的圓。

12.**交點圓**：在一多邊形中，取兩個不相鄰的一階棒點，與這兩棒點不相同的兩延長線之 0 階棒點畫圓。(圖 2-9 中$\odot A'_1EC'_1$即為五邊形 ABCDE 的其中一個交點圓，以粉紅色表示)

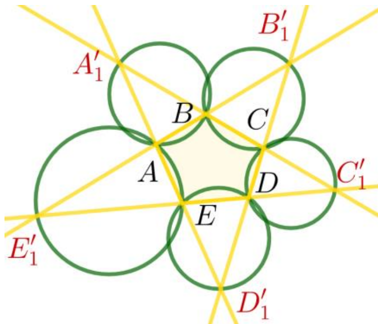


圖 2-7 近棒圓

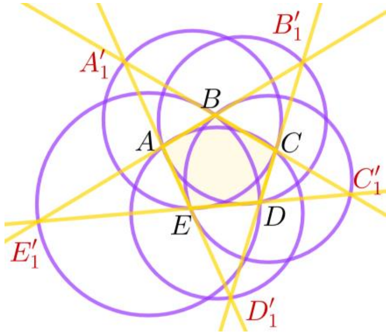


圖 2-8 遠棒圓

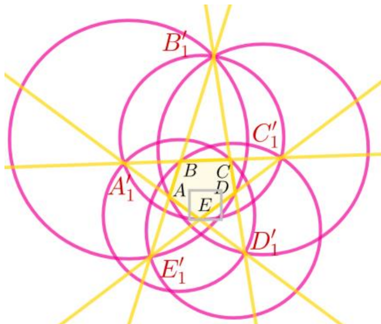


圖 2-9 交點圓

13.**圖形樣貌符號**：

為了方便之後的圖形退化證明，我們將其變形退化後所有會出現的圖形定義符號，內容如下：

(1)[4]：一般凸四邊形

(2)[3]：一般三角形

(3)[2]：四點共線

(4)[1]：四點共點

(5)[&]：蝴蝶形

(6)[#]：內三點共線

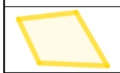
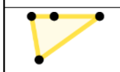
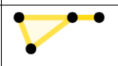
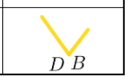
(7)[%]：外三點共線

(8)[$]：凹四邊形

(9)[*]：兩點共點

(10)[^]：鄰邊重合(表 2)

表 2：圖形樣貌符號圖

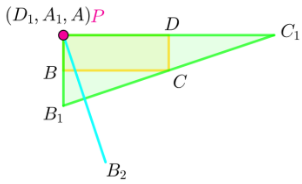
[4]	[3]	[2]	[1]	[&]
				
[#]	**[%]**	**[$]**	**[*]**	**[^]**
				

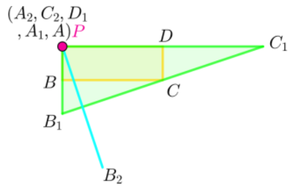
(二)P **點在特殊四邊形、不同位置退化圖形之觀察**：

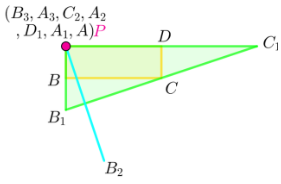
經過探討，我們發現和四邊形退化最有關的是邊，其次是外接圓，邊的平行與否及外接圓的有無便是重複疊作鏡射四邊形的分類依據。

因此，我們將四邊形分成以下四種情況來進行觀察與討論，分別是：

矩形(兩對平行+有外接圓)、平行四邊形(兩對平行+無外接圓)、
等腰梯形(一對平行+有外接圓)、梯形(一對平行+無外接圓)。







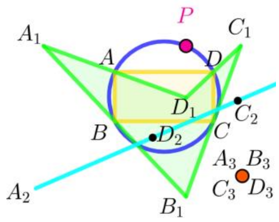


圖 3-1 矩形 0 層　圖 3-2 矩形 1 層　圖 3-3 形 2 層　圖 3-4 矩形 3 層　圖 3-5 矩形 棒圓上

1.矩形：P 點位置：

(1)頂點上：各層退化過程分別為[4][*][2][1]，若原四邊形 ABCD 是一一般凸四邊形，則計為[4]，當 P 點為 A 點(頂點)時。(圖 3-1)

第一層鏡射圖形$A_1B_1C_1D_1$中A_1、D_1共點，因此$A_1B_1C_1D_1$為兩點共點，計為[*]。A_1、D_1共點，因此無法作出鏡射點D_2。(圖 3-2)

第二層鏡射圖形中A_2、C_2共點，因此$A_2B_2C_2$為一條線，計為[2]。A_2、C_2共點，因此無法作出鏡射點C_3。(圖 3-3)

第三層鏡射多邊形A_3、B_3為一點，則計為[1]因此 P 在頂點時的退化過程記為[4][*][2][1] (圖 3-4)

以下也用相同方式表示：

(2)邊上：[4][%][*][2][1],(3)邊延長線上：[4][#][*][2][1],(4)棒圓上：[4][$][2][1](圖 3-5)

綜合上述討論，我們將矩形退化情形整理成下表(3)

表 3：P 點在矩形上的不同位置之退化情形

矩形	頂點	邊	邊延長	棒圓	近棒圓	遠棒圓
開始退化層數	1	1	1	2		
最後退化層數	2	3	3	2		
最終退化圖形	點	點	點	點		
退化原因	2 點共點	3 點共線	3 點共線	4 點共線		

2.利用上述作法討論後，針對平行四邊形、(非等腰)梯形、(等腰)梯形整理出下表：表(4)、表(5)、表(6)，以表示退化點在不同位置探討。

表 4：P 點在矩形上的不同位置之退化情形

平行四邊形	頂點	邊	邊延長	鈍角棒圓	銳角棒圓	近棒圓	遠棒圓
開始退化層數	1	1	1	2	2		
最後退化層數	2	3	3	2	2		
最終退化圖形	點	點	點	三角形	三角形		
退化原因	2 點共點	3 點共線	3 點共線	3 點共線	3 點共線		

表 5：P 點在非等腰梯形上的不同位置之退化情形

(非等腰)梯形	頂點	邊	邊延長	棒圓	近棒圓	遠棒圓
開始退化層數	1	2	2	3	1	1
最後退化層數	2	3	3	3	1	1
最終退化圖形	點	點	點	三角形	三角形	三角形
退化原因	2 點共點	2 點共點	2 點共點	3 點共線	3 點共線	3 點共線

表 6：P 點在等腰梯形上的不同位置之退化情形

(等腰)梯形	頂點	邊	邊延長	棒圓	近棒圓	遠棒圓
開始退化層數	1	2	2	2	1	1
最後退化層數	2	3	3	2	1	1
最終退化圖形	點	點	點	點	三角形	三角形
退化原因	2 點共點	2 點共點	2 點共點	4 點共線	3 點共線	3 點共線

3.**結論**：由上面 1.、2.點可得知，

(1)若 P 點在四邊形的邊、邊延長線及外接圓(棒圓重合)上，則最終退化圖形為點。

(2)若 P 點在四邊形的棒圓(棒圓不重合)、近棒圓(非交點)、遠棒圓(非交點)上，則最終退化圖形為三角形。

五、五邊形退化情形之探討：

和四邊形一樣，我們分外接圓的有無及邊是否平行的兩種分類，代表分別是：有平行邊+無外接圓(圖 3-6)，無平行邊+有外接圓(圖 3-7)，有平行邊+有外接圓(圖 3-8)

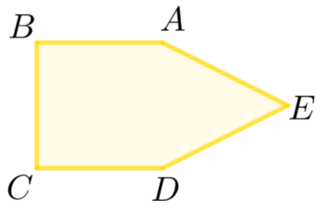


圖 3-6 五邊形 1

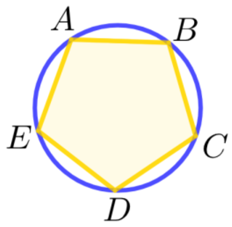


圖 3-7 五邊形 2

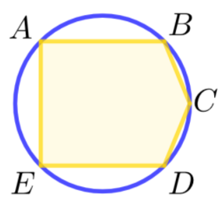


圖 3-8 五邊形 3

表 7：P 點在(圖 3-6)上的不同位置之退化情形

圖 3-6	頂點	邊	邊延長	棒圓	近棒圓	遠棒圓
開始退化層數	1	2	2	3	1	2
最後退化層數	4	4	4	3	1	2
最終退化圖形	點	點	點	四邊形	四邊形	四邊形
退化原因	2 點共點	2 點共點	2 點共點	3 點共線	3 點共線	3 點共線

表 8：P 點在(圖 3-7)上的不同位置之退化情形

圖 3-7	頂點	邊	邊延長	棒圓	近棒圓	遠棒圓
開始層數	1	2	2	3	1	2
最後退化層數	4	4	4	3	1	2
最終退化圖形	點	點	點	點	四邊形	四邊形
退化原因	2 點共點	2 點共點	2 點共點	5 點共線	3 點共線	3 點共線

表 9：P 點在(圖 3-8)上的不同位置之退化情形

圖 3-8	頂點	邊	邊延長	棒圓	近棒圓	遠棒圓
開始層數	1	2	2	3	1	2
最後退化層數	4	4	4	4	1	2
最終退化圖形	點	點	點	點	四邊形	四邊形
退化原因	3 點共點	2 點共點	2 點共點	5 點共線	3 點共線	3 點共線

結論：由(表 7)、(表 8)、(表 9)可知，

(1)若 P 點在五邊形的邊、邊延長線及外接圓(棒圓重合)上，則最終退化圖形為點。

(2)若 P 點在五邊形的棒圓(棒圓不重合)、近棒圓(非交點)、遠棒圓(非交點)上，則最終退化圖形為四邊形。

六、六邊形退化情形之探討：

在上述討論中，可以歸納出頂點、邊延長及棒圓的退化規則，而 m 階的近棒圓及小小棒在六邊形以後才會出現，所以以下在六邊形的探討中，我們將(圖 3-9)針對不同階的近棒圓及遠棒圓做討論。

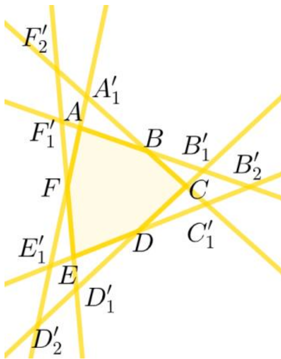


圖 3-9 六邊形-例

表 10：P 點在(圖 3-9)上的不同位置之退化情形

圖 3-9	近棒圓	遠棒圓	二階近棒圓	二階遠棒圓
開始層數	1	3	2	2
最後退化層數	1	3	2	2
最終退化圖形	五邊形	五邊形	五邊形	五邊形
退化原因	3 點共線	3 點共線	3 點共線	3 點共線

結論：由(表 10)可知，

若 P 點在五邊形的二階近棒圓(非交點)、二階遠棒圓(非交點)上，則最終退化型態為二層一次。

陸、 研究分析與討論

一、鏡射多邊形之性質與探討：

(一)角度轉換性質：

角度轉換是指 P 點對 N 邊形的個頂點連線後，將那個頂點的內角或外角分割成兩個角，同樣以 P 點對第一層鏡射多邊形連線，分割出的角，會與原圖形分割出的角存在的特殊關係，我們發現之前的作品裡面都有提到角度轉換的現象，而且後續證明也會重複提到。下方以五角形為例，說明角度轉換和證明角度轉換(圖 4-1)

已知：ABCDE原圖形、$A_1B_1C_1D_1E_1$第一層鏡射多邊形，P 點為任意點

求證：$\angle\mathrm{PAE}=\angle\mathrm{P}A_1E_1,\ \angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{P}E_1A_1,\ \angle\mathrm{PBA}=\angle\mathrm{P}B_1A_1,\ \angle\mathrm{PBC}=\angle\mathrm{P}A_1B_1,$

$\angle\mathrm{PCB}=180^{\circ}-\angle\mathrm{P}C_1B_1,\ \angle\mathrm{PCD}=\angle\mathrm{P}B_1C_1,\ \angle\mathrm{PDC}=\angle\mathrm{P}D_1C_1$

$\angle\mathrm{PDE}=180^{\circ}-\angle\mathrm{P}C_1D_1,\ \angle\mathrm{PED}=\angle\mathrm{P}E_1D_1,\ \angle\mathrm{PEA}=\angle\mathrm{P}D_1E_1$

證明：分別以 A、C 為圓心，$\overline{AP}$、$\overline{CP}$為半徑畫圓

$$\angle\mathrm{PAE}=\angle E_1\mathrm{AE}=\frac{1}{2}\angle PAE_1=\frac{1}{2}\widehat{PE}_1=\angle\mathrm{P}A_1E_1\angle\mathrm{PCB}=\angle B_1\mathrm{CB}$$

$$=\frac{1}{2}\left(360^{\circ}-\angle PCB_1\right)=180^{\circ}-\frac{1}{2}\widehat{PB}_1=180^{\circ}-\angle\mathrm{P}C_1B_1$$

同理得證

$\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{P}E_1A_1,\angle\mathrm{PBA}=\angle\mathrm{P}B_1A_1,\ \angle\mathrm{PBC}=\angle\mathrm{P}A_1B_1,\angle\mathrm{PCD}=\angle\mathrm{P}B_1C_1$

$\angle\mathrm{PDC}=\angle\mathrm{P}D_1C_1,\angle\mathrm{PDE}=180^{\circ}-\angle\mathrm{P}C_1D_1,\angle\mathrm{PED}=\angle\mathrm{P}E_1D_1,\angle\mathrm{PEA}=\angle\mathrm{P}D_1E_1$

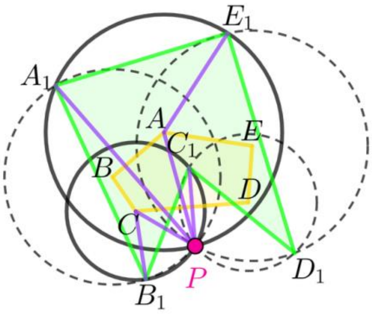


圖 4-1 五邊形角度轉換

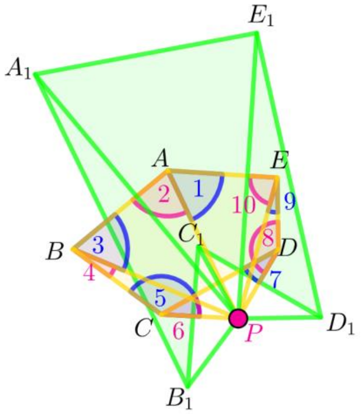


圖 4-2 五邊形分組相似(0、1 層)

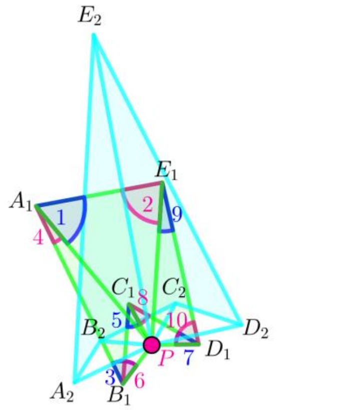


圖 4-3 五邊形分組相似(1、2 層)

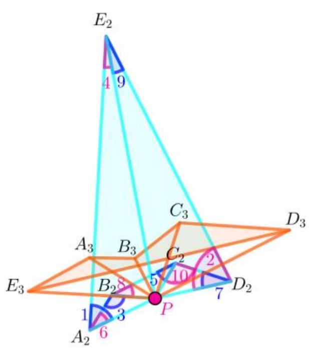


圖 4-4 五邊形分組相似(2、3 層)

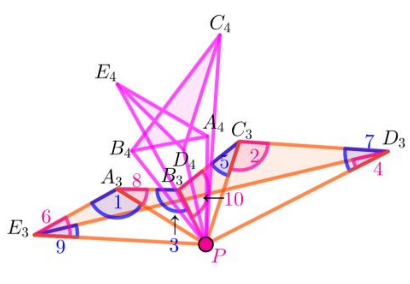


圖 4-5 五邊形分組相似(3、4 層)

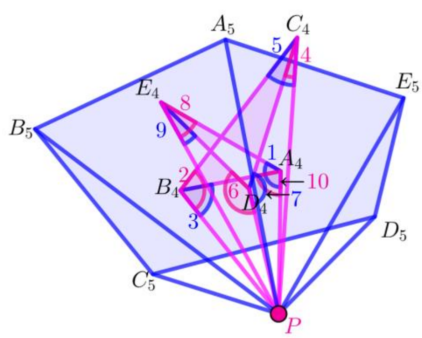


圖 4-6 五邊形分組相似(4、5 層)

(二)**分組相似性質**：

分組相似是指 P 點對 N 邊形重複疊作鏡射多邊形後，特定層數會有相似情形。為了方便解釋以下用五邊形為例。(圖 4-2、4-3、4-4、4-5、4-6)

已知：一五邊形 ABCDE 為原圖形，P 點為任意點

求證：原圖形與第五層圖形相似

證明：設$\angle PAE=\angle 1,\angle PAB=\angle 2,\angle PBA=\angle 3,\angle PBC=\angle 4,\angle PCB=\angle 5$

$$\angle PCD=\angle 6,\angle PDC=\angle 7,\angle PDE=\angle 8,\angle PED=\angle 9,\angle PEA=\angle 10$$

角度轉換可得知：

表 11：三角形角度轉換各分角移動過程

	第一個角 ($\angle E_nA_nB_n$)	第二個角 ($\angle A_nB_nC_n$)	第三個角 ($\angle B_nC_nD_n$)	第四個角 ($\angle C_nD_nE_n$)	第五個角 ($\angle D_nE_nA_n$)
n=0	$\angle 1+\angle 2$	$\angle 3+\angle 4$	$\angle 5-\angle 6$	$\angle 8-\angle 7$	$\angle 9+\angle 10$
n=1	$\angle 1+\angle 4$	$\angle 3-\angle 6$	$360^\circ-(180^\circ-\angle 5)-(180^\circ-\angle 8)=\angle 5+\angle 8$	$\angle 10-\angle 7$	$\angle 9+\angle 2$
n=2	$\angle 1-\angle 6$	$360^\circ-(180^\circ-\angle 3)-(180^\circ-\angle 8)=\angle 3+\angle 8$	$360^\circ-(180^\circ-\angle 5)-(180^\circ-\angle 10)=\angle 5+\angle 10$	$\angle 2-\angle 7$	$\angle 9+\angle 4$
n=3	$(180^\circ-\angle 1)+(180^\circ-\angle 8)=360^\circ-\angle 1-\angle 8$	$(180^\circ-\angle 3)+(180^\circ-\angle 10)=360^\circ-\angle 3-\angle 10$	$(180^\circ-\angle 5)+(180^\circ-\angle 2)=360^\circ-\angle 5-\angle 2$	$\angle 7-\angle 4$	$\angle 6-\angle 9$
n=4	$(180^\circ-\angle 1)-\angle 10$	$(180^\circ-\angle 2)-\angle 3$	$(180^\circ-\angle 5)-\angle 4$	$360^\circ-(180^\circ-\angle 6)-(180^\circ-\angle 7)=\angle 6+\angle 7$	$(180^\circ-\angle 8)-\angle 9$
n=5	$\angle 1+\angle 2$	$\angle 3+\angle 4$	$\angle 5-\angle 6$	$\angle 8-\angle 7$	$\angle 9+\angle 10$

觀察 1：每個內角都有分成兩個角，這 10 個角有一部份會轉換到下一層的對應角上(淡藍色底)，另一部份會轉換到下一層的上一個對應角。

為了方便以下解釋，定義以下名詞：

1.**分角**：用 P 點和頂點相連線段與邊所夾出的角皆稱為分角

2.**駐留分角**：成為下一層對應角一部分的這些角為駐留分角

例：上表中的$\angle 1$、$\angle 3$、$\angle 5$、$\angle 7$、$\angle 9$

3.**移動分角**：會移動到下一層的上一個對應角的分角為移動分角

例：上表中的$\angle 2$、$\angle 4$、$\angle 6$、$\angle 8$、$\angle 10$

4.**間隔邊數**：若任選兩個分角$\angle A$及$\angle B$，$\angle A$的頂點順著移動分角移動的方向數到$\angle B$的頂點，中間隔的邊數就是$\angle A$對$\angle B$的間隔邊數。

結論：1.移動分角會到下一層的上一個對應角

⇒移動分角移動的方向會和頂點編號順序相反

2.駐留分角的開口方向和頂點編號方向相反

3.移動分角的開口方向和頂點編號方向同向

4.由 1、3 兩點可得之移動分角的開口會背對移動的方向

二、四邊形退化點之探討：

經由上述的性質探討，我們發現四邊形的退化點只出現在頂點、邊延長線(包含頂點)及棒圓、近棒圓、遠棒圓上，以下將會對這些位置進行證明。

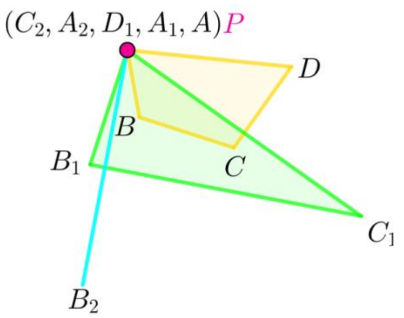


圖 4-7 四邊形頂點退化

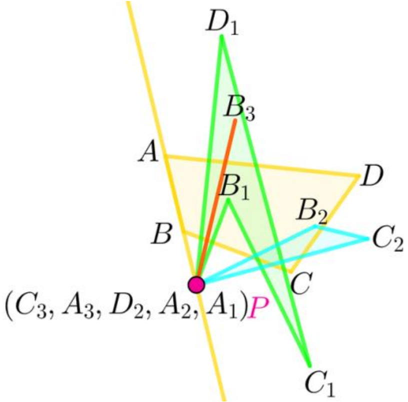


圖 4-8 四邊形邊退化

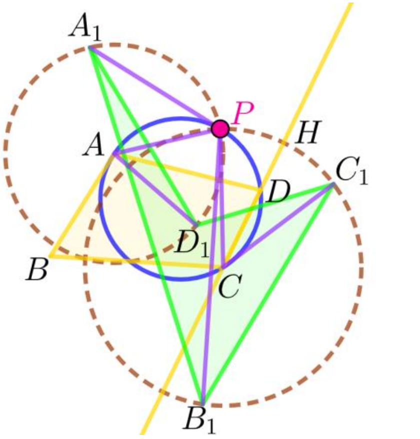


圖 4-9 四邊形 棒圓退化 1

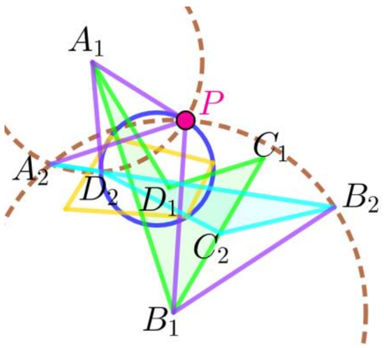


圖 4-10 四邊形 棒圓退化 2

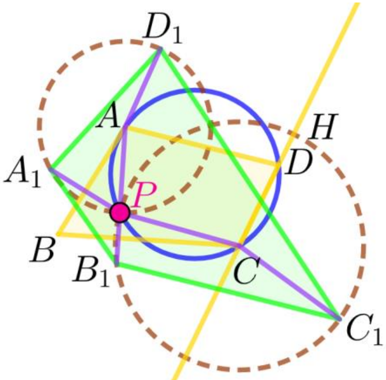


圖 4-11 四邊形 棒圓退化 3

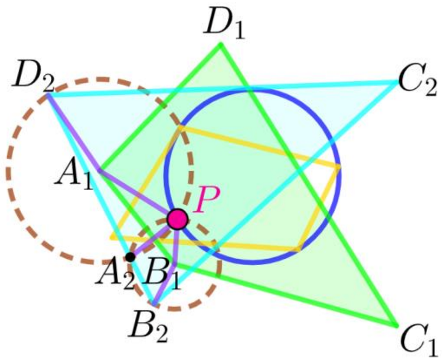


圖 4-12 四邊形 棒圓退化 4

(一)P 點在**頂點**(0 階棒點)上：

已知：ABCD 為原圖形，$A_1B_1C_1D_1$為疊作第一層圖形，
$A_2B_2C_2$為疊作第二層圖形，P 在 A 點上

求證： A_2、B_2、C_2共線(圖 4-7)

證明：由性質一**頂點退化**可得知當 P 在頂點上時 P 在$\overline{DA}$及$\overline{BA}$兩對稱軸上
則 P 對$\overline{DA}$及$\overline{BA}$作出的D_1、A_1及 P 共點, ∴ $A_1B_1C_1D_1$為三角形
由性質一**頂點退化**可得知 P 點在A_1、D_1上時，
相當於 P 在$\overline{A_1B_1}$及$\overline{C_1D_1}$兩對稱軸上
則 P 對$\overline{A_1B_1}$及$\overline{C_1D_1}$作出的A_2、C_2及 P 共點, ∴ A_2、B_2、C_2三點共線

(二)P 點在**邊及邊延長線**上：

已知：ABCD 為原圖形，$\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$為疊作第一層圖形，$\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$為疊作第二層圖形，
$\mathrm{A_3B_3C_3}$為疊作第三層圖形，P 在$\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$點上

求證： A_3、B_3、C_3共線(圖 4-8)

證明：由性質二**邊退化**可得知當 P 在$\overleftrightarrow{AB}$上時 P 對$\overleftrightarrow{AB}$作出的
對稱點A_1與 P 共點，因此 P 在$A_1B_1C_1D_1$的頂點上
由上面證明可得知A_3、B_3、C_3三點共線

(三)P **點在棒圓上**：

已知：四邊形 ABCD 為原圖形，四邊形$A_1B_1C_1D_1$為第一層鏡射四邊形，四邊形$A_2B_2C_2D_2$為第二層鏡射四邊形，P 點在棒圓⊙ ADC上

求證：A_2、D_2、B_2三點共線

證明：在四邊形的棒圓上時會有兩種情況發生，以下所有圓皆會有兩種情況：

情況一 P 在棒圓⊙ ADC的$\widehat{ADC}$上時，參與角度轉換的角關係為

$\angle PCD = \angle PAD$(圖 4-9、4-10)

1.∵ PADC為一圓內接四邊形, ∴ $\angle PCD = \angle PAD$

分別以 A、C 圓心，$\overline{AP}$、$\overline{CP}$為半徑畫圓

由角度轉換可得知：$\angle PCD = \angle DCC_1 = \frac{1}{2}\angle PCC_1 = \frac{1}{2}\widehat{PC_1} = \angle PB_1C_1$

$$\angle PAD = \angle DAD_1 = \frac{1}{2}\angle PAD_1 = \frac{1}{2}\widehat{PD_1} = \angle PA_1D_1$$

又$\angle PCD = \angle PAD \Rightarrow \angle PB_1C_1 = \angle PA_1D_1$

2.分別以A_1、B_1圓心，$\overline{A_1P}$、$\overline{B_1P}$為半徑畫圓

由角度轉換可得知：$\angle PA_1D_1 = \angle PA_2D_2, \angle PB_1C_1 = \angle PA_2B_2$

又$\angle PB_1C_1 = \angle PA_1D_1$, ∴ $\angle PA_2D_2 = \angle PA_2B_2$

$\Rightarrow D_2$必在$\overline{A_2B_2}$上, 得證A_2、B_2、D_2三點共線

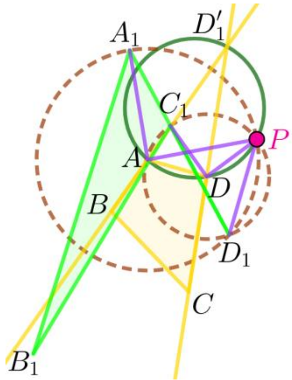


圖 4-13 四邊形 近棒圓退化

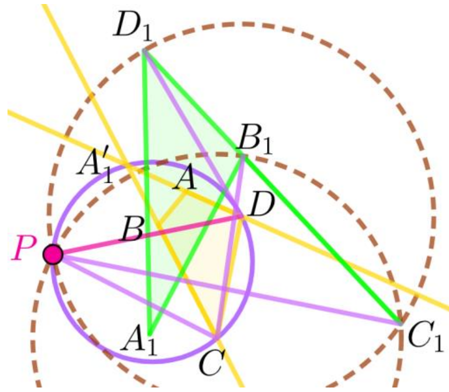


圖 4-14 四邊形 遠棒圓退化

情況二 P 在棒圓⊙ACD 的$\widehat{AC}$上時，參與角度轉換的角關係為

$\angle PCD + \angle PAD = 180^\circ$(圖 4-11、4-12)

1.∵ PADC為一圓內接四邊形, ∴ $\angle PCD + \angle PAD = 180^\circ$

分別以 A、C 圓心，$\overline{AP}$、$\overline{CP}$為半徑畫圓, $\overleftrightarrow{CD}$交圓 C 於 H

由角度轉換可得知：$\angle PCD = \angle DCC_1 = \frac{1}{2}\widehat{PHC_1} = \angle PB_1C_1$

$$\angle PAD = \angle DAD_1 = \frac{1}{2}\widehat{PD_1} = \angle PA_1D_1$$

又$\angle PCD + \angle PAD = 180° \Rightarrow \angle PB_1C_1 + \angle PA_1D_1 = 180°$

2.分別以A_1、B_1圓心，$\overline{A_1P}$、$\overline{B_1P}$為半徑畫圓

由角度轉換可得知：

$\angle PA_1D_1=\angle PA_2D_2,\ \angle \mathrm{P}B_1C_1=\angle PA_2B_2$

又$\angle \mathrm{PB_1C_1}+\angle \mathrm{PA_1D_1}=180^\circ,\ \therefore \angle PA_2B_2+\angle PA_2D_2=180^\circ$

$\Rightarrow \angle D_2A_2B_2=180^\circ$, 得證$A_2$、$B_2$、$D_2$三點共線

結論：兩情況差別在角度轉換後造成退化的角的關係，但在中間的證明都是利用角度轉換性質來證明。

觀察 2：1.在上面的證明中∠PAD 屬於駐留分角∠PCD 屬於移動分角，∠PCD對∠PAD間隔邊數為兩個邊，和棒圓外的邊數相同，也和退化層數相同。

2.四邊形 ABCD 的$\overline{AD}$、$\overline{DC}$兩邊為棒圓⊙ADC 的弦

3.造成退化的兩分角開口方向都朝向圓內，移動分角只經過圓外的邊。

(四)**P 點在四邊形近棒圓上退化證明(同棒圓之證明以下皆舉情況一來討論)**：

已知：ABCD 為原四邊形，$A_1B_1C_1D_1$為第一層四邊形，P 在近棒圓⊙ $AD\mathrm{D}'_1$

求證：A_1、C_1、D_1共線(圖 4-13)

證明：參與角度轉換的兩角關係為∠PDE = ∠PAE，所以此情況為情況一

分別以 A、D 為圓心，$\overline{AP}$、$\overline{DP}$為半徑畫圓

$\because$ $\mathrm{ADPD'_1}$為一圓內接四邊形, $\therefore \angle \mathrm{PDD'_1}=\angle \mathrm{PAD'_1}$

$\Rightarrow 180^\circ-\angle \mathrm{PDD'_1}=180^\circ-\angle \mathrm{PAD'_1}\Rightarrow \angle \mathrm{PD}C=\angle \mathrm{PAB}$

由角度轉換可得知：$\angle \mathrm{PD}C=\angle \mathrm{PD_1C_1},\ \angle \mathrm{PAB}=\angle \mathrm{PD_1A_1}$, 又$\angle \mathrm{PD}C=\angle \mathrm{PAB}$

$\Rightarrow \angle \mathrm{PD_1C_1}=\angle \mathrm{PD_1A_1},\ \therefore \mathrm{C_1}$在$\overline{\mathrm{A_1D_1}}$(得證)

觀察 3：1.∠PDC為駐留分角，∠PAB為移動分角，∠PAB對∠PDC的間隔邊數為一邊，和圓內的邊數一樣，也和退化層數相同。

2.四邊形 ABCD 的$\overline{AB}$、$\overline{DC}$兩邊之延長線為近棒圓⊙ $AD\mathrm{D}'_1$上的兩弦，因為近棒圓⊙ $AD\mathrm{D}'_1$為此四邊形之一階近棒圓，所以⊙ $AD\mathrm{D}'_1$上的兩弦所夾的邊數為一邊。

3.造成退化的兩分角開口方向皆背對圓內，移動分角只經過圓內的邊。

(五)**P 點在四邊形遠棒圓上退化證明**：

已知：ABCD 為原四邊形，$A_1B_1C_1D_1$為第一層四邊形，P 在遠棒圓⊙ $CD\mathrm{A}'_1$

求證：B_1、C_1、D_1共線(圖 4-14)

證明：參與角度轉換的兩角關係為$\angle \mathrm{PDA'_1}=\angle \mathrm{PAA'_1}$，所以此情況為情況一

分別以 C、D 為圓心，$\overline{CP}$、$\overline{DP}$為半徑畫圓

$\therefore \angle \mathrm{PCA'_1}=\angle \mathrm{PDA'_1}\Rightarrow \angle \mathrm{PCB}=\angle \mathrm{PDA}$

由角度轉換可得知：$\angle \mathrm{PC}B=\angle PC_1B_1,\ \angle \mathrm{PD}A=\angle PC_1D_1$

又$\angle \mathrm{PCB}=\angle \mathrm{PDA}\Rightarrow \angle PC_1B_1=\angle PC_1D_1,\ \therefore B_1$在$\overline{D_1C_1}$(得證)

觀察 4：1.$\angle PCB$為駐留分角，$\angle PDA$為移動分角，$\angle PDA$對$\angle PCB$的間隔邊數為一邊，和圓外的邊數一樣，也和退化層數相同。

2.四邊形 ABCD 的$\overline{AD}$、$\overline{BC}$兩邊之延長線為遠棒圓$\odot\, CDA'_1$上的兩弦，因為遠棒圓$\odot\, CDA'_1$為此四邊形之一階遠棒圓，所以$\odot\, CDA'_1$上的兩弦所夾的邊數為一邊，則圓內有 2+1=3 個邊。

3.造成退化的兩分角開口方向皆面向圓內，移動分角只經過圓外的邊。

結論：由上面(一)、(二)、(三)、(四)、(五)點及前段所敘的三角形邊退化證明可得知

1.四邊形的退化點必在四邊形的邊及邊延長線與棒圓、近棒圓、遠棒圓上

2.造成退化的兩角皆是一個駐留分角,一個移動分角

3.間隔邊數和退化樣貌的層數一樣

三、五邊形退化點之探討：

經由上述的性質探討，我們發現五邊形的退化點只出現在頂點、邊延長線(包含頂點)及棒圓、近棒圓、遠棒圓上，以下將會對這些位置進行證明。

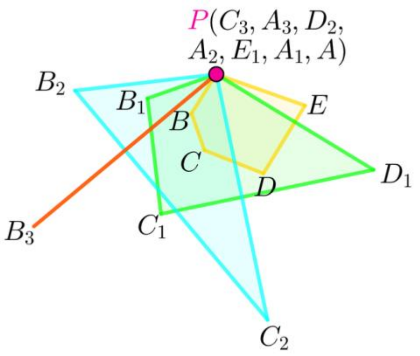


圖 5-1 五邊形 頂點退化

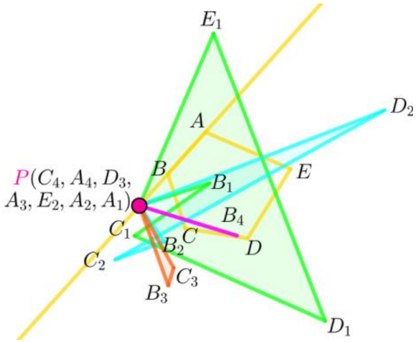


圖 5-2 五邊形 邊退化

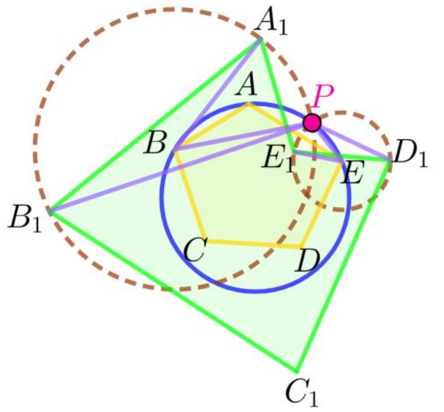


圖 5-3 五邊形 棒圓退化 1

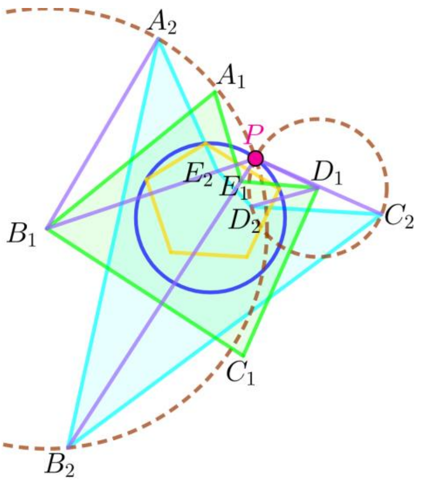


圖 5-4 五邊形 棒圓退化 2

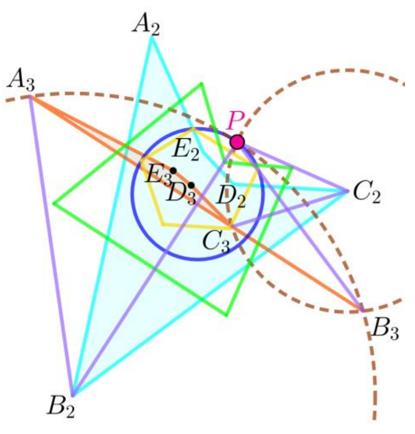


圖 5-5 五邊形 棒圓退化 3

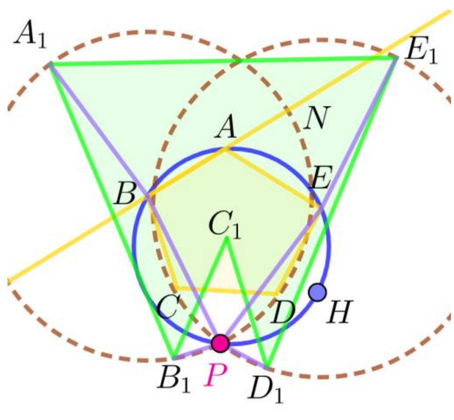


圖 5-6 五邊形 棒圓退化 4

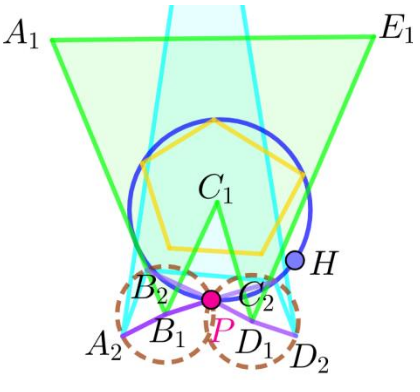


圖 5-7 五邊形 棒圓退化 5

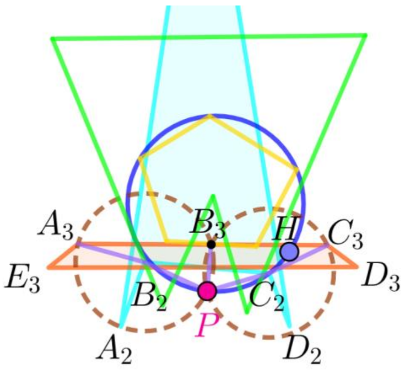


圖 5-8 五邊形 棒圓退化 6

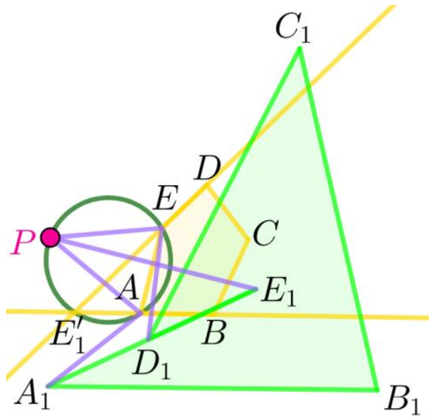


圖 5-9 五邊形 近棒圓退化

(一)**P 點在五邊形頂點上：**

已知：五邊形 ABCDE 為原圖形，$A_1B_1C_1D_1E_1$為疊作第一層圖形，$A_2B_2C_2D_2$為疊作第二層圖形，$A_3B_3C_3$為疊作第三層圖形，P 在 A 點上

求證：A_3 、B_3 、C_3共線(圖 5-1)

證明：由**性質一頂點退化**可得知當 P 在頂點上時 P 在$\overline{EA}$及$\overline{BA}$兩對稱軸上

則 P 對$\overline{EA}$及$\overline{BA}$作出的E_1 、A_1及 P 共點、$A_1B_1C_1D_1E_1$為五邊形

由**性質一頂點退化**可知 P 點在A_1 、E_1上時相當於 P 在$\overline{A_1B_1}$及$\overline{D_1E_1}$兩對稱軸上

則 P 對$\overline{A_1B_1}$及$\overline{D_1E_1}$作出的A_2 、D_2及 P 共點，$A_2B_2C_2D_2$為一三角形

由**性質一頂點退化**可知 P 點在A_1 、D_1上時相當於 P 在A_2B_2及C_2D_2兩對稱軸上

則 P 對A_2B_2及C_2D_2作出的A_3 、C_3及 P 共點，A_3 、B_3 、C_3三點共線

(二)**P 點在五邊形邊及邊延長線上：**

已知：ABCDE 為原圖形，$A_1B_1C_1D_1E_1$為疊作第一層圖形，$A_2B_2C_2D_2E_2$為疊作第二層圖形，$A_3B_3C_3D_3$為疊作第三層圖形，$A_4B_4C_4$為疊作第四層圖形，P 在$\overleftrightarrow{AB}$上

求證： A_4 、B_4 、C_4共線(圖 5-2)

證明：由**性質二邊退化**可得知當 P 在$\overleftrightarrow{AB}$上時 P 對$\overleftrightarrow{AB}$作出的對稱點A_1與 P 共點

因此 P 在$A_1B_1C_1D_1E_1$的頂點A_1上，由上面證明可得知A_4 、B_4 、C_4三點共線

(三)**P 點在五邊形棒圓上：**

已知：五邊形 ABCDE 為原圖形，五邊形$A_1B_1C_1D_1E_1$為第一層鏡射五邊形，五邊形$A_2B_2C_2D_2E_2$為第二層鏡射五邊形，五邊形$A_3B_3C_3D_3E_3$為第三層鏡射五邊形，P 點在棒圓⊙BAE 上，H 為⊙BAE 上且不再$\widehat{BAE}$上的點

求證：A_3、B_3、C_3三點共線 (圖 5-1、5-2)

證明：在五邊形的棒圓上時會有兩種情況發生，以下所有圓皆會有兩種情況：

情況一 P 在棒圓⊙ BAE的$\widehat{BAE}$上時，參與角度轉換的角關係為$\angle PBA = \angle PEA$

1.∵ PABE為一圓內接四邊形(圖 5-3), ∴ $\angle PBA = \angle PEA$

分別以 B、E 圓心，$\overline{BP}$ 、$\overline{EP}$為半徑畫圓

由角度轉換可得知：$\angle \mathrm{PBA} = \angle \mathrm{ABA_1} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{PBA_1} = \angle \mathrm{PB_1A_1}$

$$\angle \mathrm{PEA} = \ \angle \mathrm{AE}E_1 = \frac{1}{2}\angle PEE_1 = \angle PD_1E_1$$

又$\angle \mathrm{PBA} = \angle \mathrm{PEA} \Rightarrow \angle \mathrm{PB_1A_1} = \angle PD_1E_1$

2.分別以B_1、D_1圓心，$\overline{B_1P}$、$\overline{D_1P}$為半徑畫圓

由角度轉換可得知(圖 5-4)

$\angle PB_1A_1 = \angle PB_2A_2$, $\angle \mathrm{PD_1}E_1 = \angle PC_2D_2$又$\angle \mathrm{PB_1A_1} = \angle PD_1E_1$

$\therefore \angle PB_2A_2 = \angle PC_2D_2$

3.分別以B_2、C_2圓心，$\overline{B_2P}$、$\overline{C_2P}$為半徑畫圓

由角度轉換可得知(圖 5-5)

$\angle PB_2A_2 = \angle PB_3A_3$, $\angle \mathrm{PC_2}D_2 = \angle PB_3C_3$, 又$\angle PB_2A_2 = \angle PC_2D_2$

$\therefore \angle PB_3A_3 = \angle PB_3C_3 \Rightarrow C_3$必在$\overline{A_3B_3}$上，得證$A_3$、$B_3$、$C_3$三點共線

情況二 P 在棒圓⊙BAE 的$\widehat{BHE}$上時，

參與角度轉換的角關係為$\angle \mathrm{PEA} + \angle \mathrm{PBA} = 180^\circ$

1.$\because$ PBAE為一圓內接四邊形(圖 5-6), $\therefore \angle \mathrm{PEA} + \angle \mathrm{PBA} = 180^\circ$

分

圓心，AB交圓$\overline{BP}$於$\overline{EP}$ N為半徑畫圓

由角度轉換可得知：$\angle \mathrm{PBA} = \angle \mathrm{ABA_1} = \frac{1}{2}\widehat{PN\mathrm{A_1}} = \angle \mathrm{PB_1A_1}$

$$\angle \mathrm{PEA} = \angle \mathrm{AE}E_1 = \frac{1}{2}\angle PEE_1 = \angle PD_1E_1$$

又$\angle \mathrm{PEA} + \angle \mathrm{PBA} = 180^\circ$

2.分別以B_1、D_1圓心，$\overline{B_1P}$、$\overline{D_1P}$為半徑畫圓由

角度轉換可得知(圖 5-7)

$\angle PB_1A_1 = 180^\circ - \angle PB_2A_2$, $\angle \mathrm{PD_1}E_1 = 180^\circ - \angle PC_2D_2$

又$\angle \mathrm{PD_1E_1} + \angle \mathrm{PB_1A_1} = 180^\circ$

$\therefore \left(180^\circ - \angle PC_2D_2\right) + (180^\circ - \angle PB_2A_2) = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle PC_2D_2 + \angle PB_2A_2 = 180^\circ$

3.分別以A_2、B_2圓心，$\overline{A_2P}$、$\overline{B_2P}$為半徑畫圓由角度轉換可得知(圖 5-8)

$\angle PB_2A_2 = \angle PB_3A_3$, $\angle \mathrm{PC_2}D_2 = \angle PB_3C_3$又$\angle PC_2D_2 + \angle PB_2A_2 = 180^\circ$

$\therefore \angle PB_3C_3 + \angle PB_3A_3 = 180^\circ \Rightarrow \angle A_3B_3C_3 = 180^\circ$

得證A_3、B_3、C_3三點共線

結論：在五邊形時兩情況一樣差別在角度轉換後造成退化的角

的關係，但在中間的證明都是利用角度轉換性質來證明。

觀察 5：1.$\angle PBA$為駐留分角，$\angle PEA$為移動分角，$\angle PEA$對$\angle PBA$的間隔邊數為三邊，和圓外的邊數一樣。

2.五邊形 ABCDE 的$\overline{AB}$、$\overline{AE}$兩邊為棒圓$\odot BAE$上的兩弦。

3.造成退化的兩分角開口方向皆面向圓內，移動分角只經過圓外的邊。

(四)**P 點在五邊形近棒圓上退化(同棒圓之證明以下皆舉情況一來討論)：**

已知：ABCDE 為原五邊形，$A_1B_1C_1D_1E_1$為第一層五邊形，P 在近棒圓$\odot AEE'_1$

求證：A_1、D_1、E_1共線(圖 5-9)

證明：參與角度轉換的兩角關係為$\angle PEE'_1 = \angle PAE'_1$，所以此情況為情況一

分別以 A、E 為圓心，$\overline{AP}$、$\overline{EP}$為半徑畫圓

$\because AEPE'_1$為一圓內接四邊形, $\therefore \angle PEE'_1 = \angle PAE'_1$

$\Rightarrow 180^\circ - \angle PEE_1 = 180^\circ - \angle PAE'_1 \Rightarrow \angle PED = \angle PAB$

由角度轉換可得知

$\angle PED = 180^\circ - \angle PE_1D_1$, $\angle PAB = 180^\circ - \angle PE_1A_1$, 又$\angle PEE'_1 = \angle PAE'_1$

$\Rightarrow \angle PED = \angle PAB \Rightarrow 180^\circ - \angle PE_1D_1 = 180^\circ - \angle PE_1A_1 \Rightarrow \angle PE_1D_1 = \angle PE_1A_1$

$\therefore D_1$在$\overline{A_1E_1}$(得證)

觀察 6：1.$\angle PED$為駐留分角，$\angle PAB$為移動分角，$\angle PAB$對$\angle PED$的間隔邊數為一邊，和圓外的邊數一樣，也和退化層數相同。

2.五邊形 ABCDE 的$\overline{AB}$、$\overline{DE}$兩邊之延長線為近棒圓$\odot AEE'_1$上的兩弦，因為近棒圓$\odot AEE'_1$為此五邊形之一階近棒圓，所以$\odot AEE'_1$上的兩弦所夾的邊數為一邊。

3.造成退化的兩分角開口方向皆背對圓內，移動分角只經過圓內的邊。

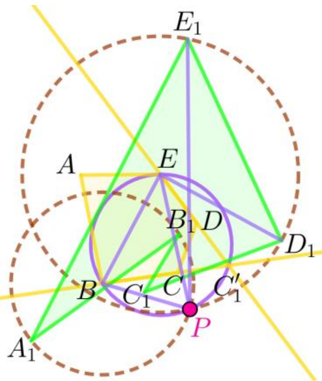


圖 5-10 五邊形遠棒圓退化 1

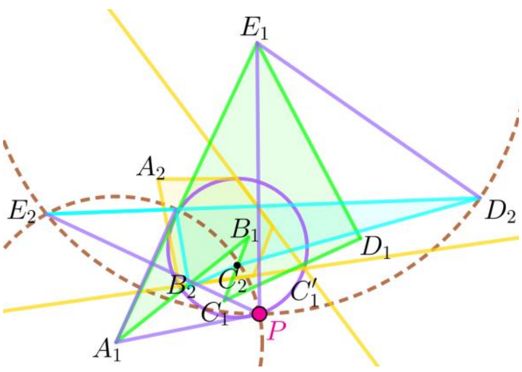


圖 5-11 五邊形遠棒圓退化 2

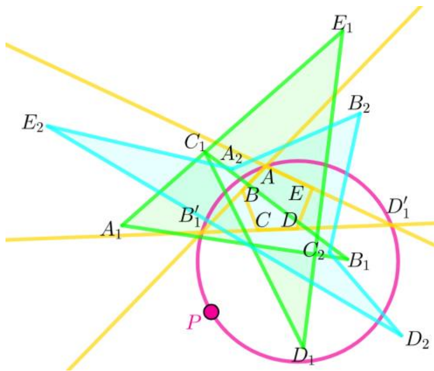


圖 6-1 交點圓圖形

(五) **P 點在五邊形五邊形遠棒圓**：

已知：ABCDE 為原五邊形，$A_1B_1C_1D_1E_1$為疊作第一層五邊形，$A_2B_2C_2D_2E_2$為疊作第二層五邊形，P 在遠棒圓$\odot BEC'_1$

求證：A_2、D_2、E_2共線(圖 5-10、5-11)

證明：參與角度轉換的兩角關係為$\angle \mathrm{PE}C'_1 = \angle \mathrm{PB}C'_1$，所以此情況為情況一

1.分別以 B、E 為圓心，$\overline{BP}$、$\overline{EP}$為半徑畫圓

$\therefore \angle \mathrm{PE}C'_1 = \angle \mathrm{PB}C'_1 \Rightarrow \angle \mathrm{PED} = \angle \mathrm{PBC}$

由角度轉換可得知

$\angle \mathrm{PED} = \angle PE_1D_1,\ \angle \mathrm{PBC} = \angle PA_1B_1 \Rightarrow \angle PE_1D_1 = \angle PA_1B_1$

2.分別以A_1、E_1為圓心，$\overline{A_1P}$、$\overline{E_1P}$為半徑畫圓

由角度轉換可得知：$\angle PE_1D_1 = \angle PE_2D_2,\ \angle PA_1B_1 = \angle PE_2A_2$

又由 1.得知$\angle PE_1D_1 = \angle PA_1B_1$

$\because \angle PE_2D_2 = \angle PE_2A_2 \therefore A_2$在$\overline{D_2E_2}$(得證)

觀察 7：1.$\angle \mathrm{PED}$為駐留分角，$\angle \mathrm{PBC}$為移動分角，$\angle \mathrm{PBC}$對$\angle \mathrm{PED}$的間隔邊數為兩邊，和圓外的邊數一樣，也和退化層數相同。

2.五邊形 ABCDE 的$\overline{BC}$、$\overline{ED}$兩邊之延長線為遠棒圓$\odot\ \mathrm{BEC'_1}$上的兩弦，因為遠棒圓$\odot\ \mathrm{BEC'_1}$為此五邊形之一階遠棒圓，所以$\odot\ \mathrm{BEC'_1}$上的兩弦所夾的邊數為一邊，則圓內有 2+1=3 個邊。

3.造成退化的兩分角開口方向皆面向圓內，移動分角只經過圓外的邊。

結論：由上面(一)到(五)點及前段所敘的三角形邊退化證明可得知，

1.五邊形的退化點必在五邊形的邊及邊延長線與棒圓、近棒圓、遠棒圓上。

2.五邊形的退化點若在五邊形的邊及邊延長線上，則最終退化圖行為點；若在五邊形的棒圓、近棒圓、遠棒圓上，則最終退化圖行為點。

3.每個圓上造成退化的兩角，一個都是駐留分角，另一個都是移動分角，間隔層數會等於退化樣貌的層數。

四、N 邊形退化樣貌之探討：

在研究過程中，我們發現 P 點在一 N 邊形退化點軌跡上有些位置會有一些特例，以下將分兩部分來探討。

第一部分：有些情況雖然會出現三點共線的情形，但因為不會有邊重合或消失，所以不會退化，這也就是我們為何要在退化的定義中強調要三相鄰頂點共線。

第二部分：我們發現當退化點軌跡有交點時則退化樣貌會有改變，相同種類的退化點軌跡有疊加的性質，不同種類的退化點軌跡會依性質的強度而有不同結果。

以下我們分別針對這兩個部分進行探討：

第一部分：P 點在交點圓上時，三個不相鄰的頂點共線，不退化(圖 6-1)。

例：P 點在 ABCDE 之交點圓$\odot\ AB'_1D'_1$上

$\therefore \mathrm{A_1}$、$\mathrm{C_1}$、$\mathrm{E_1}$三不相鄰頂點共線，但$\mathrm{A_2B_2C_2D_2E_2}$不退化

因此交點圓$\odot\ AB'_1D'_1$不為五邊形 ABCDE 之退化點軌跡

點在退化點軌跡的交點上時退化樣貌會有改變，所以以下我們分成四種情況討論：

(一)**一般退化樣貌(非特殊交點)**

(二)**直線與所有退化點軌跡之交點**

(三)**同類圓交點**

(四)**不同類圓交點**

接下來我們針對以上四種情況分別討論

(一)**一般退化樣貌(非特殊交點)**：

經過探討，我們發現退化點在不同位置時，有不同退化情形，驗證後得到以下結果。

表 12 一般退化樣貌(非特殊交點)

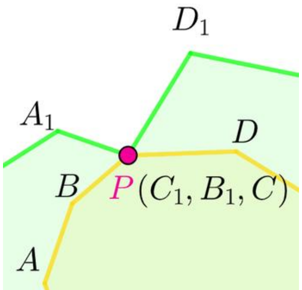


圖 6-2 頂點退化樣貌 例

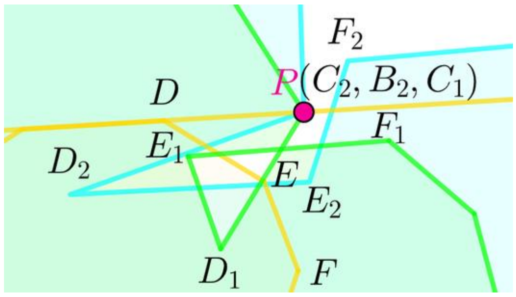


圖 6-3 邊延長線退化樣貌 例

P 點位置	退化型態	說明
頂點 (0 階棒點)	1 層 N 次 (完全退化)	若 P 在一 N 邊形 ABCD…的頂點 C 上(圖 6-2) 則由性質一**頂點退化**可得知 P 在$\overleftrightarrow{BC}$及$\overleftrightarrow{CD}$兩對稱軸上 因此在 P 對$\overleftrightarrow{BC}$及$\overleftrightarrow{CD}$之對稱點B_1、C_1和 P 點重和 ⇒N 邊形在第一層開始退化 重複疊作後第 N-1 層的所有頂點都和 P 點共點 因此此 N 邊形退化為 1 點 ⇒此 P 點為此 N 邊形的 N 次退化點 **∴此 P 點在此 N 邊形之頂點上時為此 N 邊形的 1 層 N 次退化點**
邊及邊延長	2 層 N 次 (完全退化)	若 P 在一 N 邊形 ABCD…的邊延長$\overleftrightarrow{CD}$上(圖 6-3) 則由性質二**邊退化**可得知 P 在$\overleftrightarrow{CD}$對稱軸上 因此在 P 會在第一層鏡射 N 邊形的頂點C_1上 由性質一**頂點退化**可知 P 對 N 邊形作第二層鏡射多邊形時會退化 ⇒N 邊形在第二層開始退化 重複疊作後第 N 層的所有頂點都和 P 點共點 因此此 N 邊形退化為 1 點⇒此 P 點為此 N 邊形的 N 次退化點 **∴此 P 點在此 N 邊形之邊及邊延長線上時為此 N 邊形的 1 層 N 次退化點**

P 點位置	退化型態	說明
棒圓	N-2 層 1 次	由分組相似證明之結論可得知，動分角會背對移動的方向 又由**觀察 2**、**觀察 5** 可得知，個造成退化的分角都面朝圓內 ∴移動分角不會經過圓內，一定只會經過圓外的邊 又由**觀察 2** 及**觀察 5** 中可得知，邊形棒圓內有兩個邊 ∴圓外有 N-2 個邊 ⇒P 點在 N 邊形棒圓上時退化層數為 N-2 層 P 在 N 邊形棒圓上時，只有兩個分角相等 ⇒P 點在 N 邊形棒圓上時退化次數為 1 次 **∴此 P 點在此 N 邊形之棒圓上時為此 N 邊形的 N-2 層 1 次退化點**
m 階近棒圓	m 層 1 次	由分組相似證明之結論可得知，動分角會背對移動的方向 又由**觀察 3**、**觀察 6** 可得知，個造成退化的分角都背對圓內 ∴移動分角只會經過圓內，一定不會經過圓外的邊 又由**觀察 3** 及**觀察 6** 中可得知，N 邊形 m 階近棒圓內有 m 個邊 ⇒P 點在 N 邊形 m 階近棒圓上時退化層數為 m 層 P 在 N 邊形 m 階近棒圓上時，只有兩個分角相等 ⇒P 點在 N 邊形棒圓上時退次數為 1 次 **∴此 P 點在此 N 邊形之 m 階近棒圓上時為此 N 邊形的 m 層 1 次退化點**
m 階遠棒圓	N-m-2 層 1 次	由分組相似證明之結論可得知，移動分角會背對移動的方向 又由**觀察 4**、**觀察 7** 可得知，兩個造成退化的分角都面朝圓內 ∴移動分角不會經過圓內，一定只會經過圓外的邊 又由**觀察 4** 及**觀察 7** 中可得知，N 邊形 m 階遠棒圓內有 2+m 個邊 ∴圓外有 N-m-2 個邊 ⇒P 點在 N 邊形 m 階遠棒圓上時退化層數為 N-m-2 層 P 在 N 邊形 m 階遠棒圓上時，只有兩個分角相等 ⇒P 點在 N 邊形 m 階遠棒圓上時退化次數為 1 次 **∴此 P 點在此 N 邊形之 m 階遠棒圓上時為此 N 邊形 N-m-2 層 1 次退化點**

1.若 P 點在邊及邊延長線上，則最終退化圖形為點。

2.若 P 點在棒圓、近棒圓、遠棒圓(非交點)上，則最終退化圖形為 N-1 邊形。

表 13 整理了 P 在 N 邊形不同退化點軌跡上的退化情況(不包括退化點軌跡的交點)

表 13：P 在 N 邊形不同退化點軌跡上的退化情況(不包括退化點軌跡的交點)

	邊及邊延長	棒圓	m 階近棒圓	m 階遠棒圓
一般情況	2 層 N 次	N-2 層 1 次	m 層 1 次	N-m-2 層 1 次

(二)**直線與所有退化點軌跡之交點**：

我們表 14 加入整理了 P 在 N 邊形不同退化點軌跡與直線的交點上時的退化情況

表 14：P 在 N 邊形不同退化點軌跡與直線的交點上時的退化情況

	邊及邊延長	棒圓	m 階近棒圓	m 階遠棒圓
一般情況	2 層 N 次	N-2 層 1 次	m 層 1 次	N-m-2 層 1 次
邊及邊延長	1 層 N 次	2 層 N 次	2 層 N 次	2 層 N 次

(三)**同類圓交點**：

若 P 點為兩同類圓(**例**：棒圓、同階近棒圓、同階遠棒圓)的交點，則退化層數不變、次數疊加為兩次。

表 15：P 點為兩同類圓的交點

<table>
<tr><td>退化點位置</td><td>邊及邊延長</td><td>棒圓</td><td>m 階近棒圓</td><td>m 階遠棒圓</td></tr>
<tr><td>一般情況</td><td>2 層 N 次</td><td>N-2 層 1 次</td><td>m 層 1 次</td><td>N-m-2 層 1 次</td></tr>
<tr><td>邊及邊延長</td><td>1 層 N 次</td><td>2 層 N 次</td><td>2 層 N 次</td><td>2 層 N 次</td></tr>
<tr><td>棒圓</td><td></td><td>N-2 層 2 次</td><td colspan="2">不同類圓的交點退化規則
較為複雜，完整分析</td></tr>
<tr><td>近棒圓</td><td></td><td></td><td>m 層 2 次</td><td>請見下表</td></tr>
<tr><td>遠棒圓</td><td></td><td></td><td></td><td>N-m-2 層 2 次</td></tr>
</table>

下表加入整理了 P 在 N 邊形不同退化點軌跡與直線的交點上時的退化情況

註：若照上表規則推測退化圖形為線，則會退化成點

(四)**不同類圓交點**：

我們發現當 P 點在一 N 邊形退化點軌跡的不同類圓之交點上時，會因情況不同有不同退化樣貌，以下在兩圓有交點的情況下，分成兩圓**共用 0 個、1 個、2 個頂點**，這三種情況說明。

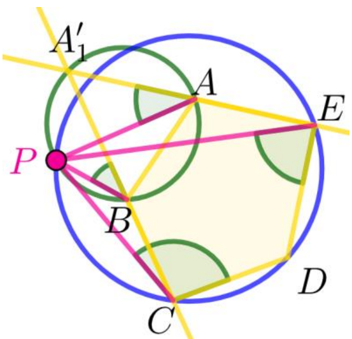


圖 7-1 不同類圓交點

共用 0 個頂點

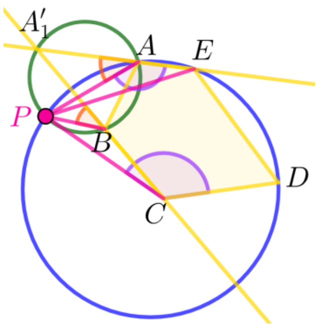


圖 7-2 不同類圓交點

共用 1 個頂點

共用一角

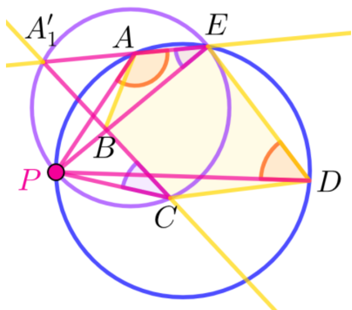


圖 7-3 不同類圓交點

共用 1 個頂點

不共用角

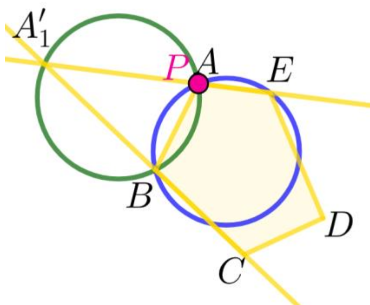


圖 7-4 不同類圓交點

共用 2 個頂點

1.**共用 0 個頂點**：

例：**已知**：P 點為五邊形 ABCDE 的棒圓⊙ CDE及近棒圓⊙ A'_1BA之交點(圖 7-1)

分析：1.棒圓⊙ CDE的退化樣貌為 3 層 1 次

2.近棒圓⊙ A'_1BA的退化層數為 1 層 1 次

說明：1.對棒圓⊙ CDE來說，原本會重疊的兩角是∠PCD及∠PED

對近棒圓⊙ A'_1BA來說，原本會重疊的兩角是$\angle PBA'_1(\angle PBC)$及

$\angle PAA'_1(\angle PAD)$

而兩圓原本會重疊的角並無共用

棒圓⊙ CDE及近棒圓⊙ A'_1BA的兩角各自在自己原本的層數發生退化

⇒ P 點為五邊形 ABCDE之二次退化點

2.對棒圓⊙ CDE來說，原本會退化的層數是 3 層

對近棒圓⊙ A'_1BA來說，原本會退化的層數是 1 層

所以在 P 點上時近棒圓⊙ A'_1BA的兩個角會先合併，發生退化

棒圓⊙ CDE的兩角比較晚合併發生第二次退化

但因第一次退化後在第二層少了一個邊

因此棒圓⊙ CDE造成退化的兩角中的移動分角所經過的邊會少一個

∴第二次退化提早到第二層發生⇒ P 點的退化層數為 1 層

則 P 點的退化層數為 1 層，次數為 2 次

結論：**1.**共用 0 個頂點的兩圓之交點收斂層數為最低層數，次數會疊加

2.一圓造成退的兩角的移動路徑中有一邊因為退化消失了，則此圓的兩角會提早一層合併

2.**共用 1 個頂點**：又分為【共用一角】及【不共用角】

情形一：P 點在不同類圓交點，共用 1 個頂點且【共用一角】

已知：P 點為五邊形 ABCDE 的棒圓⊙ AED及近棒圓⊙ A'_1BA之交點(圖 7-2)

分析：1.棒圓⊙ AED的退化樣貌為 3 層 1 次

2.近棒圓⊙ A'_1BA的退化層數為 2 層 1 次

說明：1.對棒圓⊙ AED來說，原本會重疊的兩角是∠PAE及∠PDE

對近棒圓⊙ A'_1BA來說，原本會重疊的兩角是$\angle PBA'_1(\angle PBC)$及

$\angle PAA'_1(\angle PAD)$

而兩圓原本會重疊的角中有一個角(∠PAE)共用

近棒圓⊙ A'_1BA的兩角合併退化後就會消失

棒圓⊙ CDE的兩角因為其中有一角有共用，在近棒圓退化後合併消失了，因此不會發生第二次退化 ⇒ P 點為五邊形 ABCDE之一次退化點

2.對棒圓$\odot AED$來說，原本會退化的層數是 3 層

對近棒圓$\odot A'_1BA$來說，原本會退化的層數是 1 層

所以在 P 點上時近棒圓$\odot FBA$的兩個角會先合併，發生退化

⇒ P 點的退化層數為 1 層，則 P 點的退化層數為 1 層，次數為 2 次

結論：共用 1 個頂點且共用一角的兩圓交點收斂層數為最低層數，次數不疊加。

情形二：P 點在不同類圓交點，共用 1 個頂點且【不共用角】

已知：P 點為五邊形 ABCDE 的棒圓$\odot BAE$及遠棒圓$\odot CAA'_1$之交點(圖 7-3)

分析：1.棒圓$\odot BAE$的退化樣貌為 3 層 1 次

2.遠棒圓$\odot CAA'_1$的退化層數為 2 層 1 次

說明：1.對棒圓$\odot AED$來說，原本會重疊的兩角是$\angle PBA$及$\angle PEA$

對遠棒圓$\odot CAA'_1$來說，原本會重疊的兩角是

$\angle PCA'_1(\angle PCD)$及$\angle PAA'_1(\angle PAE)$

而兩圓原本會重疊的角中並無共用棒圓$\odot BAE$及遠棒圓$\odot CAA'_1$的兩角各自在自己原本的層數發生退化

⇒ P 點為五邊形 ABCDE之二次退化點

2.對棒圓$\odot AED$來說，原本會退化的層數是 3 層

對遠棒圓$\odot CAA'_1$來說，原本會退化的層數是 2 層

所以在 P 點上時遠棒圓$\odot CAA'_1$的兩個角會先合併，發生退化$\odot CAA'_1$的兩個角雖然會造成棒圓$\odot AED$造成退化的兩角經過的路徑消失一個邊，但邊還沒消失前棒圓$\odot AED$的兩角先合併

∴第二次退化不會提早發生，棒圓$\odot AED$的兩角在第 3 層時較晚合併

⇒ P 點的退化層數為 2 層，則 P 點的退化層數為 2 層，次數為 2 次

結論：共用 1 個頂點且不共用角的兩圓交點收斂層數為最低層數，次數會疊加。

3.**共用 2 個頂點**：

例：**已知**：P 點為五邊形 ABCDE 的棒圓$\odot BAE$及近棒圓$\odot A'_1BA$之交點(圖 7-4)

分析：1.棒圓$\odot BAE$的退化樣貌為 3 層 1 次

2.近棒圓$\odot A'_1BA$的退化層數為 1 層 1 次

說明：兩個圓最多有兩個交點，但因兩個圓已經共用兩個頂點，

所以兩圓的交點皆為頂點 ⇒ P 點的退化樣貌和交點相同

結論：共用 2 個頂點的兩圓之交點收斂層數及次數接合頂點相同(2 層 N 次)。

綜合上述討論，我們得到以下兩點結論：

結論：**1.**不同類圓焦點退化樣貌規則如表 16

2.若一造成退化的移動分角的行經路線上有 n 邊因為退化而消失了，則此次退化會提造 n 層發生

表 16：P 點在不同類圓交點的退化情形

不同類圓交點的退化情形				
同類圓共用頂點與共用角情形	不共用頂點	共用一個頂點		共用兩個點
		共用一個相等的角	不共用相等的角	
層數	最小的為主	最小為主	最小為主	同直線
次數	2 次	1 次	2 次	同直線

五、N 邊形棒圓、近棒圓、遠棒圓及棒點數量之探討：

我們在探討退化點時發現，棒圓的數量會受到頂點有沒有共圓影響，而棒點個數則會因為有無平行邊影響，此外棒點的個數會直接影響近棒圓和遠棒圓的個數，因此以下將會對這些條件做探討。

(一)棒圓數量之探討：

由探討過程中，我們發現一 N 邊形一般情況下(頂點不共圓)最多有 N 個棒圓，若頂點有共圓，則棒圓會完全重和、個數減少。

(二)棒點、近棒圓、遠棒圓數量之探討：

1.若**無平行邊**：探討過程中，我們發現一 N 邊形在一般情況下，每一階棒點都會有 N 個，只有偶數邊形最高階會是 $\frac{N}{2}$ 個，而一 N 邊形的最高階棒點階數為$\left[\frac{N}{2}\right]-1$階。

例：一九邊形最高階棒點為 3 階有 9 個(圖 7-5)，一八邊形最高階棒點為 3 階有 4 個(圖 7-6)。

2.若**有平行邊**：由探討過程中，我們發現一對相隔一邊的平行邊會使從一階棒點開始少一個、一對相隔兩邊的平行邊會使從二階棒點開始少一個，以此類推。

例：在圖 7-7 中$\overline{AB} \parallel \overline{ED}$且兩邊最小間隔兩個邊，因此此六邊形少一個二階棒點。

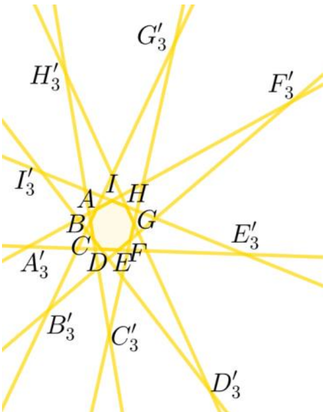


圖 7-5 九邊形 棒點個數探討

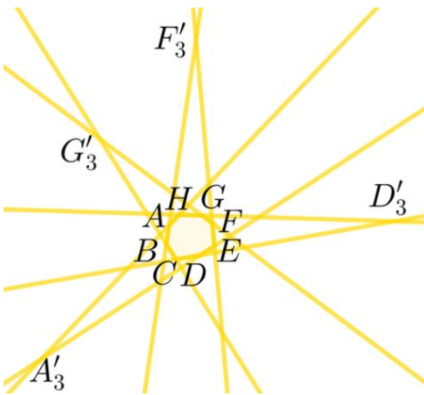


圖 7-6 八邊形 棒點個數探討

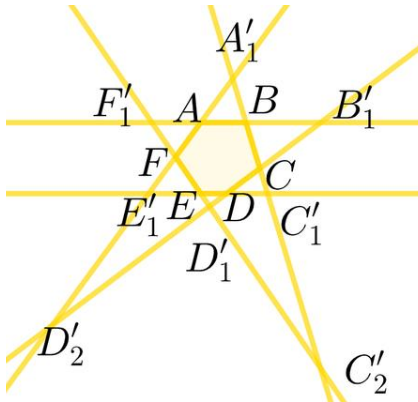


圖 7-7 有平行邊 棒點個數探討

六、非退化點軌跡必不退化性質之探討：

由前面探討過程中，我們發現 N 邊形的退化軌跡可分為直線(邊延長線)上的完全退化點及圓(棒圓、n 階近棒圓、n 階遠棒圓)上的一次退化點，以下會分別討論直線及圓退化的原因，只要符合以下的特性的圓及直線就會是此 N 邊形的退化點軌跡，反之其他點不會是退化點。

(一)**直線(完全退化)**：

已知：P 點在 N 邊形的任意一條邊延長線上

求證：P 為 N 邊形的完全退化點(圖 7-8)

證明：1.因為鏡射多邊形的做法是以各邊為對稱軸，P 點為對稱點作對稱，作出各點連線，又因為 P 點在邊延長線上，因此 P 點等於在其中一條對稱軸上，因此對此延長線作出的對稱點會和 P 點重合。

2.到了第一層鏡射多邊形時，P 點會在第一層鏡射多邊形的其中一個頂點上，相當於同時在兩條對稱軸上，因此重複疊作第二層時，會有兩點與 P 點重合，出現了退化的情況。

3.到了第二層鏡射多邊形時，P 點會在二層鏡射多邊形的其中一個頂點上，相當於同時在兩條對稱軸上，因此重複疊作第三層時，會有兩點與 P 點重合，出現了退化的情況，以此類推。

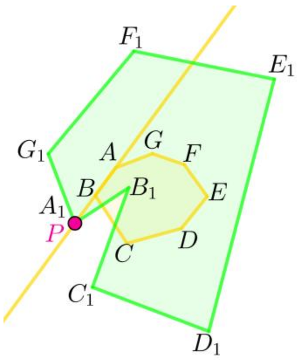


圖 7-8 直線必退化 1

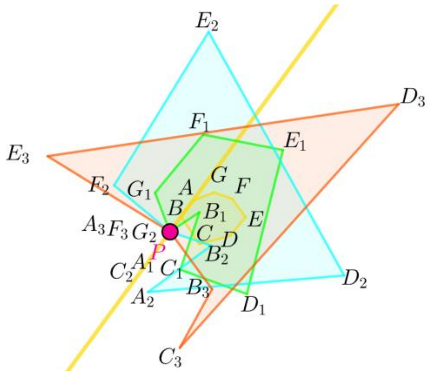


圖 7-9 直線必退化 2

例：以七邊形為例：

1.七邊形 ABCDEFG 為原圖形，P 點在$\overleftrightarrow{AB}$上，P 對$\overleftrightarrow{AB}$作的對稱點A_1與 P 點共點所以 P 在第一層鏡射七邊形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1$之頂點A_1上。(圖 7-9)

2.P 在第一層鏡射七邊形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1$之頂點A_1上，則 P 對$\overleftrightarrow{A_1B_1}$及$\overleftrightarrow{A_1G_1}$兩線作的對稱點$A_2$及$G_2$與 P 點共點，因為兩頂點共點所以開始出現退化情況，所以 P 在六邊形$A_2B_2C_2D_2E_2F_2$之頂點A_2上。

3.P 在六邊形$A_2B_2C_2D_2E_2F_2$之頂點A_2上，則 P 對$\overleftrightarrow{A_2B_2}$及$\overleftrightarrow{A_2F_2}$兩線作的對稱點$A_3$及$F_3$與 P 點共點，所以 P 在五邊形$A_3B_3C_3D_3E_3$之頂點$A_3$上，依此類推。

(二)**圓(1 次退化)**：

因為我們前面棒圓、近棒圓及遠棒圓的證明運用了圓內接四邊形的任何一條邊的兩個端點對邊的是角相等的性質，再加上兩個相等的角會參與角度轉換的動作，當多次的角度轉換使得兩個角重疊在一起，就會造成退化。

因此要讓圓內接四邊形相等的兩個角參與角度轉換，這兩個角的頂點必須是原四邊形的頂點，且其中一邊是原多邊形的邊或邊延長，另一邊是 P 對原多邊形的兩個頂點連線，且兩頂點的對邊是 P 點與第三點的連線，才會讓兩個相等的角參與角度轉換。

例：1.P 點在⊙BCE 上，四邊形 BCEP 為一圓內接四邊形

在∠PBE和∠PCE中兩點 B、C 為原多邊形的兩頂點，

此兩頂點所對的邊為$\overline{PE}$，$\overline{PB}$及$\overline{PC}$為 P 點對頂點 B、C 的連線，

$\overline{EB}$及$\overline{EC}$為$\overline{AB}$及$\overline{DC}$兩邊之延長線的一部份，

所以⊙BCE 為四邊形 ABCD 的退化點軌跡(圖 7-10)

2.P 點在⊙BCF 上四邊形 BCFP 為一圓內接四邊形

在∠PBF和∠PCF中兩頂點 B、C 為原多邊形的兩頂點

兩頂點所對的邊為$\overline{PF}$，$\overline{PB}$及$\overline{PC}$為 P 點對頂點 B、C 連線，

$\overline{FC}$為$\overline{DC}$之延長線的一部份，但$\overline{FB}$不為原圖形邊延長線的一部份，

所以⊙BCF 不為四邊形 ABCD 的退化點軌跡(圖 7-11)

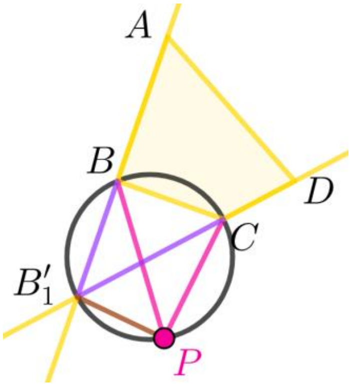


圖 7-10 圓必退化 1

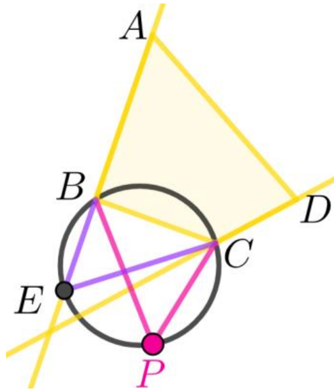


圖 7-11 圓必退化 2

七、N 邊形退化點性質之探討：

經由上述討論我們發現收斂層數有疊加的現象，因此在特別的情況下可以製造出任意的幾何圖形(直線除外)。

(一)退化點軌跡性質：

1.四邊形退化點性質：

四邊形的所有近棒圓及遠棒圓會交於一點(圖 7-12)

(密克點-完全四線形定理中有提出)

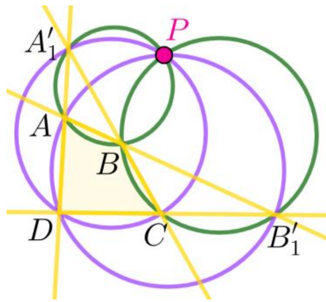


圖 7-12 密克點

2.**次數疊加性質**：若多個圓(棒圓、近棒圓、遠棒圓)交於一點，且沒有共用造成退化的分角，則此交點次數疊加，若一 N 邊形有 k 個圓(N-2 層 1 次退化)交於一點，此交點退化層數為 k 次退化點。

3.**提早退化性質**：較晚合併的角的行徑路線上有邊因退化消失，則會提早退化。

例：若一八邊形有 2 個棒圓、1 個 1 階近棒圓、1 個 2 階遠棒圓，交於一點，且這四個圓沒有共用造成退化的角，若 P 點在此交點上時，由上表退化樣貌規則得出退化過程，退化過程如下表：

表 17：提早退化性質的退化情形

退化層數	造成退化的圓及數量	退化次數	疊加退化次數	圖例
第一層	一個 1 階近棒圓	1	1	圖 7-13、圖 7-14
第四層	一個 2 階遠棒圓	1	2	圖 7-15
第五層	兩個棒圓	2	4	圖 7-16

註：原本棒圓會在第六層退化，但因為近棒圓退化使得棒圓必經路線上有邊消失，因此提早退化。

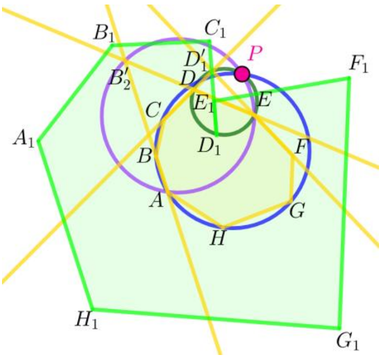


圖 7-13 提早退化(0、1 層)

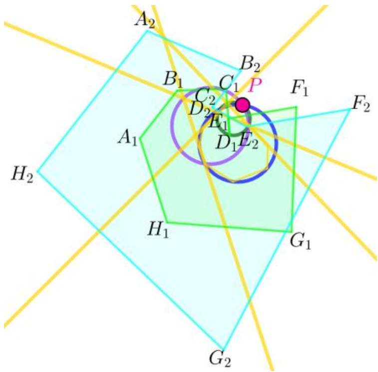


圖 7-14 提早退化(1、2 層)

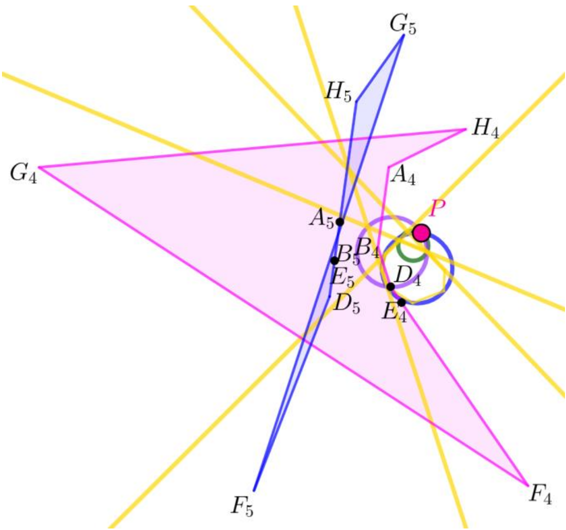


圖 7-15 提早退化(4、5 層)

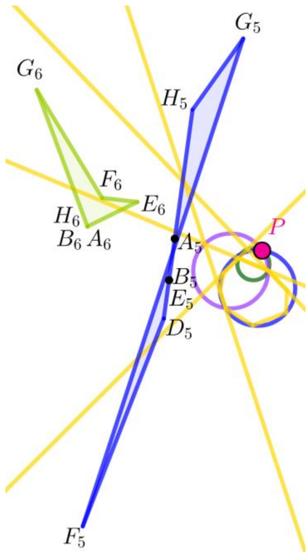


圖 7-16 提早退化(5、6 層)

(二)特定退化圖形製作

若原圖形為一個十邊形，要最終要退化成四邊形的話，P 點為六次退化點，要製造出六次退化點要讓六個圓交於一點，則六圓交點即為所求，所有圓中最好控制的就是棒圓，要讓六個圓交於一點，只要讓組成這六個棒圓的頂點共圓，這六個棒圓便會重疊，P 點在這個圓上時，P 點為六次退化點。(圖 7-17)

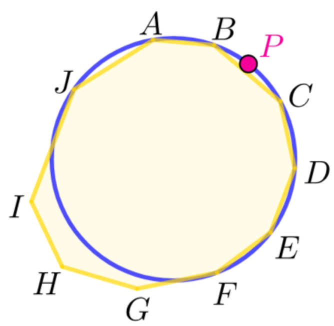


圖 7-17 特定退化圖形製作

柒、結論

一、三角形退化點位置必為其**邊及邊延長線**及**外接圓**，其退化圖形必為**點**。

二、多邊形退化點必在其**邊及邊延長線**、**棒圓**、**近棒圓**及**遠棒圓**上。

三、P 點在不同退化位置交點的退化情形如下表：

表 15：P 點為兩同類圓的交點

<table>
<tr><td>退化點位置</td><td>邊及邊延長</td><td>棒圓</td><td>m 階近棒圓</td><td>m 階遠棒圓</td></tr>
<tr><td>一般情況</td><td>2 層 N 次</td><td>N-2 層 1 次</td><td>m 層 1 次</td><td>N-m-2 層 1 次</td></tr>
<tr><td>邊及邊延長</td><td>1 層 N 次</td><td>2 層 N 次</td><td>2 層 N 次</td><td>2 層 N 次</td></tr>
<tr><td>棒圓</td><td></td><td>N-2 層 2 次</td><td colspan="2">不同類圓的交點退化規則
較為複雜，完整分析</td></tr>
<tr><td>近棒圓</td><td></td><td></td><td>m 層 2 次</td><td>請見下表</td></tr>
<tr><td>遠棒圓</td><td></td><td></td><td></td><td>N-m-2 層 2 次</td></tr>
</table>

表 16：P 點在不同類圓交點的退化情形

<table>
<tr><td colspan="5">不同類圓交點的退化情形</td></tr>
<tr><td rowspan="2">同類圓共用頂點
與共用角情形</td><td rowspan="2">不共用頂點</td><td colspan="2">共用一個頂點</td><td rowspan="2">共用兩個點</td></tr>
<tr><td>共用一個相等的角</td><td>不共用相等的角</td></tr>
<tr><td>層數</td><td>最小的為主</td><td>最小為主</td><td>最小為主</td><td>同直線</td></tr>
<tr><td>次數</td><td>2 次</td><td>1 次</td><td>2 次</td><td>同直線</td></tr>
</table>

四、**N 邊形退化點性質**：

(一)圓在沒有共用造成退化之分角的情況下，收斂層數可以疊加

(二)當較晚合併造成退化的分角必經路線上有邊因前面的退化先消失，則會發生提早退化

(三)可以操控比較好操控的棒圓，來使一任意 N 邊形退化成除了直線以外任何邊數比 N 小的幾何圖形

捌、未來展望

一、本篇的研究範圍只包含了凸多邊形的探究，希望未來能延伸至凹多邊形。

二、另一方面，我們在研究時發現平面上某些選取的點對一三角形的三邊作鏡射三角形，重複疊作後所產生的鏡射三角形{3k}、{3k+1}、{3k+2}各組分別會完全重合，我們稱它為全等點，但目前只有觀察到一些現象，還沒做完整的探究，也希望未來可以做更進一步的探究。

玖、參考文獻

一、第 54 屆 全國科展作品(多邊形與其中重、頂重多邊形之性質探討)

二、第 57 屆 全國科展作品(頂圓多邊形之性質研究與探討)

三、第 60 屆 全國科展作品(數學畢卡索－多邊形疊作之性質探討)

四、第 38 屆 新竹市科展作品(數學畢卡索－多邊形疊作之性質探討)